

École polytechnique de l'Université de Nantes  
*Systèmes électroniques et informatique industrielle*  
*Première année*  
*2006-2007*

# Analyse fonctionnelle

## I. Linéarité et convergences

Laurent Guillopé

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Prologue</b> .....	1
<b>1. Espaces vectoriels normés</b> .....	3
1.1. Espaces vectoriels et applications linéaires.....	3
1.2. Normes.....	4
1.3. Applications linéaires continues.....	6
1.4. Exercices.....	7
<b>2. Espaces fonctionnels et convergences</b> .....	10
2.1. Espaces normés.....	10
2.2. Espaces complets.....	12
2.3. L'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ .....	14
2.4. Convergences fonctionnelles.....	15
2.5. Exercices.....	15
<b>3. Séries trigonométriques et séries de Fourier</b> .....	18
3.1. Équation de la chaleur et séries trigonométriques.....	19
3.2. Fonctions $T$ -périodiques indéfiniment dérivables.....	20
3.3. Fonctions $T$ -périodiques continues par morceaux.....	21
3.4. Exercices.....	23
<b>A. Mesure et intégration à la Lebesgue</b> .....	26
A.1. Mesure de Lebesgue.....	26
A.2. Intégration lebesgienne.....	28
A.3. Espaces $L^p$ , $p = 1, 2, \infty$ .....	31
A.4. Intégrales dépendant d'un paramètre.....	31
<b>Index</b> .....	33

## LISTE DES FIGURES

1	La boîte noire et les données $X_e, X_s$ .....	1
2	Dans $\mathbb{R}^2$ , les boules $B_{\ \cdot\ }(1) = \{\ (x, y)\  \leq 1\}$ pour les normes $\ \cdot\ _1, \ \cdot\ _2$ et $\ \cdot\ _\infty$ , avec les inclusions de boules de types différents et rayons adéquats.....	5
3	La continuité d'une application $f$ en $v$ .....	6
4	Approximations d'une fonction continue par des fonctions continues affines par morceaux avec $N = 5, 10, 15, 20, 25, \infty$ segments.....	11
5	La gaussienne $\gamma$ et ses deux premières dérivées.....	14
6	Les graphes des prolongements 2-périodiques $\tilde{P}_1$ et $\tilde{P}_2$ des fonctions $P_1$ et $P_2$ définies sur $[-1, 1]$ et $[0, 2]$ resp.par la même formule analytique $t \rightarrow t^2$ .....	18
7	La barre $B$ de longueur $\ell$ .....	19
8	Approximations de $v(t) = \exp(\cos(7\pi t))/(1.2 + \sin(5\pi t)), t \in [-1, 1]$ par ses séries de Fourier tronquées $a_0(v) + \sum_{n>0}^N (a_n(v) \cos(2\pi nt) + b_n(v) \sin(2\pi nt))$ pour $N = 10, 20, 30, 40, 80, \infty$ .....	21
9	Approximations $s_N(t) = \frac{T}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(2\pi nt/T)$ de $f_T$ pour $N = 1, 5, 9, 13, 17, 21$ .....	22
10	Un arc de courbe est de mesure nulle dans le plan.....	26

# PROLOGUE

Un nombre important de problèmes mathématiques en sciences de l'ingénieur (et en science en général) relève de la *boîte noire*. On donne des données  $X_e$  en *entrée* à ce dispositif, qui délivre des données  $X_s$  en *sortie*. La modélisation est l'interprétation en termes mathéma-

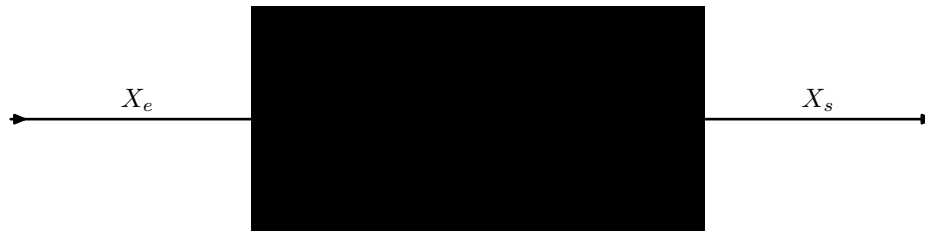


FIGURE 1 . La boîte noire et les données  $X_e, X_s$ .

tiques des actions de la boîte noire sur les quantités (variables, champs,...) représentant les entrée et sortie. Quelques exemples

- un amplificateur électronique opère sur la bande passante, la distorsion, le temps de réponse,...
- la description dynamique passe souvent par des équations différentielles dont les caractéristiques des solutions (stabilité, comportement asymptotique, périodicité,...) expriment des propriétés des signaux de sortie,
- un ordinateur reçoit en entrée des données (une suite de lettres, chiffres et symboles) et produit en sortie des graphiques, des sons, des images,... : le logiciel qui opère est la boîte noire.
- la position initiale d'un corde vibrante est l'entrée du système vibratoire, son évolution temporelle après sa libération est la sortie du dispositif.

La nature de la modélisation peut être complexe. En fait la relation entre entrée et sortie

$$(1) \quad X_s = A(X_e)$$

est souvent linéaire : si  $X_e$  et  $Y_e$  sont des entrées et  $X_s, Y_s$  les résultats livrés par la boîte noire resp. et  $\alpha, \beta$  des nombres (à interpréter comme des facteurs d'amplitude), alors la boîte noire produit la sortie  $A(\alpha X_e + \beta Y_e) = \alpha X_s + \beta Y_s$  pour l'entrée  $\alpha X_e + \beta Y_e$ . L'opérateur  $A$  qui produit la sortie  $X_s = {}^t(x_{s1}, x_{s2}, \dots, x_{sn})$  à partir de  $X_e = {}^t(x_{e1}, x_{e2}, \dots, x_{en})$  dans (1) peut être une matrice  $A = [a_{ij}]$

$$X_s = \begin{bmatrix} x_{s1} \\ x_{s2} \\ \vdots \\ x_{sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \\ \vdots \\ x_{en} \end{bmatrix}$$

ou correspondre à une transformation intégrale sur des fonctions  $X$  modélisant des signaux dépendant d'un temps continu  $t \in [0, T]$

$$X_s(t) = \int_0^T a(t, \tau) X_e(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T]$$

L'idée de linéarité s'est révélée, malgré ses limitations, d'une extrême fécondité : on peut voir les ondes s'additionner à la surface de la mer, la section 3.1 montre comment la somme de solutions particulières de l'équation des ondes amène aux séries de Fourier. Voilà le premier objectif du cours : étudier des opérations linéaires qui s'instancient de manière diverse.

Un second caractère mathématiques domine ces pages, celui de mesure et de mesure approchée : distance, convergence, approximation sont des notions rigoureuses illustrées de manière constante par des situations concrètes, dans des modélisations en dimension finie ou infinie, comme il apparaît dans l'étude des ondes, signaux ou champs en dimension 1 d'espace. L'abstraction linéaire traite des caractères communs à la dimension finie et infinie, néanmoins, des différences essentielles subsistent entre ces deux cas, comme par exemple l'équivalence des normes propre à la dimension finie.

Ce mélange de la structure algébrique (le linéaire ici) et la vision topologique (qui décrit les processus d'approximation) est au cœur du premier chapitre. La suite examine la notion de convergence qui, pour les signaux continus modélisés dans le cadre d'espaces fonctionnels de dimension infinie, dépend des critères choisis : l'approximation uniforme est intuitivement plus simple que l'approximation en moindres carrés (étudiée dans la troisième partie du cours). Ces subtilités posent évidemment des difficultés pour manipuler les signaux, et donnent de l'intérêt à la précision des notions utilisées ! Les séries de Fourier, introduites comme l'a fait Fourier dans ses études de l'équation de la chaleur, est un bon terrain de tests des notions précédentes.

Un appendice décrit rapidement la théorie de Lebesgue (mesure et intégration, classiques du XXe siècle), extension essentielle à la théorie plus élémentaire de Riemann (un classique du XIXe) : cet édifice majeur est nécessaire aux fondements de l'analyse de Fourier, et donc de la théorie du signal. En le plaçant en appendice, on donne au lecteur curieux la possibilité d'en prendre connaissance, au lecteur pressé de n'y retenir que quelques théorèmes et l'impression (relativement fondée, mais il existe toujours un contre-exemple plus ou moins élaboré pour démentir ces sentiments spontanés) que les calculs à *la Riemann* sont bien suffisants, justifiables qu'ils sont la plupart du temps par quelque argument lebesguien. Il ne faut pas perdre de vue la déraisonnable efficacité de la théorie de Lebesgue pour l'analyse de Fourier !

Nantes, le 15 septembre 2006

Laurent Guillopé

Une astérisque indique une proportion ou un théorème non démontré, certains passages sont dans une police réduite ; ils peuvent être négligés sans nuisance pour la bonne compréhension globale des résultats du cours. En fin, dans la version en ligne, des liens hypertextes prolongent l'index en renvoyant aux notices biographiques du *MacTutor history of mathematics archive* (Université de St Andrews, Écosse) pour les mathématiciens cités dans le texte : on y trouvera des bribes de cette histoire évoquée ci-dessus.

# CHAPITRE 1

## ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Ce chapitre introduit quelques concepts topologiques qui formalisent la notion d'approximation (et de convergence). Définir une topologie sur un espace  $E$ , c'est se donner pour chaque point  $x \in E$  la famille  $\mathcal{V}_x$  de ses voisinages, parties particulières de  $E$  contenant  $x$ . Si l'espace est vectoriel (et cela sera le cadre permanent des différentes parties de ce cours), sa structure linéaire apporte une simplification majeure. La famille des voisinages  $\mathcal{V}_{v_1}$  d'un vecteur  $v_1$  s'obtient de celle d'un autre vecteur  $v_2$  par la translation de vecteur  $v_2 - v_1$  :  $V_1$  est un voisinage de  $v_1$  si et seulement si  $v_2 - v_1 + V_1 = \{v_2 - v_1 + v | v \in V_1\}$  est un voisinage de  $v_2$ . Il suffit donc de bien comprendre la famille des voisinages du vecteur nul de l'espace vectoriel  $E$ . En fait, il suffit de considérer une famille fondamentale de voisinages, dite *base de voisinages*,  $\mathcal{B}_x$  de  $x$ , i. e. une sous-famille de celle des voisinages de  $x$  qui engendre cette dernière au sens où toute partie de  $\mathcal{V}_x$  est caractérisée comme contenant une partie de  $\mathcal{B}_x$ .

En particulier, si l'espace vectoriel est doté d'une norme (c'est le concept central de ce chapitre), il suffit de considérer comme base  $\mathcal{B}_v$  la famille des boules centrées en  $v$ , qui se déduisent par homothétie d'une seule boule! Cette relative simplicité topologique d'un espace vectoriel normé est insuffisante pour aborder les espaces fonctionnels de la théorie des distributions : sa bonne compréhension aidera néanmoins à comprendre les notions de convergence introduites dans le Chap. 2 en vue de l'introduction des distributions.

### 1.1. Espaces vectoriels et applications linéaires

Ayant en vue les applications du traitement du signal, où les amplitudes des signaux varient sur un continuum, on considérera des scalaires réels ou complexes : un réel positif mesure une amplitude, un complexe  $z = re^{i\varphi}$  une amplitude  $r$  modulée par une phase  $\varphi$ <sup>(1)</sup>.

Un espace vectoriel  $E$  est un ensemble  $E$  muni de deux opérations qui permettent de manipuler ses éléments, qui seront appelés *vecteurs*, comme la géométrie élémentaire du plan ou de l'espace le fait :

- l'addition de deux vecteurs  $v$  et  $v'$  dont la somme  $v + v'$  est un vecteur de  $E$
- la multiplication d'un vecteur  $v$  par un scalaire  $\alpha \in \mathbb{K}$ , multiplication dont le résultat est un vecteur  $\alpha \cdot v$  de  $E$ .

L'addition et la multiplication par un scalaire vérifie deux séries de propriétés qui définissent la structure vectorielle

- (A) pour tout  $v, v', v''$  dans  $E$ ,
- (A1)  $v + (v' + v'') = (v + v') + v''$ ,
  - (A2)  $v + v' = v' + v$ ,
  - (A3)  $v + 0_E = 0_E + v = v$  pour un élément unique  $0_E$ , dit *vecteur nul* de  $E$ ,

---

<sup>(1)</sup>Les espaces vectoriels sur les scalaires  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$  des nombres entiers modulo 2 ont une grande importance dans certains traitements du monde numérique ; ils ne seront pas considérés dans ce cours d'analyse.

- (A4) pour tout  $v \in E$ , il existe un élément unique de  $E$ , appelé *opposé de  $v$*  et noté  $-v$ , tel que  $v + (-v) = (-v) + v = 0_E$ ,
- (B) pour tout  $v, v'$  de  $E$  et tout  $\alpha, \beta$  de  $\mathbb{K}$ ,
- (B1)  $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$ ,
- (B2)  $\alpha \cdot (v + v') = (\alpha \cdot v) + (\alpha \cdot v')$ ,
- (B3)  $(\alpha + \beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) + (\beta \cdot v)$ ,
- (B4)  $1 \cdot v = v$ .

▷ **Exemples 1.1.**

1. L'espace  $\mathbb{C}^n$  des  $n$ -uplets  $(z_1, \dots, z_n)$  de nombres complexes,
2. L'espace  $\ell_f(\mathbb{C})$  des suites  $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de complexes nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux
3. L'espace  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs complexes, et ses sous-espaces d'applications continues  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , d'applications  $k$  fois continûment différentiables  $\mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , d'applications bornées  $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , etc. Si  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , comme un intervalle ouvert  $(a, b)$  ou fermé  $[a, b]$ , on peut pareillement considérer les espaces  $\mathcal{F}(A, \mathbb{C}), \mathcal{C}(A, \mathbb{R}), \dots$  ◁

△ **Remarque 1.1.** Les notions introduites se restreindront parfois naturellement pour des espaces vectoriels réels (tels  $\mathbb{R}^n, \ell_f(\mathbb{R}), \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \dots$ ). Les espaces vectoriels considérés seront le plus souvent complexes. On notera donc simplement  $\mathcal{F}(\mathbb{R}), \mathcal{C}(\mathbb{R}), \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}) \dots$  ▽

Le premier exemple est de dimension finie : il existe une famille finie de vecteurs  $(b_1, b_2, \dots, b_k)$  telle que tout vecteur  $v$  puisse s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs, c'est à dire il existe des scalaires  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  tels que

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_k b_k$$

Les deux derniers exemples ne sont pas de dimension finie : c'est le cas des espaces fonctionnels de l'analyse, qu'on approche par des espaces vectoriels de dimension finie souvent (cf. la meilleure approximation quadratique par des polynômes trigonométriques qui sera vue dans la dernière partie du cours).

Une application linéaire  $f$  d'un espace vectoriel  $E$  dans un espace vectoriel  $F$  est une application qui respecte la structure d'espace vectoriel : l'image d'une combinaison linéaire est combinaison linéaire des images

$$f(\alpha v + \alpha' v') = \alpha f(v) + \alpha' f(v'), \quad v, v' \in E, \alpha, \alpha' \in \mathbb{K}.$$

Une application linéaire à valeurs dans l'espace des scalaires est appelée *forme linéaire*. La dualité *vecteur vs forme linéaire* correspond à deux modes d'observation : l'examen direct avec appréhension globale du vecteur (représentant une situation concrète) ou sa découverte graduelle par les valeurs de formes linéaires opérant sur ce vecteur. En théorie, la totalité de ces valeurs suffit à reconstituer le vecteur.

## 1.2. Normes

**Définition 1.1.** Une *norme*  $\| \cdot \|$  sur un espace vectoriel  $E$  est une application qui à tout vecteur  $v$  associe un réel  $\|v\|$  vérifiant

- (positivité)  $\|v\| \geq 0$ ,  $\|v\| = 0$  si et seulement si  $v$  est le vecteur nul,
- (homogénéité)  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}, v \in E$
- (inégalité triangulaire)  $\|v + v'\| \leq \|v\| + \|v'\|$ ,  $v, v' \in E$

Un espace  $E$  muni d'une norme est dit espace normé. Un vecteur de norme 1 est dit *unitaire*.

▷ **Exemples 1.2.**

1. Sur  $\mathbb{C}^n$ , les trois fonctions

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^n |z_i|, \quad \|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}, \quad \|z\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, n} |z_i|, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

définissent une norme. Les boules correspondantes dans le plan  $\mathbb{R}^2$  sont tracées ci-dessous.

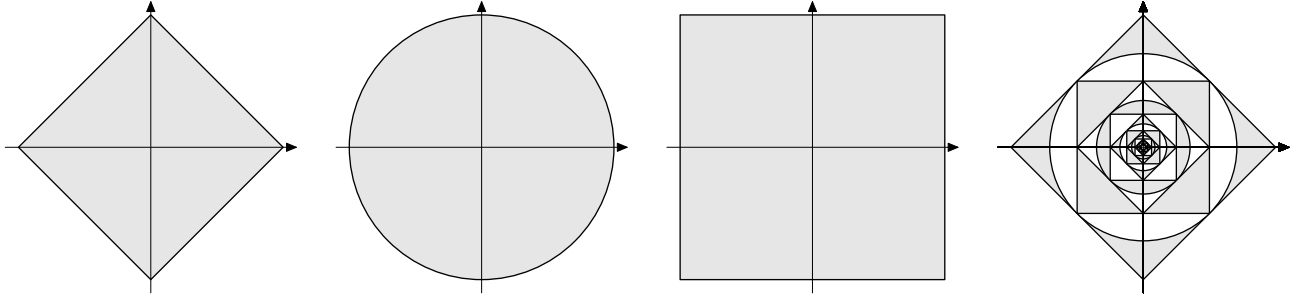


FIGURE 2 . Dans  $\mathbb{R}^2$ , les boules  $B_{\|\cdot\|}(1) = \{\|(x, y)\| \leq 1\}$  pour les normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$ , avec les inclusions de boules de types différents et rayons adéquats.

2. L'espace  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$  des fonctions continues bornées sur  $\mathbb{R}$  est normé avec la fonction

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|, \quad f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}).$$

3. Sur l'espace  $\mathcal{C}([a, b])$  des fonctions continues sur l'intervalle borné  $[a, b]$ , les trois fonctions suivantes

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|, \quad f \in \mathcal{C}([a, b]).$$

définissent une norme.

Dans ces trois séries d'exemples, les propriétés de la définition 1.1 sont aisément vérifiées, sauf l'inégalité triangulaire pour les normes  $\|\cdot\|_2$ . Cette inégalité résulte de l'inégalité de Schwarz pour le produit scalaire

$$\Re \langle v, w \rangle \leq \|v\|_2 \|w\|_2$$

puisque

$$\|v + v'\|_2^2 = \langle v + v', v + v' \rangle = \|v\|_2^2 + 2\Re \langle v, v' \rangle + \|v'\|_2^2 \leq (\|v\|_2 + \|v'\|_2)^2.$$

L'inégalité de Schwarz s'obtient en écrivant la positivité du discriminant du trinôme  $\lambda \rightarrow \|v + \lambda w\|_2^2$  (cf. exercice 1.4.1). ◁

**Définition 1.2.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. La *boule* (ouverte) de centre  $v$  et de rayon  $r > 0$  est la partie  $B(v, r)$  de  $E$  définie par

$$B(v, r) = \{w \in E, \|w - v\| < r\}.$$

Une partie  $V$  de  $E$  est un *voisinage* du vecteur  $v \in E$  si  $V$  contient une boule  $B(v, r)$  pour un  $r > 0$ . Une partie de l'espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  est dite *ouverte* si elle est voisinage de chacun de ses points.

△ **Remarque 1.2.** On vérifie bien la compatibilité avec les translations : la translatée de la boule  $B(r) = B(0_E, r)$  par le vecteur  $v$  est la boule  $B(v, r) = v + B(r)$ . La famille de boules  $(B(v, r))_{r>0}$  est la base de voisinages de  $v$  habituelle : toute partie est un voisinage  $V$  de  $v$  si elle contient une boule  $B(v, r)$  pour un  $r$  assez petit. Les inclusions illustrées dans la Fig. 2 indiquent un fait général : dans un espace de dimension finie, peu importe le choix



d'une norme dans la considération de la famille de boules associées à cette norme comme base de voisinages.  $\nabla$

### 1.3. Applications linéaires continues

Une application  $f$  définie sur un voisinage de  $x_0$  est continue en  $x_0$  si, pour tout voisinage  $V$  de  $f(x_0)$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  tel que  $f(U) \subset V$ .

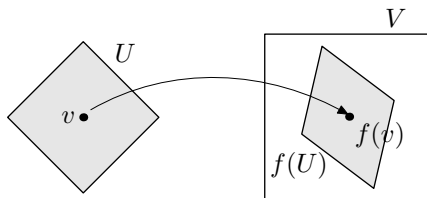


FIGURE 3 . La continuité d'une application  $f$  en  $v$ .

Pour le cas d'une application linéaire définie entre espaces normés, cette notion de continuité se simplifie du fait de la linéarité : la continuité résulte de simples majorations, à savoir l'existence de la constante  $M$  dans la proposition suivante. De plus, une application linéaire est continue soit en tout vecteur, soit en aucun.

**Théorème 1.1.** Soit  $\ell$  application linéaire de  $(E_1, \|\cdot\|_1)$  dans  $(E_2, \|\cdot\|_2)$ . L'application  $\ell$  est continue sur  $E_1$  si et seulement si il existe une constante  $M$  telle que

$$(2) \quad \|\ell(v)\|_2 \leq M\|v\|_1, \quad v \in E_1.$$

On note par  $\|\ell\|$  la borne inférieure des  $M$  tels que (2) soit valide. Le réel positif  $\|\ell\|$  est donné comme supremum suivant la formule  $\|\ell\| = \sup_{v \in E_1, v \neq 0} \|\ell(v)\|_2 / \|v\|_1$ .

$\Delta$  **Remarque 1.3.** La continuité de l'application linéaire  $\ell$  énonce un résultat de stabilité. Si  $v$  est remplacé par  $v + \delta v$  avec  $\delta v$  petit, alors  $w = \ell v$  est remplacé par  $w + \delta w$  avec  $\delta w = \ell(\delta v)$  vérifiant

$$\|\delta w\| \leq \|\ell\| \|\delta v\|.$$

Suivant le modèle de la boîte noire du prologue, une petite variation  $\delta v$  de la donnée en entrée  $v$  entraîne une variation contrôlée de la donnée en sortie  $w$ , avec un contrôle de l'erreur  $\|\delta w\|$  par un facteur  $\|\ell\|$  indépendant de la donnée en entrée  $v$  et de sa variation  $\delta v$ .  $\nabla$

*Démonstration.* — Tout voisinage de  $v_0$  dans  $(E, \|\cdot\|)$  contient le translaté  $B(v_0, r)$  de la boule  $B(r)$ . Notons par  $B_i(r), i = 1, 2$  la boule de rayon  $r$  centrée au vecteur nul dans l'espace  $E_i$ .

Ainsi l'application  $\ell$  est continue en  $v \in E_1$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que tout  $w$  de la boule  $v + B_1(\alpha)$  a son image  $\ell(w)$  dans la boule  $\ell(v) + B_2(\varepsilon)$ . Si  $w = v + e$ , alors  $\ell(v + e) - \ell(v) = \ell(e)$ , ainsi la continuité en  $v$  est équivalente en la continuité de  $\ell$  au vecteur nul. Par compatibilité de la norme et des applications linéaires avec les homothéties, on a

$$B_1(\varepsilon r) = \varepsilon B_1(r), \quad \ell(\varepsilon B_1(r)) = \varepsilon \ell(B_1(r))$$

ainsi, la linéarité de  $\ell$  à l'origine donne, pour  $\varepsilon = 1$  l'existence d'une constante  $\alpha > 0$  tel que

$$\ell(B_1(\alpha)) = \alpha \ell(B_1(1)) \subset B_2(1),$$

soit en posant  $M = \alpha^{-1}$

$$\|\ell(v)\|_2 \leq M, \quad \|v\|_1 \leq 1,$$

ou, par homogénéité,

$$\|\ell(v)\|_2 \leq M\|v\|_1, \quad v \in E,$$

condition qui entraîne la continuité en  $v = 0$  vu que

$$\ell(B_1(M^{-1}\varepsilon)) \subset B_2(\varepsilon). \quad \square$$

En dimension finie, la situation est simple

**Théorème\* 1.2.** *Si  $E_1$  est de dimension finie, toute application linéaire de  $(E_1, \|\cdot\|_1)$  dans  $(E_2, \|\cdot\|_2)$  est continue*

En dimension infinie, les situations sont variées Soit  $\mathcal{C}^1([-1, 1])$  l'espace des applications continues, dérivables et à dérivée continue sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , avec les normes

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [-1, 1]} |f(t)|, \quad \|f\|_{[1]} = |f(0)| + \sup_{t \in [-1, 1]} |f'(t)|$$

La forme linéaire  $L$  qui à  $f \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$  associe  $L(f) = f'(0)$  est continue comme application de  $(\mathcal{C}^1([-1, 1]), \|\cdot\|_{[1]})$  dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  vu que

$$|f'(0)| \leq \|f\|_{[1]}, \quad f \in \mathcal{C}^1([-1, 1]),$$

alors qu'elle ne l'est pas sur  $(\mathcal{C}^1([-1, 1]), \|\cdot\|_\infty)$  : pour la suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $s_n(t) = \sin(nt)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $L(s_n) = n$  et  $\|s_n\|_\infty = 1$ , ainsi il n'existe pas de constante  $M$  telle que  $|L(f)| \leq M\|f\|_\infty$ ,  $f \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$ .

**Proposition 1.1.** *Soient  $(E_1, \|\cdot\|_1)$  et  $(E_2, \|\cdot\|_2)$  deux espaces vectoriels normés. L'espace  $\mathcal{L}(E_1, E_2)$  des applications linéaires continues de  $(E_1, \|\cdot\|_1)$  dans  $(E_2, \|\cdot\|_2)$  muni de la norme définie par*

$$\|\ell\| = \sup_{v \in E_1, v \neq 0} \frac{\|\ell(v)\|_2}{\|v\|_1}, \quad \ell \in \mathcal{L}(E_1, E_2),$$

*est un espace vectoriel normé.*

*Démonstration.* — Vu les inégalités

$$\|(\ell + \ell')(v)\|_2 \leq \|\ell(v)\|_2 + \|\ell'(v)\|_2 \leq (\|\ell\|_2 + \|\ell'\|_2)\|v\|_1, \quad \|\alpha\ell(v)\|_2 = |\alpha| \|\ell(v)\|_2,$$

la somme  $\ell + \ell'$  de deux applications linéaires continues est continue, avec  $\|\ell + \ell'\| \leq \|\ell\| + \|\ell'\|$ , ainsi que le produit  $\alpha\ell$  par le scalaire  $\alpha$  avec  $\|\alpha\ell\| = |\alpha| \|\ell\|$ . Les propriétés de norme de l'application  $\ell \in \mathcal{L}(E_1, E_2) \rightarrow \|\ell\| \in \mathbb{R}$  sont alors aisément vérifiées.  $\square$

$\triangleright$  **Exemple 1.3.** Une application linéaire  $\ell$  de  $\mathbb{C}^n$  dans lui-même est donnée par la matrice  $(\ell_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Pour  $v = (v_1, \dots, v_n)$ ,

$$\|\ell v\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n \ell_{ij} v_j \right| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\ell_{ij}| \|v\|_\infty$$

avec égalité pour  $v_0 = (\varepsilon_{i_0 j})$  où  $i_0$  est un entier tel que  $\sum_{j=1}^n |\ell_{i_0 j}| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\ell_{ij}|$  et  $\varepsilon_{i_0 j}$ ,  $j = 0, \dots, n$  vaut  $e^{-i \operatorname{Arg} \ell_{i_0 j}}$  ou 0 suivant que  $\ell_{i_0 j}$  est non nul ou nul. Ainsi, l'application linéaire  $\ell$  a pour norme  $\|\ell\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\ell_{ij}|$ .  $\triangleleft$

## 1.4. Exercices

1. Pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on définit trois normes

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

Montrer que

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq n \|x\|_\infty \leq n \|x\|_1, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

2. Soit  $\ell_f(\mathbb{R})$  l'espace des suites  $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de réels nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux.

(a) Montrer que les trois fonctions suivantes

$$\|u\|_1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} |u_i|, \quad \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{N}} |u_i|^2}, \quad \|u\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |u_i|, \quad u \in \ell_f$$

définissent des normes sur  $\ell_f(\mathbb{R})$ .

(b) Pour  $N'$  et  $N''$  deux quelconques de ces normes, existe-t-il, ou pas, une constante  $C$  telle que

$$N'(u) \leq CN''(u), \quad u \in \ell_f(\mathbb{R}).$$

3. (a) Soient  $x, y \in \mathbb{C}^n$ . En écrivant que le discriminant du trinôme du second degré  $T_{x,y}(\lambda) = \|x + \lambda y\|_2^2$  est positif pour tout  $\lambda$  réel, montrer que

$$\left| \Re \left( \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \right) \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2} = \|x\|_2 \|y\|_2.$$

(b) Dédurre de la question précédente une preuve de l'inégalité triangulaire

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2, \quad x, y \in \mathbb{C}^n,$$

puis que  $\|\cdot\|_2$  définit bien une norme sur  $\mathbb{C}^n$ .

4. Soit  $\mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus  $n$ . Soit  $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$  une famille de réels tous distincts.

(a) Montrer que l'application

$$N_{\mathbf{x}} : P \in \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \sup\{|P(x_i)|, i = 0, \dots, n\}$$

définit une norme sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

(b) Soit  $L_i$  le  $i$ ème polynôme d'interpolation de Lagrange défini par

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

Montrer que pour tout  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$

$$P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i.$$

En déduire que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , il existe une constante  $C_z > 0$  telle que

$$|P(z)| \leq C_z N_{\mathbf{x}}(P), \quad P \in \mathbb{R}_n[X].$$

5. Soit  $\mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

(a) Montrer que l'application

$$N : P \in \mathbb{R}[X] \rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{|P^{(n)}(0)|}{n!}$$

définit une norme sur  $\mathbb{R}[X]$ .

(b) Soit  $D$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  de dérivation :  $D(P) = P'$ . Calculer  $N(X^k)$  et  $N(D(X^k))$ . En déduire que l'application linéaire  $D$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}[X]$ , muni de la norme définie dans la question précédente.

6. (a) Soit  $M$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$M(u) = \sup(|x + y|, |y|), \quad u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que il existe une norme  $N$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que  $M(u) = N(Au)$  pour tout vecteur  $u \in \mathbb{R}^2$ . En déduire que l'application  $M$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$ . Calculer la matrice inverse  $A^{-1}$  et montrer que la boule  $\{u : M(u) \leq 1\}$  est l'image de la boule  $\{v : N(v) \leq 1\}$  par l'application linéaire  $A^{-1}$ . Dessiner la boule  $B(r) = \{M(x, y) \leq r\}$ .

- (b) Reprendre la question précédente avec

$$M(u) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

7. Soit  $\theta \in [0, 1]$  et soit  $f_\theta$  la fonction définie par  $f_\theta(t) = \sin(2\pi(t - \theta))$ . Calculer le rayon  $r \geq 0$  tel que la boule  $\overline{B}(f_0, r) = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]), \|f - f_0\|_\infty \leq r\}$  contienne la fonction  $f_\theta$ .

8. Soit  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions bornées sur  $\mathbb{R}$  avec la norme  $\| \cdot \|_\infty$  définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|, \quad f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Pour  $\delta > 0$  et  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , on note  $\tau_\delta f$  la fonction définie par  $\tau_\delta f(t) = f(t - \delta)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Montrer que l'application induite  $\tau_\delta$  sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  est linéaire continue. Quelle est sa norme?

9. Soit  $E = \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur  $\mathbb{R}$  et dont chaque dérivée est bornée, muni de la norme  $\| \cdot \|_\infty$  de la convergence uniforme. Montrer que l'application  $\Delta$  de  $E$  dans lui-même définie par

$$\Delta(\varphi) = -\varphi'', \quad \varphi \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$$

est bien définie. Est-elle linéaire? Est-elle continue?

## CHAPITRE 2

# ESPACES FONCTIONNELS ET CONVERGENCES

### 2.1. Espaces normés

La notion de limite dans un espace normé copie celle pour les suites réelles.

**Définition 2.1.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de vecteurs de  $E$  converge vers le vecteur  $v_\infty \in E$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que  $\|v_n - v_\infty\| \leq \varepsilon$  si  $n \geq N$ . On dit que le vecteur  $v_\infty$  est la *limite de la suite*  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$\triangle$  **Remarque 2.1.** Géométriquement, la convergence de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $v_\infty$  signifie que pour tout  $r > 0$ , tout vecteur de la suite  $(v_n - v_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$  (resp.  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ), mis à part un nombre fini de vecteurs, est localisé dans la boule  $B(r) = \{\|v\| < r\}$  de centre le vecteur nul (resp.  $B(v_\infty, r) = \{\|v - v_\infty\| < r\}$  de centre  $v_\infty$ ) et de rayon  $r$ .  $\nabla$

$\triangleright$  **Exemple 2.1.** Reprenons les normes définies sur  $\mathcal{C}([a, b])$  dans l'exemple 1.2.1. On parlera de convergence en moyenne, convergence en moyenne quadratique et convergence uniforme resp.  $\triangleleft$

$\triangle$  **Remarque 2.2.** La notion de limite permet une autre expression de la continuité appelée brièvement dans la Sec. 1.3 du Chap. 1 : l'application  $f$  est continue en  $x_0$  si pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente vers  $x_0$ , alors la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(x_0)$ .  $\nabla$

En dimension finie, par exemple si  $E = \mathbb{C}^d$ , la notion de convergence est indépendante du choix de la norme, comme l'affirme le théorème suivant.

**Théorème\* 2.1.** Soit  $E$  un espace de dimension finie et  $N_1, N_2$  deux normes sur  $E$ . Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $E$ . Alors la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 dans  $(E, N_1)$  si et seulement si elle converge vers 0 dans  $(E, N_2)$ .

Ce théorème est faux en dimension infinie : la notion de convergence dans les espaces fonctionnels dépend de manière subtile de la norme.

$\triangleright$  **Exemple 2.2.** Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1])$  l'espace des fonctions continues sur l'intervalle fermé  $[0, 1]$  et les normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$  définies sur  $E$  par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$$

La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $f_n(t) = t^n, t \in [0, 1]$  converge vers la fonction nulle dans  $(E, \|\cdot\|_1)$ , mais pas dans  $(E, \|\cdot\|_\infty)$  :  $\|f_n\|_1 = 1/(n+1), \|f_n\|_\infty = 1$ . Néanmoins, vu que  $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$  pour tout  $f \in E$ , si une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $v_\infty$  suivant la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , elle converge aussi vers  $v_\infty$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$ .  $\triangleleft$

**Définition 2.2.** La partie  $A$  de  $E$  est dite *dense* dans  $E$  si tout vecteur  $e$  de  $E$  est limite d'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$ .

L'espace  $E$  est dit *séparable* si  $E$  admet une partie dénombrable dense.

▷ **Exemple 2.3.** Les rationnels (ainsi que les irrationnels) constituent une partie dense de  $\mathbb{R}$ . Plus généralement, la partie  $Q$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  à coefficients rationnels est dense dans  $\mathbb{R}^n$ , qui est donc séparable. ◁

**Théorème 2.2.** Soit  $\mathcal{C}([a, b])$  l'espace des fonctions continues sur le segment  $[a, b]$ , muni de la norme de la convergence uniforme :  $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ .

L'espace  $\mathcal{C}([a, b])$  admet comme sous-espaces denses

- l'espace des fonctions affines par morceaux,
- (Weierstrass) l'espace des fonctions polynômes.

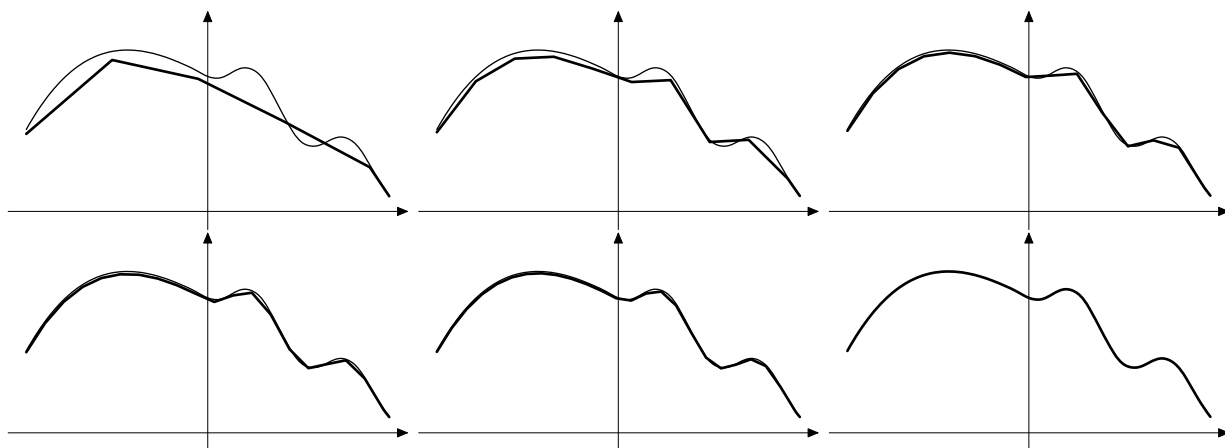


FIGURE 4 . Approximations d'une fonction continue par des fonctions continues affines par morceaux avec  $N = 5, 10, 15, 20, 25, \infty$  segments.

*Démonstration.* — La première partie est illustrée par la figure 4. Pour  $f$  continue sur  $[-1, 1]$  on introduit le polynôme  $P_n$ , dit de Bernstein, défini par

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par continuité uniforme de  $f$  sur l'intervalle fermé  $[0, 1]$ , il existe  $\delta > 0$  tel que si  $|t - t'| \leq \delta$ , alors  $|f(t) - f(t')| \leq \varepsilon$ . Alors, dans la décomposition

$$(3) \quad P_n(t) - f(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right) t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{|k/n-t| \leq \delta} + \sum_{|k/n-t| > \delta}, \quad t \in [0, 1],$$

la première somme du second membre est majorée en module par  $\varepsilon \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \varepsilon$ . Le second terme est majoré en module par  $2\|f\|_\infty S(\delta, t, n)$  avec

$$\delta^2 S(\delta, t, n) = \delta^2 \sum_{\substack{k=0, \dots, n \\ |k/n-t| > \delta}} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - t\right)^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \frac{t(1-t)}{n} \leq \frac{1}{4n}.$$

L'avant dernière inégalité exige le calcul des sommes  $\sum_{k=0}^n k^p \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ ,  $p = 1, 2$ , obtenu en différenciant par rapport à  $t$  l'identité  $(t+1-u)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-u)^{n-k}$ . Ainsi

$$|P_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}, \quad t \in [0, 1],$$

où le terme de gauche est majoré par  $2\varepsilon$  pour  $n$  suffisamment grand, ce qui achève la preuve de la densité des fonctions polynomiales dans  $\mathcal{C}([0, 1])$ . La cas général de  $\mathcal{C}([a, b])$  s'y ramène par une bijection affine entre  $[0, 1]$  et  $[a, b]$  qui transforme toute fonction polynomiale en une fonction de même nature. ◻

△ **Remarque 2.3.** Les courbes de Bézier sont des courbes polynomiales par morceaux. Leur généralisation pour décrire des surfaces est un élément essentiel des logiciels de conception assistée par ordinateur, en construction automobile par exemple. ▽

**Corollaire 2.1.** L'espace  $\mathcal{C}([a, b])$  est séparable.

*Démonstration.* — L'espace des polynômes à coefficients rationnels de Gauss (*i. e.* de la forme  $p+iq$  avec  $p, q$  rationnels) est dénombrable : c'est un sous-espace dense des polynômes à coefficients complexes, et donc d'après le théorème précédent de  $\mathcal{C}([a, b])$ .

On aurait pu argumenter avec l'espace des fonctions affines par morceaux, avec des discontinuités de la dérivées aux points  $a + rb$  avec  $r \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

Un autre corollaire du théorème de Weierstrass concerne la densité des polynômes trigonométriques. Un *polynôme trigonométrique* de période  $T$  est une fonction de la forme  $P(e^{2i\pi t/T}, e^{-2i\pi t/T}) = L(1, \cos(2\pi t/T), \dots, \cos(2\pi nt/T), \dots, \sin(2\pi t/T), \dots, \sin(2\pi nt/T), \dots)$  avec  $P$  polynôme et  $L$  forme linéaire à un nombre fini de variables.

**Théorème 2.3.** *Pour la norme de la convergence uniforme, le sous-espace des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace  $\tilde{\mathcal{C}}([0, T])$  des fonctions continues  $f$  sur  $[0, T]$  avec  $f(0) = f(T)$ .*

*Démonstration.* — On dira qu'une fonction  $f$  de  $\tilde{\mathcal{C}}([0, T])$  est paire (impaire resp.) si son prolongement  $T$ -périodique à  $\mathbb{R}$  l'est. Soit  $\varepsilon > 0$ . Si  $f$  est une fonction paire et  $F$  désigne la fonction définie par  $F(x) = f(T \arccos(x)/2\pi)$ ,  $x \in [0, 1]$ , d'après le théorème de Weierstrass (Thm. 2.2), il existe un polynôme  $p_f$  tel que  $\|F - p_f\|_{\mathcal{C}([0, 1])} \leq \varepsilon$ . Ainsi

$$|f(t) - p_f(\cos(2\pi t/T))| \leq \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}.$$

soit  $\|f - p\|_{\tilde{\mathcal{C}}([0, T])} \leq \varepsilon$  pour un certain polynôme trigonométrique  $p$ .

Soit  $f$  une fonction quelconque dans  $\tilde{\mathcal{C}}([0, T])$ . En considérant sa décomposition  $f = f_+ + f_-$  en fonction paire et impaire ( $f_+(t) = (f(t) + f(-t))/2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ), on a l'existence de deux polynômes trigonométriques  $p_+$  et  $p_-$  tels que

$$\|f_+ - p_+\|_{\tilde{\mathcal{C}}([0, T])} \leq \varepsilon, \quad \|f_- \sin(2\pi t/T) - p_-\|_{\tilde{\mathcal{C}}([0, T])} \leq \varepsilon,$$

et par suite

$$|f(t) \sin(2\pi t/T)^2 - p_+(t) \sin(2\pi t/T)^2 - p_-(t) \sin(2\pi t/T)| \leq 2\varepsilon, \quad t \in [0, T].$$

En considérant la fonction  $g$  définie par  $g(t) = f(t + T/4)$ , on obtient pareillement l'existence de deux polynômes trigonométriques  $q_+, q_-$  tel que

$$|f(t + T/4) \sin(2\pi t/T)^2 - q_+(t) \sin(2\pi t/T)^2 - q_-(t) \sin(2\pi t/T)| \leq 2\varepsilon, \quad t \in [0, T].$$

En ajoutant la seconde inégalité évaluée en  $t - T/4$  à la première on obtient

$$|f(t) - p_+(t) \sin(2\pi t/T)^2 - p_-(t) \sin(2\pi t/T) - q_+(t - T/4) \cos(2\pi t/T)^2 + q_-(t - T/4) \cos(2\pi t/T)| \leq 4\varepsilon, \quad t \in [0, T],$$

ce qui permet de conclure.  $\square$

## 2.2. Espaces complets

L'espace  $\mathbb{R}$ , de même que  $\mathbb{C}$ , a une propriété, dite de complétude, que l'espace  $\mathbb{Q}$  n'a pas : on sait qu'il manque des éléments à  $\mathbb{Q}$  (par ex.  $\sqrt{2}$ ). Cette propriété est fondamentale pour l'analyse (étude de convergence de suites, des propriétés des fonctions) et peut s'exprimer sous diverses formes : la propriété de borne supérieure (toute partie majorée non vide de  $\mathbb{R}$  possède un plus grand élément), la propriété des segments emboîtés (toute suite d'intervalles  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  avec  $b_n - a_n \rightarrow 0$  admet une intersection réduite à un unique élément) ou la convergence de toute suite de Cauchy.

La notion de complétude d'un espace normé se formule à partir de la notion de suite de Cauchy (qui dans le cas de la dimension  $d = 1$  est bien celle de  $\mathbb{R}$ ).

**Définition 2.3.** La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de vecteurs de  $E$  est dite *suite de Cauchy* si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N > 0$  tel que  $\|v_p - v_q\| < \varepsilon$  pour  $p, q > N$ .

L'espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  est dit *complet* ou de Banach si toute suite de Cauchy de  $E$  est convergente dans  $E$ .

△ **Remarque 2.4.** Une suite convergente  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de limite  $v_\infty$  est de Cauchy : si pour  $\varepsilon$  on choisit  $N$  tel que  $\|v_n - v_\infty\| \leq \varepsilon/2$  pour  $n \geq N$ , on a bien  $\|v_p - v_q\| \leq \|v_p - v_\infty\| + \|v_\infty - v_n - \| \leq \varepsilon$  pour  $p, q > N$ .

Mais une suite de Cauchy n'est pas en général convergente. La remarque 2.5 ci-dessous donne un tel exemple, à rechercher nécessairement en dimension infinie d'après la proposition suivante. <sup>(1)</sup> ▽

En dimension finie, on a la même situation que pour  $\mathbb{R}$ .

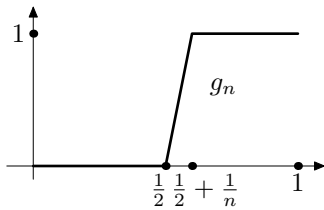
**Proposition\* 2.1.** *Tout espace normé  $(E, N)$  de dimension finie est complet.*

L'espace  $\mathcal{C}([a, b])$  des fonctions continues sur le segment borné  $[a, b]$  muni de la norme  $\| \cdot \|_\infty$  de la convergence uniforme est complet.

*Démonstration.* — La preuve que l'espace  $\mathbb{R}^N$  normé par la norme  $\| \cdot \|_\infty$  est complet repose sur la propriété de complétude de  $\mathbb{R}$ . La preuve pour  $\mathcal{C}([a, b])$  doit être vue comme une généralisation de ce cas où l'espace  $\mathbb{R}^n$  est considéré comme l'espace des fonctions continues (!) de l'ensemble fini  $\{1, \dots, n\}$  dans  $\mathbb{R}$  : il faut bien sûr vérifier que la limite d'une suite de Cauchy est bien une fonction continue.

Le cas de l'espace de dimension finie  $(E, N)$  est traité en se ramenant à  $(\mathbb{R}^{\dim E}, \| \cdot \|_\infty)$  par le choix d'une base dans  $E$  qui induit un isomorphisme continu, ainsi que son inverse, de  $(E, N)$  sur  $(\mathbb{R}^{\dim E}, \| \cdot \|_\infty)$ . □

△ **Remarque 2.5.** Un espace normé de dimension infinie n'est pas nécessairement complet : si l'espace  $\mathcal{C}([0, 1])$  des fonctions continues sur  $[0, 1]$  muni de la norme de la convergence uniforme  $\| \cdot \|_\infty$  est complet, ce même espace muni de la norme  $\| \cdot \|_1$  de l'exemple 2.2 n'est pas complet : la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par



$$g_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1/2, \\ n(t - 1/2), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1/2 + 1/n, \\ 1, & \text{si } x > 1/2 + 1/n, \end{cases}$$

est de Cauchy dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  relativement à la norme  $\| \cdot \|_1$  (on vérifie  $\|g_{p+q} - g_p\|_1 = p/(2q(p+q))$ ), sans y être convergente. Considérée dans  $L^1(0, 1)$ , la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y est convergente avec limite la fonction en escalier  $g_\infty$  valant 0 si  $t < 1/2$ , 1 sinon. ▽

**Théorème 2.4.** *Si l'espace normé  $E$  est complet, l'espace  $\mathcal{L}(E)$  des endomorphismes continus de  $E$  est complet.*

*Démonstration.* — Soit  $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $\mathcal{L}(E)$ . Pour tout vecteur  $v \in E$ , vu  $\|\ell_n(v)\| \leq \|\ell_n\| \|v\|$ , la suite  $(\ell_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy et, par suite, convergente dans l'espace de Banach  $E$  : si  $\ell_\infty(v)$  note sa limite, la linéarité de  $\ell_\infty$  résulte des propriétés de linéarité de la limite

$$\ell_\infty(\alpha v + \beta w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\alpha v + \beta w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \ell_n(v) + \beta \ell_n(w) = \alpha \ell_\infty(v) + \beta \ell_\infty(w).$$

Alors, étant donné  $\varepsilon > 0$ , pour  $p$  et  $q$  assez grands, la majoration  $\|\ell_p - \ell_q\| \leq \varepsilon$  implique  $\|(\ell_p - \ell_q)(v)\| \leq \varepsilon \|v\|$ , soit en faisant tendre  $q$  vers l'infini,  $\|(\ell_p - \ell_\infty)(v)\| \leq \varepsilon \|v\|$  et donc  $\|\ell_p - \ell_\infty\| \leq \varepsilon$  :  $\ell_p$  converge vers  $\ell_\infty$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . □

<sup>(1)</sup>L'exemple de la suite d'approximations rationnelles de  $\sqrt{2}$ , non convergente dans  $\mathbb{Q}$ , donne un exemple de suite de Cauchy dans  $\mathbb{Q}$  non convergente : cet exemple, qui oppose  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$  en terme de complétude n'est pas retenu ici, car  $\mathbb{Q}$  n'est pas un espace normé !



### 2.3. L'espace de Schwartz $\mathcal{S}$

Commençons par la définition de fonction s'annulant fortement à l'infini, ou, autrement dit, à décroissance rapide :

**Définition 2.4.** Une fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs complexes est dite à *décroissance rapide* si pour tout entier  $n$ , il existe une constante  $C_n$  telle que

$$|\varphi(t)| \leq \frac{C_n}{(1+|t|)^n}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On a alors la définition de l'espace de Schwartz

**Définition 2.5.** Une fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs complexes est dite *de Schwartz* si elle est indéfiniment différentiable et si elle est à décroissance rapide, ainsi que toutes ses dérivées. L'ensemble de telles fonctions constitue l'espace de Schwartz, noté  $\mathcal{S}$  (voire  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  pour insister sur le caractère unidimensionnel de l'espace de définition des fonctions).

▷ **Exemples 2.4.**

1. La *gaussienne*  $\gamma$  définie par  $\gamma(t) = e^{-t^2}$  est de Schwartz. En effet, pour  $m$  entier,

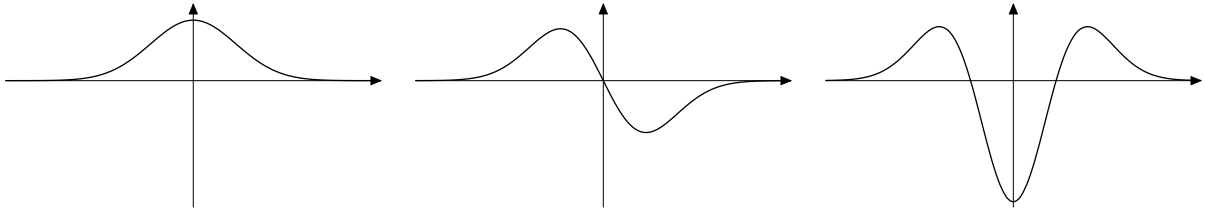


FIGURE 5 . La gaussienne  $\gamma$  et ses deux premières dérivées.

- $t^m e^{-t^2} \rightarrow 0$  lorsque  $|t| \rightarrow \infty$ . On en déduit que  $(1+|t|)^n \gamma(t)$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  : la fonction  $\gamma$  est à décroissance rapide. La gaussienne  $\gamma$  est indéfiniment dérivable et, pour tout entier  $k$ , sa dérivée  $\gamma^{(k)}$  d'ordre  $k$  est de la forme  $P_k \gamma$  pour un certain polynôme  $P_k$  : on en déduit que  $\gamma^{(k)}$  est à décroissance rapide, et donc que  $\gamma$  est de Schwartz.
2. Toute fonction indéfiniment différentiable sur  $\mathbb{R}$  à support borné (*i. e.* il existe  $A > 0$  tel que  $\varphi(t) = 0$  si  $|t| > A$ ) est de Schwartz : la fonction  $\varphi$  telle que  $\varphi(t) = e^{1/(t^2-1)}$  si  $|t| < 1$  et nulle sinon, en est une.
  3. Soit  $\varphi_T$  la translatée de  $\varphi$  définie par  $\varphi_T(t) = \varphi(t-T)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . La fonction  $\varphi_T$  est de Schwartz si et seulement si  $\varphi = (\varphi_T)_{-T}$  l'est. ◁

Sur l'espace  $\mathcal{S}$  est définie la famille indexée par  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  de normes  $\|\cdot\|_{m,n}$

$$\|\varphi\|_{m,n} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi^{(m)}(t)(1+|t|)^n|, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

**Définition 2.6.** La suite  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de fonctions de  $\mathcal{S}$  converge dans  $\mathcal{S}$  vers  $\varphi_\infty \in \mathcal{S}$  si pour chaque  $(m, n)$ , la suite réelle  $(\|\varphi_k - \varphi_\infty\|_{m,n})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 dans  $\mathbb{R}$ .

△ **Remarque 2.6.** On montre l'impossibilité à définir une norme  $N$  sur  $\mathcal{S}$  qui suffise à exprimer cette convergence à elle seule : il n'existe pas de norme  $N$  telle que  $\varphi_k \rightarrow \varphi_\infty$  dans  $\mathcal{S}$  si et seulement si  $N(\varphi_k - \varphi_\infty) \rightarrow 0$ . ◁

Géométriquement, la suite  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\varphi_\infty \in \mathcal{S}$  si, pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  et  $r > 0$ , mise à part un nombre fini de vecteurs (dépendant de  $(m, n)$  et  $r$ ), tous les vecteurs  $\varphi_k - \varphi_\infty$  sont dans le voisinage du vecteur nul de  $\mathcal{S}$  donné par la boule

$$B_{m,n}(r) = \{\|\varphi\|_{m,n} < r\}.$$

L'ensemble des boules  $(B_{m,n}(r))_{m,n \in \mathbb{N}, r > 0}$  constitue une base de voisinages du vecteur nul de  $\mathcal{S}$  : une partie  $V \subset \mathcal{S}$  est un voisinage de  $\varphi \in \mathcal{S}$  si  $V$  contient la translatée  $\varphi + B_{m,n}(r)$  pour des  $m, n, r$  convenables.

## 2.4. Convergences fonctionnelles

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions bornées définies sur  $\mathbb{R}$ . Elle a de multiples façons de converger (éventuellement) vers une fonction  $f$ .

Déterminer un type de convergence peut revenir au choix d'une espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  qui contient tous les  $f_n$ . Au contraire de la dimension finie, le choix d'un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  est crucial. Autrement dit, les convergences ne sont pas toutes équivalentes.

La convergence d'une suite de fonctions de Schwartz est d'un autre type : il faut vérifier la convergence relativement à une famille dénombrable de normes, les  $\|\cdot\|_{m,k}$ . La convergence est peut-être un peu plus compliquée, à cause de cette infinité de normes, en fait pas tant que cela avec un peu d'expérience (les fonctions de Schwartz sont gentilles).

Il y a une convergence, la convergence simple *convergence simple*, qui ne peut être définie par aucune norme

**Définition 2.7.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur un ensemble  $I$  et à valeurs complexes. La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  si, pour tout  $t \in I$ , la suite numérique  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f(t)$ .

La définition est simple, si simple qu'on en viendrait à l'oublier dans un cours de topologie des espaces vectoriels, souvent trop simple pour être source d'affirmations un peu générales.

### ▷ Exemples 2.5.

1. Soit  $v_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $v_n(t) = \chi(t - n)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , où  $\chi$  est le signal carré défini par  $\chi(t) = 1$  si  $t \in [0, 1]$ , 0 sinon. La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers la fonction nulle, mais on n'a pas convergence de l'intégrale de  $v_n$  vers l'intégrale de la limite simple :  $\int_{\mathbb{R}} v_n(t) dt = 1 \neq 0$ .
2. Soit  $w_n$  la fonction définie par  $w_n(t) = n\chi(nt)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . La suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}^*$ , mais on a encore  $\int_{\mathbb{R}} w_n(t) dt = 1 \neq 0$ .  $\triangleleft$

Très souvent, il est constaté une convergence simple avant une convergence plus forte (uniforme avec la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$ , en moyenne avec  $\|\cdot\|_1, \dots$ ). Mais ce n'est pas toujours le cas : les rapports entre les divers types de convergence peuvent être inattendus (avec souvent des exemples délicats à construire), mais en général un peu de soin permet d'établir le type de convergence désiré.

## 2.5. Exercices

N.B. : à chaque exercice impliquant une suite  $(F_n)_{n \geq 1}$  de fonctions, on commencera pas esquisser, sur une même figure, le graphe des fonctions  $F_1, F_2, F_3, \dots$

1. Soit  $G$  la partie de  $\mathbb{C}^n$  des vecteurs  $(p_1 + iq_1, \dots, p_n + iq_n)$  avec  $p_j, q_j, j = 1, \dots, n$  rationnels. Montrer que  $G$  est dense dans  $\mathbb{C}^n$ .
2. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies par  $f_n(t) = \text{sinc}(nt)e^{-nt^2}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la suite  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite, que l'on notera  $f_{\infty}(t)$ . La fonction  $f_{\infty}$  est-elle continue ?
  - (b) Comparer les limites  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} f_n(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_{\infty}(t)$ . Qu'en conclure sur la convergence uniforme de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $[-1, 1]$  ?

3. Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  la suite de fonctions définie par  $f_n(t) = \sqrt{t^2 + n^{-2}}$ ,  $t \in [-1, 1]$ .

Montrer que la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy dans l'espace  $\mathcal{C}([-1, 1])$  muni de la convergence uniforme, *i. e.* pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie par

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{t \in [-1, 1]} |\varphi(t)|, \quad \varphi \in \mathcal{C}([-1, 1]).$$

En est-il de même dans l'espace  $\mathcal{C}^1([-1, 1])$  des fonctions continûment différentiables sur  $[-1, 1]$  muni de la norme  $\|\cdot\|_1$  définie par

$$\|\varphi\|_1 = \|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty, \quad \varphi \in \mathcal{C}^1([-1, 1])?$$

4. Soit  $h_n$  définie sur  $[0, 1]$  par  $h_n(t) = 1/(1 + (2t)^n)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Montrer que la suite  $(h_n)_{n \geq 1}$  converge simplement vers une limite  $h$  à préciser. La suite de fonction  $(h_n)_{n \geq 1}$  converge-t-elle vers  $h$  en norme uniforme? En norme  $\|\cdot\|_1$ ?

5. Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  à support borné.

(a) Soit, pour  $h > 0$ , la fonction  $f_h$  définie par

$$f_h(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f(x) dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que  $f_h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , à support borné et que, pour la norme de la convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$ , il y a convergence  $f_h \rightarrow f$  lorsque  $h \rightarrow 0^+$ .

*On pourra utiliser la continuité uniforme de  $f$  : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que, si  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  vérifient  $|x_1 - x_2| \leq \alpha$ , alors  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$ .*

(b) Soit  $k$  un entier. Montrer qu'il existe une suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  pour la norme de la convergence uniforme.

6. Soit  $\gamma$  la gaussienne définie par  $\gamma(t) = e^{-t^2}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

(a) Montrer que, pour tout entier  $k$ , la fonction  $\gamma_k$  avec  $\gamma_k(t) = t^k \gamma(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  est à décroissance rapide. En déduire que  $P\gamma$  est à décroissance rapide pour tout polynôme  $P$ .

(b) Déduire de la question précédente que  $Q\gamma$  est de Schwartz pour tout polynôme  $Q$ .

7. Soit  $\varphi$  une fonction de Schwartz d'intégrale nulle :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) du = 0$ . Montrer que la fonction  $\psi$  définie par

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(u) du, \quad t \in \mathbb{R},$$

est bien définie et de Schwartz.

*On pourra remarquer  $\int_{-\infty}^t \varphi(u) du = -\int_t^{+\infty} \varphi(u) du$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .*

8. Soit  $T \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $P$  un polynôme d'une variable. Si  $\varphi$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , on définit les fonctions  $\tau_T \varphi$ ,  $H_a \varphi$ ,  $\check{\varphi}$  et  $P\varphi$  par

$$\tau_T \varphi(t) = \varphi(T - t), \quad H_a \varphi(t) = \varphi(at), \quad \check{\varphi}(t) = \varphi(-t), \quad P\varphi(t) = P(t)\varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que toutes ces fonctions sont de Schwartz si  $\varphi$  l'est.

9. Si  $T$  est un endomorphisme de l'espace normé  $E$ , on dit que  $\lambda$  est valeur propre de  $T$  s'il existe un vecteur  $v$  non nul de  $E$  tel que  $Tv = \lambda v$ . Montrer que toute valeur propre  $\lambda$  d'un opérateur continu  $T$  vérifie  $|\lambda| \leq \|T\|$ .

10. (a) Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'une norme  $\| \cdot \|$ , et  $\mathcal{L}(E)$  l'espace des endomorphismes de  $E$  muni de la norme induite : si  $\ell \in \mathcal{L}(E)$

$$\|\ell\| = \sup_{v \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\ell(v)\|}{\|v\|}.$$

Soit  $\ell \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\|\ell\| < 1$ . Montrer que la suite  $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$  telle que  $s_N = \sum_{n=0}^N \ell^n$  est de Cauchy. Si on note  $\sigma$  sa limite; montrer que  $\sigma(1 - \ell) = 1$ .

(b) Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1])$  muni de la norme de la convergence uniforme. Soit  $K$  une fonction continue sur  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Montrer que l'application

$$f \in E \rightarrow \left( t \rightarrow f(t) + \lambda \int_0^1 K(t, \tau) f(\tau) d\tau \right)$$

définit un endomorphisme continu de  $E$  dans lui-même, qui est inversible pour  $\lambda$  assez petit.

*On pourra admettre l'existence d'une constante  $C$  telle que  $|K(t, \tau)| \leq C$ ,  $(t, \tau) \in [0, 1]^2$ .*

## CHAPITRE 3

# SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES ET SÉRIES DE FOURIER

Une série trigonométrique est une série de la forme

$$(4) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n t/T}, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \cos(2\pi n t/T) + b_n \sin(2\pi n t/T)),$$

la seconde forme étant plus adaptée à des fonctions réelles (somme d'une partie paire et impaire) : d'ailleurs, on passe d'une expression à l'autre via les relations  $a_0 = c_0$  et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = c_n + c_{-n}$  et  $b_n = i(c_n - c_{-n})$ .

Le type de convergence (*i. e.* le choix de l'espace fonctionnel avec sa topologie) de cette série est une des questions de la théorie des séries trigonométriques : une série peut converger au sens  $L^2$ , mais pas au sens  $\mathcal{C}^0$  par ex. Ainsi, est-il important de préciser dans quel espace sont considérées les séries (4).

Les séries (4) définissent des fonctions  $T$ -périodiques sur  $\mathbb{R}$  : toute fonction  $f$  sur  $[a, a+T)$  sera identifiée avec son prolongement  $\tilde{f}$   $T$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  défini par  $\tilde{f}(kT + t) = f(t)$ ,  $t \in [a, a + T)$ . On prendra en général  $a = 0$  pour simplifier, mais il faudra le rétablir pour certaines formules : le prolongement 2-périodique de la fonction  $P_1 : t \rightarrow t^2$  sur  $[-1, 1]$  n'est pas le même que celui de la fonction  $P_2 : t \rightarrow t^2$  définie sur  $[0, 2]$  !

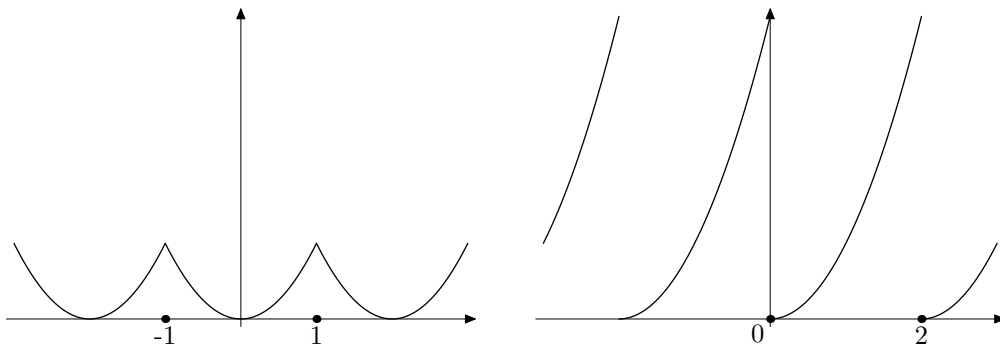


FIGURE 6 . Les graphes des prolongements 2-périodiques  $\tilde{P}_1$  et  $\tilde{P}_2$  des fonctions  $P_1$  et  $P_2$  définies sur  $[-1, 1]$  et  $[0, 2]$  resp. par la même formule analytique  $t \rightarrow t^2$ .

L'autre question de la théorie des séries trigonométriques est celui de la représentation : une fonction est-elle égale à la somme d'une série trigonométrique ? L'examen des fonctions représentées par des séries (4) avec des bonnes propriétés de convergence donne aisément la

forme des coefficients des séries, ce sont les *coefficients de Fourier*

$$(5) \quad \begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi nt/T} dt, \quad n \in \mathbb{Z} \\ a_0(f) &= c_0(f), \\ a_n(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi nt/T) dt, \quad n \in \mathbb{N}^*. \\ b_n(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi nt/T) dt, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

On associe donc à une fonction  $f$  des séries trigonométriques du type (4) avec les coefficients donnés par les formules (5), dont la définition suivant le type de convergence sera étudiée. Il existe une fonction continue  $f$  dont la série de Fourier, bien que convergente, a une somme qui ne coïncide pas avec la fonction  $f$  !

Après avoir montré l'utilisation des séries de Fourier pour analyser la propagation de la chaleur dans une barre homogène, ce chapitre traite les fonctions  $h$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, T]$  : la série de Fourier de  $h$  converge uniformément, avec somme égale à  $h$  et dérivable terme à terme à tout ordre. Le cas de  $f$  continue par morceaux est plus subtil et il n'y a pas de résultats avec des hypothèses optimales : la théorie des séries trigonométriques est distincte de celle des séries de Fourier. En anticipant sur la suite du cours, notons que ces difficultés disparaissent totalement dans le cadre des distributions, où il n'y a que des séries de Fourier.

### 3.1. Équation de la chaleur et séries trigonométriques

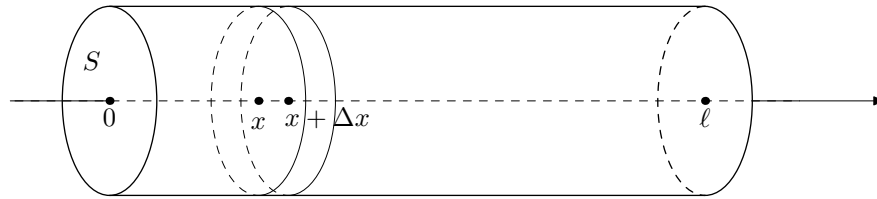


FIGURE 7 . La barre  $B$  de longueur  $\ell$ .

Considérons une barre  $B$  homogène à section cylindrique de longueur  $\ell$ , dont la surface est isolée de l'extérieur. L'axe des abscisses  $Ox$  étant placé suivant l'axe de la barre, on note par  $T(t, x)$  la température à l'instant  $t \geq 0$  sur la section transversale  $S$  de  $B$  d'abscisse  $x \in [0, \ell]$ . Il a été établi expérimentalement que la quantité de chaleur  $Q(x, t)$  s'écoulant durant  $\Delta t$  le long de la barre  $B$  sur la portion  $\Delta B = [x, x + \Delta x] \times S$  de  $B$  est proportionnelle à la différence de température aux extrémités, à l'aire  $s$  de la section de  $B$  et à l'intervalle de temps  $\Delta t$ , inversement proportionnelle à la longueur  $\Delta x$  de la portion  $\Delta B$  de la barre  $B$ . Ainsi

$$Q(x, t) = K \frac{(T(x + \Delta x, t) - T(x, t))s\Delta t}{\Delta x} \simeq_{\Delta x \rightarrow 0} K \frac{\partial T}{\partial x}(x, t)s\Delta t$$

où  $K$  est la constante de conductivité thermique du matériau de  $B$ . Par suite, la quantité de chaleur  $\Delta Q(x, t)$  reçue sur la portion  $\Delta B$  pendant le temps  $\Delta t$  est

$$\begin{aligned} \Delta Q(x, t) &= Q(x + \Delta x, t) - Q(x, t) = Ks\Delta t \left[ \frac{\partial T}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right] \\ &\simeq_{\Delta x \rightarrow 0} Ks\Delta t \Delta x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t). \end{aligned}$$

Par ailleurs, si  $\rho$  est la densité du matériau et  $c$  sa capacité calorifique

$$\Delta Q(x, t) = c\rho s\Delta x [T(x, t + \Delta t) - T(x, t)] \simeq_{\Delta t \rightarrow 0} c\rho s\Delta x \Delta t \frac{\partial T}{\partial t}(x, t)$$

En comparant les deux expressions, avec  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ , on obtient l'équation de la chaleur

$$(6) \quad \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t)$$

avec  $a^2 = K/c\rho$ .

La distribution de température  $T(x, t)$ ,  $x \in [0, \ell]$ ,  $t \geq 0$ , vérifie l'équation (6), avec les conditions aux limites  $T(0, t) = T(\ell, t) = 0$  si les extrémités sont maintenues à température nulle et  $T(x, 0) = T_0(x)$ ,  $x \in [0, \ell]$  si  $T_0$  est la distribution initiale de température.

Si on cherche des solutions  $\hat{T}$  de la forme  $\hat{T}(x, t) = A(x)B(t)$ , on obtient  $A(x)B'(t) = a^2 A''(x)B(t)$ , et par suite, en posant  $-\lambda^2$  la constante  $A''(x)/A(x) = B'(t)/(a^2 B(t))$ , on a

$$A''(x) + \lambda^2 A(x) = 0, \quad B'(t) + a^2 \lambda^2 B(t) = 0$$

La fonction  $A$  est donc de la forme  $A(x) = S \sin(\lambda x) + C \cos(\lambda x)$  et la condition  $A(0) = 0$  à l'extrémité gauche de B donne  $C = 0$  alors que l'autre condition au bord  $A(\ell) = 0$  i. e.  $S \sin \lambda \ell = 0$ , impose  $\lambda$  de la forme  $\lambda_n = \pi n/\ell$  avec  $n$  entier non nul, puisque  $S \neq 0$  (sinon  $A$  serait identiquement nulle). Ainsi, la solution particulière  $\hat{T}$  de (6) est donnée par  $\hat{T}(x, t) = S \sin(n\pi x/\ell) e^{-(a\pi n/\ell)^2 t}$ .

On cherche alors la solution générale de (6) sous la forme de combinaison linéaire de telles solutions particulières

$$T(x, t) = \sum_{n \geq 1} A_n \sin(n\pi x/\ell) e^{-(a\pi n/\ell)^2 t}$$

qui doit vérifier

$$(7) \quad T_0(x) = T(x, 0) = \sum_{n \geq 1} A_n \sin(n\pi x/\ell), \quad x \in [0, \ell].$$

Ce développement de  $T_0$  en sinus a besoin d'être justifié, cela sera fait sous des conditions restrictives dans la remarque 3.3 ci-dessous ; on peut analyser en retour la convergence de la série (7), dérivable terme à terme sur  $[0, \ell]_x \times (0, +\infty)_t$ .

Ces calculs heuristiques pour l'équation de la chaleur incitèrent Fourier à introduire ses séries éponymes : leur théorie mathématique rigoureuse se mit lentement en place à travers les siècles suivants.

### 3.2. Fonctions $T$ -périodiques indéfiniment dérivables

**Théorème 3.1.** *Soit  $h$  une fonction indéfiniment différentiable sur  $[0, T]$  telle que  $h^{(k)}(0) = h^{(k)}(T)$  pour tout entier  $k$ .*

*Alors, la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(h) e^{2i\pi n t/T}$  est normalement convergente sur  $[0, T]$  et*

$$(8) \quad h(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(h) e^{2i\pi n t/T}, \quad t \in [0, T],$$

*la série étant indéfiniment dérivable terme à terme, avec convergence normale à tout ordre.*

*Démonstration.* — En intégrant par parties, on a pour  $n \in \mathbb{Z}^*$ ,

$$c_n(h) = (2i\pi n/T)^{-k} \frac{1}{T} \int_0^T h^{(k)}(t) e^{-2i\pi n t/T} dt$$

d'où la majoration  $|c_n(h)| \leq \sup_{t \in [0, T]} |h^{(k)}(t)| (2\pi |n|/T)^{-k}$ . Il s'ensuit la convergence normale de la série (8), avec une somme dont les coefficients de Fourier coïncident avec ceux de  $h$ .

Pour conclure, il suffit de remarquer qu'une fonction continue sur  $[0, T]$  avec  $h(0) = h(T)$  dont tous les coefficients de Fourier sont nuls est nulle : cela résulte de la densité du sous-espace des polynômes trigonométriques dans  $\tilde{\mathcal{C}}([0, T])$  du Thm. 2.3.  $\square$

△ **Remarque 3.1.** On peut reformuler la proposition précédente pour les développements suivant la famille des sin et cos. Avec les hypothèses

$$(9) \quad h(t) = a_0(h) + \sum_{n>0} (a_n(h) \cos(2\pi nt/T) + b_n(h) \sin(2\pi nt/T)).$$

Par ailleurs, l'hypothèse sur les valeurs de  $h$  et de ses dérivées aux bornes de  $[0, T]$  signifie exactement que le prolongement  $\tilde{h}$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ . ▽

▷ **Exemple 3.1.** En prenant la partie réelle du développement en série entière  $e^z = \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n/n!$  pour  $z = e^{i\theta}$ , on obtient le développement

$$e^{\cos \theta} \cos \sin \theta = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\cos n\theta}{n!}.$$

La Fig. 8 montre quelques approximations d'une fonction périodique lisse sur  $\mathbb{R}$ . ◁

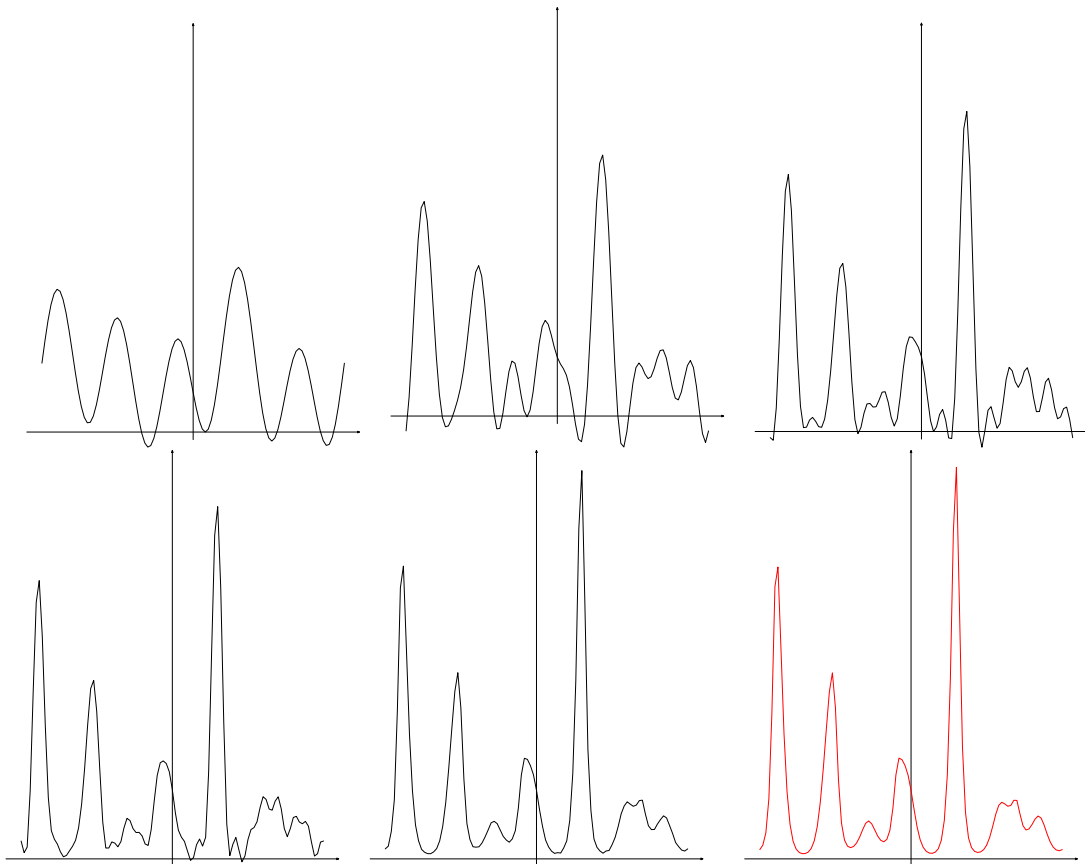


FIGURE 8 . Approximations de  $v(t) = \exp(\cos(7\pi t))/(1.2 + \sin(5\pi t)), t \in [-1, 1]$  par ses séries de Fourier tronquées  $a_0(v) + \sum_{n>0}^N (a_n(v) \cos(2\pi nt) + b_n(v) \sin(2\pi nt))$  pour  $N = 10, 20, 30, 40, 80, \infty$ .

### 3.3. Fonctions $T$ -périodiques continues par morceaux

Avec des hypothèses de continuité seulement sur la fonction  $f$ , on ne peut rien dire en général sur la convergence de la série (8). On a néanmoins le résultat suivant, dû à Dirichlet :

**Théorème\* 3.2.** Soit  $h$  une fonction continue par morceaux sur  $[0, T]$ , i. e. il existe une suite  $0 = a_0 \leq a_1 < \dots < a_q < a_{q+1} = T$  telle que  $h$  soit continue sur  $(a_k, a_{k+1}), k = 0, \dots, q$ . On suppose l'existence de limites à droite  $h(a_k^+)$  et à gauche  $h(a_k^-)$  aux points  $a_k$  et la



dérivabilité de la fonction  $h$  sur les intervalles  $(a_k, a_{k+1}), k = 0, \dots, q$ , avec dérivée majorée uniformément. Alors, pour tout  $t$  dans  $[0, T]$  et en convenant  $0^- = T^+$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n(h) e^{2i\pi nt/T} = \frac{h(t^-) + h(t^+)}{2}.$$

△ **Remarque 3.2.** Ce théorème donne un résultat de localisation : changer les valeurs de la fonction sur un intervalle peut changer les coefficients de Fourier. Néanmoins, si on a les hypothèses de continuité/dérivabilité en un point, la convergence de la série de Fourier en ce point perdure, quel que soit les modifications (raisonnables!) de la fonction en dehors d'un voisinage de ce point. ▽

▷ **Exemple 3.2.** Soit  $f_T$  la fonction  $T$ -périodique définie sur  $[0, T]$  suivant

$$f_T(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t \in (0, T/2], \\ t - T, & \text{si } t \in (T/2, T]. \end{cases}$$

La Fig. 9 représente quelques approximations de  $\tilde{f}_T$  sur  $[-T, T]$  par des séries de Fourier  $s_N$  tronquées au  $N$ -ième terme. Au point de discontinuité  $T/2$ , on a le *phénomène de Gibbs* : on montre l'existence d'une suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $t_n \rightarrow T/2^-$  avec  $\lim s_n(t_n) > f_T(T/2^-)$ .

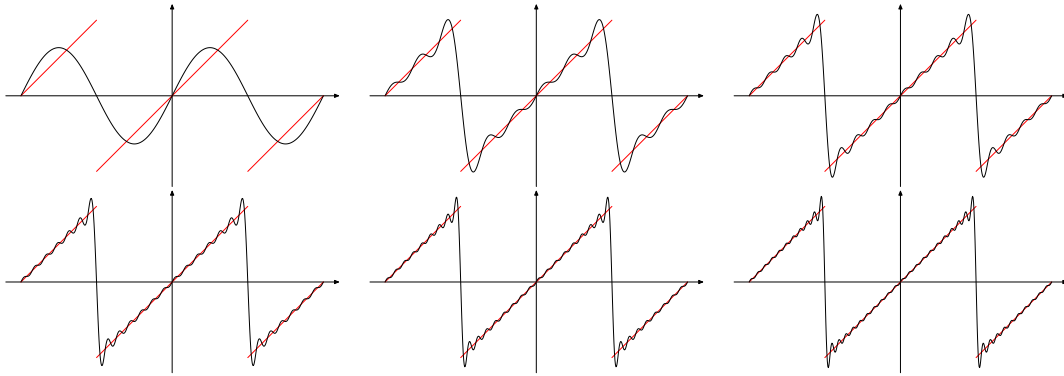


FIGURE 9 . Approximations  $s_N(t) = \frac{T}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(2\pi nt/T)$  de  $f_T$  pour  $N = 1, 5, 9, 13, 17, 21$ .

On a alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T}{2i\pi} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{2i\pi nt/T} = \begin{cases} t, & \text{si } t \in [0, T/2), \\ 0, & \text{si } t = T/2, \\ t - T, & \text{si } t \in (T/2, T]. \end{cases} \quad \triangleleft$$

▷ **Exemple 3.3.** Pour les fonctions  $P_1$  et  $P_2$  de la Fig. 6, on a

$$t^2 = \frac{1}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(\pi nt)}{(\pi n)^2}, \quad t \in [-1, 1],$$

$$t^2 = \frac{4}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi nt)}{(\pi n)^2} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi nt)}{\pi n}, \quad t \in (0, 2),$$

avec en la discontinuité  $t = 0$  de  $P_2$

$$(10) \quad \frac{\tilde{P}_2(0+) + \tilde{P}_2(0-)}{2} = 2 = \frac{4}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^2}.$$

△

▷ **Exemple 3.4.** Soit pour  $z \in \mathbb{C}$  la fonction  $C_z$  1-périodique et vérifiant  $C_z(t) = \cos(2\pi zt)$  pour  $|t| \leq 1/2$ . La fonction  $C_z$  est continue, avec coefficients de Fourier

$$c_n(C_z) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi nt} \cos(2\pi zt) dt = \frac{(-1)^n z \sin \pi z}{\pi (z^2 - n^2)}.$$

Ainsi

$$\cos(2\pi zt) = \frac{z \sin \pi z}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2} e^{2i\pi nt}$$

où la sommation est à interpréter comme la prise de limite  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{-N}^N$ . En particulier, faisant  $t = 1/2$  et  $t = 0$ , on obtient les développements en série

$$\cotg \pi z = \frac{z}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}, \quad \frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2},$$

où les égalités valent entre fonctions méromorphes. ◁

Terminons par les formules générales pour le développement d'une fonction définie sur  $[A, B]$  en série de Fourier. Ayant posé  $T = B - A$ , les coefficients sont donnés par

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_A^B f(t) e^{-2i\pi nt/T} dt$$

pour le développement (8) avec indexation par  $n \in \mathbb{Z}$  et

$$a_0(f) = c_0(f), \quad a_n(f) = \frac{2}{T} \int_A^B f(t) \cos(2\pi nt/T) dt, \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_A^B f(t) \sin(2\pi nt/T) dt$$

pour le (9) où  $n$  parcourt  $\mathbb{N}^*$ .

△ **Remarque 3.3.** Le développement (7), apparu par une résolution heuristique de l'équation aux dérivées partielles (6), est en fait un développement de Fourier. Supposons  $T_0$  continue par morceaux sur  $[0, \ell]$ , avec  $T_0(0) = T_0(\ell) = 0$  conditions au bord du problème étudié dans la section 3.1. Alors la fonction  $\tilde{T}_0$   $2\ell$ -périodique, impaire et telle que  $\tilde{T}_0(x) = T(x)$ ,  $x \in (0, \ell)$  a un développement de Fourier en cos/sin dont tous les termes en cos sont nuls : ce développement de  $\tilde{T}_0$  est exactement le développement (7), dont la convergence est décrite par le théorème de Dirichlet 3.2. ▽

### 3.4. Exercices

1. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Calculer les coefficients de Fourier la fonction  $f_\lambda$  définie sur  $(-1/2, 1/2)$  par

$$f_\lambda(t) = e^{2i\pi\lambda t}, \quad t \in (-1/2, 1/2).$$

En déduire, pour  $t$  réel avec  $|t| < 1/2$ ,

$$e^{2i\pi\lambda t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi nt} \frac{\sin \pi(\lambda - n)}{\pi(\lambda - n)}.$$

Que dire pour  $|t| = 1/2$  ?

2. Soit la fonction  $t \rightarrow \operatorname{ch} \pi t$  définie sur  $[-1, 1]$ .
  - (a) Montrer, en précisant la notion de convergence, que

$$\operatorname{ch} \pi t = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} \cos \pi n t \right), \quad |t| \leq 1.$$

- (b) Déduire de la question précédente la valeur de  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + n^2)^{-1}$ .

3. Soit  $\omega$  un réel non entier. Donner le développement en série de Fourier de la fonction  $f_\omega$  définie sur  $[-\pi, \pi]$  par

$$f_\omega(t) = \cos(\omega t), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

En déduire l'identité

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - (n\pi)^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}.$$

4. Soient  $A, B$  des réels.

(a) Montrer que

$$At + Bt^2 = A \left( \pi - \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{int}}{in} \right) + B \left( \frac{4\pi^2}{3} + 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left( \frac{-\pi}{in} + \frac{1}{n^2} \right) e^{int} \right), \quad t \in (0, 2\pi).$$

En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

pour  $x \in \mathbb{R}$ .

(b) Montrer que

$$At + Bt^2 = 2A \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) + B \left( \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt) \right), \quad t \in (-\pi, \pi).$$

(b) Déduire de l'une des questions précédentes les valeurs des sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}.$$

pour  $x \in \mathbb{R}$ .

5. (a) Soit  $\varphi$  une fonction d'une variable réelle deux fois dérivable. Montrer que, si  $\varepsilon = \pm 1$ ,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) [\varphi(x + \varepsilon t)] = 0.$$

(b) Soient  $f, g$  deux fonctions d'une variable réelle deux fois dérivables et  $H$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$H(t, x) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(u) du, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que

$$(11) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) H(t, x) = 0, \quad H(t, x)|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial H}{\partial t}(t, x)|_{t=0} = g(x).$$

(c) Soit  $f$  et  $g$   $2\pi$  périodiques et indéfiniment dérivables avec comme développement en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx}, \quad g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n e^{inx}.$$

Montrer que la fonction  $H$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$H(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( f_n \cos nt + g_n \frac{\sin nt}{n} \right) e^{inx}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

vérifie l'ensemble des équations (11) de la question précédente.

6. Soit  $\chi$  le signal carré  $2\pi$ -périodique tel que  $\chi(t) = 1$  si  $t \in (0, \pi)$ , 0 si  $t \in (\pi, 2\pi)$ .

(a) En précisant le type de convergence, montrer que

$$\chi(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}.$$

(b) En écrivant  $\cos \omega = \Re e(e^{i\omega})$  et avec une sommation géométrique, montrer que

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}.$$

Soit  $s_n$  la fonction définie par  $s_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}$  pour  $t \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$s_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Montrer que

$$s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} \frac{u/(2n)}{\sin(u/(2n))} du$$

et en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sinc} u \, du.$$

On vérifiera sur une calculette idoine que  $\int_0^{\pi} \operatorname{sinc} u \, du \simeq 1,851 > \pi/2$ . On vient de démontrer une occurrence (typique) du phénomène de Gibbs.

# APPENDICE A

## MESURE ET INTÉGRATION À LA LEBESGUE

### A.1. Mesure de Lebesgue

Commençons par quelques définitions.

**Définition A.1.** Un pavé  $P$  de  $\mathbb{R}^d$  est une partie de la forme  $P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$ . Sa mesure est le réel positif  $\lambda_d(P)$  défini par  $\lambda_d(P) = (b_1 - a_1) \dots (b_d - a_d)$ .

**Définition A.2.** Une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^d$  est dite *négligeable* si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une famille finie ou dénombrable de pavés  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $A$  soit incluse dans  $\cup_{n \in \mathbb{N}} P_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_d(P_n) < \varepsilon$ .

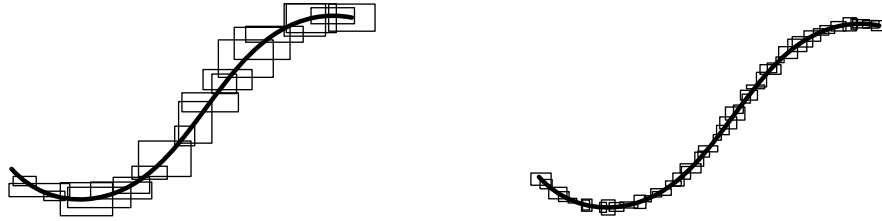


FIGURE 10 . Un arc de courbe est de mesure nulle dans le plan.

▷ **Exemple A.1.** L'ensemble des rationnels  $\mathbb{Q}$  est négligeable dans  $\mathbb{R}$ . Une courbe est négligeable dans  $\mathbb{R}^2$  (cf. Fig. 10), un hyperplan dans  $\mathbb{R}^d$ . ◁

△ **Remarque A.1.** L'union dénombrable  $A = \cup_{p \in \mathbb{N}} A_p$  de parties négligeables  $A_p$  est encore négligeable : étant donné  $\varepsilon$ , il suffit de recouvrir  $A_p$  par une famille de pavés  $(P_{np})$  avec  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_d(P_{np}) < 2^{-p}\varepsilon$ , par suite  $A$  est inclus dans l'union dénombrable  $\cup_{n,p \in \mathbb{N}} P_{np}$  avec  $\sum_{n,p \in \mathbb{N}} \lambda_d(P_{np}) \leq 2\varepsilon$ . Ainsi toute partie finie ou dénombrable de  $\mathbb{R}^d$  est de mesure nulle. Il existe des parties non dénombrables et de mesure nulle. ▽

On doit à Borel et Lebesgue la bonne formulation (et la construction) pour une théorie de la mesure dans  $\mathbb{R}^d$ .

**Théorème/Définition\* A.1.** Il existe une famille  $\mathcal{T}_d$  de parties de  $\mathbb{R}^d$  et une application  $\lambda_d$  de  $\mathcal{T}_d$  dans  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , uniquement déterminées par les propriétés

- $\mathcal{T}_d$  est stable par union dénombrable et passage au complémentaire,
- tout pavé de  $\mathcal{T}_d$ , ainsi que toute partie négligeable, appartient à  $\mathcal{T}_d$ ,
- l'application  $\lambda_d$  vaut 1 sur le pavé unité  $[0, 1]^d$  et 0 sur toute partie négligeable,
- si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille dénombrable de parties disjointes deux à deux de  $\mathcal{T}_d$ , alors  $\lambda_d(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_d(A_n)$ .

La famille  $\mathcal{T}_d$  est appelée tribu de Lebesgue, un de ses éléments une partie mesurable de  $\mathbb{R}^d$  et l'application  $\lambda_d$  (caractérisée par les propriétés ci-dessus) mesure de Lebesgue.

▷ **Exemple A.2.** Le produit  $P = I_1 \times \dots \times I_d$  avec  $I_j$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  est union dénombrable de pavés  $P_n$  croissants ( $P_n \subset P_{n+1}$ ) : la partie  $P$  est mesurable et on vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_d(P_n) = \ell(I_1) \dots \ell(I_d)$ , comme on l'attend pour l'extension de la fonctionnelle  $\lambda_d$  à la classe des produits  $I_1 \times \dots \times I_d$ . Avec le même argument de présentation comme union dénombrable de pavés, on conclue que les boules de  $\mathbb{R}^d$  pour les normes  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$  du Chap. 1, ainsi que tout ouvert, sont mesurables. ◁

La définition de tribu  $\mathcal{T}$  d'un ensemble  $E$  et de mesure  $m$  sur cette tribu reprend les propriétés du théorème précédent, à l'exception de celles concernant les pavés. Cette définition d'espace mesuré  $(E, \mathcal{T}, m)$  est à la base de la théorie d'intégration générale, dont il existe de multiples incarnations. Ainsi, si on prend comme tribu l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble non vide  $E$  et comme mesure d'une partie  $A$  de  $E$  son cardinal (valant  $+\infty$  si la partie  $A$  n'est pas finie), on obtient la théorie d'intégration qui coïncide avec celle des séries lorsque  $E = \mathbb{N}$ . Un autre exemple (non développé ici) est celui où  $E$  est l'ensemble des fonctions continues sur  $[0, 1]$ , avec la mesure brownienne, qui fournit un cadre adapté pour la modélisation de signaux aléatoires.

Si la mesure de l'ensemble  $E$  est égale à 1, on peut voir  $E$  comme modélisant un espace de probabilités : un événement est représenté par une partie de la tribu  $\mathcal{T}$ , une partie de mesure 1 (resp. 0) correspondant à un événement presque sûr (resp. impossible). Cette vision probabiliste sera reprise dans la théorie de l'intégration sur  $\mathbb{R}^d$  pour certaines formulations, bien que  $\mathbb{R}^d$  soit de mesure infinie, tout en étant union dénombrable de parties de mesure finie  $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]^d$ . Une propriété  $\mathcal{P}$  est dite *vraie presque partout* sur  $A$  si la partie  $\{x \in A, x \text{ ne vérifie pas la propriété } \mathcal{P}\}$  est négligeable.

△ **Remarque A.2.** Il existe des parties non mesurables de  $\mathbb{R}^d$  : en exhiber une n'est pas aisé et fait appel à l'axiome du choix non dénombrable (qui est indépendant des axiomes implicitement utilisés ici), si bien que toutes les parties rencontrées en général sont mesurables. Il n'y a rien à perdre à affirmer que toute partie (et toute fonction, sitôt vu la définition de la section suivante) est mesurable. ▽

Notons quelques propriétés de la mesure de Lebesgue.

**Proposition A.1.** Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de parties mesurables de  $\mathbb{R}^d$ . Alors  $\lambda_d(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \geq 1} \lambda_d(A_n)$ . Si  $A_n \subset A_{n+1}$ , alors  $\lambda_d(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_d(A_n)$ .

La mesure de Lebesgue est invariante par translation : pour  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $A$  mesurable, la partie translatée  $x + A = \{x + a, a \in A\}$  est mesurable et  $\lambda_d(x + A) = \lambda_d(A)$ . Pour  $h > 0$  et  $A$  mesurable, l'homothétie  $hA = \{ha, a \in A\}$  est mesurable et a pour mesure  $\lambda_d(hA) = h^d \lambda_d(A)$ .

*Démonstration.* — Pour la première partie, on remarque que si  $A \subset B$ , alors  $\lambda_d(A) \leq \lambda_d(B)$  puisque  $\lambda_d(B) = \lambda_d(B \setminus A) + \lambda_d(A)$ . On introduit alors une famille  $\tilde{A}_n$  de parties deux à deux disjointes telles que  $\tilde{A}_1 = A_1$  et  $\bigcup_{n=1}^N \tilde{A}_n = \bigcup_{n=1}^N A_n$ , ainsi  $\tilde{A}_n \subset A_n$  et

$$\lambda_d(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lambda_d(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_d(\tilde{A}_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_d(A_n)$$

Si  $A_n \subset A_{n+1}$ , alors, avec  $B_n$  défini par  $B_n = A_{n+1} \setminus A_n$ , on a

$$\lambda_d(A_n) + \sum_{i=n}^{\infty} \lambda_d(B_i) = \lambda_d(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$$

d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_d(A_n) = \lambda_d(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$ .

Pour les autres propriétés, on se limitera ici à les vérifier pour les pavés. ◻

## A.2. Intégration lebesgienne

Introduisons la notion de fonction mesurable

**Définition A.3.** Une fonction de  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  est dite *mesurable* si pour tout  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  l'image réciproque  $f^{-1}([-\infty, a))$  est une partie mesurable de  $\mathbb{R}^d$ . Une fonction  $f$  définie sur une partie mesurable  $A$  et à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}$  est dite mesurable si son prolongement  $\tilde{f}$  à  $\mathbb{R}^d$  avec  $\tilde{f}|_{\mathbb{R}^d \setminus A} = 0$  est mesurable.

Une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^d$  est mesurable si et seulement si sa *fonction caractéristique*  $\mathbf{1}_A$  est mesurable. Plus généralement, si  $A_1, \dots, A_n$  est une famille de parties mesurables et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  une famille de réels, la fonction  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$  est mesurable : une telle fonction est dite *étagée*.

Les somme et produit de fonctions mesurables sont mesurables. Si une suite de fonctions mesurables  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  (la convergence simple presque partout suffit), la fonction  $f(x)$  est mesurable.

Toute fonction  $f$  est de manière unique la différence  $f = f_+ - f_-$  de deux fonctions  $f_+, f_-$  à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  :  $f_{\pm}(x) = \sup(\pm f(x), 0)$ . La fonction  $f$  est mesurable si et seulement si ses parties positives  $f_+$  et négatives  $f_-$  le sont. Vu que  $|f| = f_+ + f_-$ ,  $|f|$  est mesurable si  $f$  l'est. Pareillement, vu que  $\sup(f, g) = (f + g + |f - g|)/2$ ,  $\sup(f, g)$  et  $\inf(f, g)$  sont mesurables si  $f$  et  $g$  le sont. On dira que  $f$  à valeurs complexes est mesurable si et seulement si ses parties réelles et imaginaires le sont.

Les fonctions étagées engendrent les fonctions mesurables au sens suivant

**Lemme\* A.1.** Soit  $f$  une fonction mesurable à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Il existe une suite croissante de fonctions étagées  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , convergeant simplement vers  $f$ .

On commence par définir l'intégrale d'une fonction étagée.

**Définition A.4.** Soit  $f$  une fonction étagée  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ . L'intégrale de la fonction étagée  $f$ , notée  $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$  est définie par

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_d(A_i).$$

$\triangle$  **Remarque A.3.** L'intégrale  $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$  est notée parfois  $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda_d(x)$  pour bien rappeler la mesure de Lebesgue  $\lambda_d$ . On vérifie simplement que l'intégrale de la fonction étagée  $f$  ne dépend pas de sa représentation  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ .  $\nabla$

Puis on définit l'intégrale d'une fonction positive, une *fonction intégrable* et son intégrale.

**Définition A.5.** Soit  $f$  une fonction mesurable de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Son intégrale  $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$  est le réel de  $\overline{\mathbb{R}}_+$  défini par

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx, \varphi \text{ étagée}, \varphi \leq f \right\}.$$

La fonction  $f$  est dite *intégrable* si son intégrale est finie.

Une fonction mesurable  $f$  de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  est dite *intégrable* si  $|f|$  est intégrable. Son intégrale  $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$  est définie par

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f_+(x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} f_-(x) dx.$$

Une fonction mesurable  $f$  de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{C}$  est dite *intégrable* si ses parties réelle  $\Re(f)$  et imaginaire  $\Im(f)$  le sont. Son intégrale  $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$  est définie par

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \Re(f)(x) dx + i \int_{\mathbb{R}^d} \Im(f)(x) dx.$$

Les définitions précédentes s'étendent naturellement aux fonctions mesurables  $f$  définies sur une partie mesurable  $A$  via leur prolongement  $\tilde{f}$  à  $\mathbb{R}^d$ , avec intégrale  $\int_A f(x)dx$  donné par

$$\int_A f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(x)dx.$$

$\triangle$  **Remarque A.4.** Quel est le rapport de l'intégration lebesgienne avec la théorie de Riemann ? La première est un prolongement de la seconde : toute fonction bornée intégrable au sens de Riemann est mesurable et intégrable au sens de Lebesgue comme il est décrit dans la définition précédente. C'est un véritable prolongement : il existe bien sûr des fonctions intégrables au sens de Lebesgue qui ne sont pas égales presque partout à une fonction intégrable au sens de Riemann (la fonction caractéristique  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$  des rationnels est Lebesgue-intégrable et non Riemann-intégrable, mais elle bien simple, puisque égale presque partout à la fonction nulle !). Et c'est un prolongement fertile : la notion de mesurabilité est solide (stabilité par limite simple), il y a des résultats profonds de convergence (dont le premier est le théorème de convergence dominée A.7), la construction de l'intégrale à plusieurs variables aussi aisée (ou difficile) qu'en dimension 1, des théorèmes opératoires dans les calculs (Fubini A.1, changement de variable A.2) qui permettent même de calculer des intégrales unidimensionnelles.

Les fonctions en escalier de la théorie de Riemann sont des fonctions étagées, mais pas réciproquement. Ce choix de fonctions fondamentales, et le mode de découpage d'une fonction (en partitionnant l'espace des valeurs, au lieu du domaine de variation de la variable comme il est fait pour une fonction en escalier), est sans nul doute le saut épistémologique majeur contenu dans la théorie de l'intégration de Lebesgue.

Néanmoins, il faut prendre garde que les intégrales semi-convergentes de fonctions de signe variable de la théorie de Riemann ne sont pas incluses dans la théorie de Lebesgue :  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$  peut se lire comme une intégrale de Lebesgue ou une intégrale semi-convergente (*i. e.* comme la limite  $\lim_{X \rightarrow \infty} \int_1^X \frac{dx}{x^2}$  qui existe dans  $\mathbb{R}$ ), mais, si  $E$  désigne la fonction partie entière,  $\int_1^\infty (-1)^{E(x)} x^{-1} dx$  n'a pas de sens que comme intégrale semi-convergente.  $\nabla$

Les définitions précédentes posent une théorie de l'intégration avec les propriétés habituelles pour les fonctions intégrables et leur intégrale, ensemble de propriétés repris dans la proposition suivante.

**Proposition\* A.2.** *L'espace  $\mathcal{L}^1(A)$  des fonctions intégrables sur  $A$  est un espace vectoriel et l'intégrale  $f \in \mathcal{L}^1(A) \rightarrow \int_A f(x)dx$  définit une forme linéaire sur  $\mathcal{L}^1(A)$ .*

*Si  $f$  et  $g$  sont intégrables sur  $A$  et à valeurs réelles avec  $f \leq g$ ,  $\int_A f(x)dx \leq \int_A g(x)dx$ .*

*Si  $f$  est intégrable à valeurs complexes,  $|\int_A f(x)dx| \leq \int_A |f(x)|dx$ .*

*Soit  $f$  mesurable sur  $A$  et à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . La fonction  $f$  est nulle presque partout si et seulement si  $\int_A |f(x)|dx = 0$ . Si  $f$  est intégrable sur  $A$ , alors  $f(x)$  est fini presque partout sur  $A$ .*

*Si  $I$  est une isométrie affine de  $\mathbb{R}^d$  (pour sa structure euclidienne standard) et  $h$  un réel positif, alors*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(hI(x))dx = h^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.$$

Le calcul d'intégrales de fonctions de  $d$  variables est parfois facilité en se ramenant aux calculs successifs d'intégrales de fonctions de  $d'$  variables, avec  $d' < d$ . Avec  $d = d_1 + d_2$ , écrivons  $x = (x_1, x_2)$  suivant l'isomorphisme  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ .

**Théorème\* A.1 (Fubini).** *Soient  $A_i$  une partie mesurable de  $\mathbb{R}^{d_i}$  pour  $i = 1, 2$ . Soit  $F$  une fonction intégrable sur  $A_1 \times A_2$ . Alors, pour presque tout  $x_1$  dans  $A_1$ , la fonction  $x_2 \in A_2 \rightarrow F(x_1, x_2)$  est intégrable sur  $A_2$  et la fonction  $x_1 \rightarrow \int_{A_2} F(x_1, x_2)dx_2$  est intégrable*



sur  $A_1$ . La même propriété vaut en échangeant les indices 1 et 2. De plus

$$(12) \quad \int_{A_1 \times A_2} F(x) dx = \int_{A_1} \left( \int_{A_2} F(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{A_2} \left( \int_{A_1} F(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2.$$

Si  $F$  est à valeurs réelles positives et mesurable, les conclusions précédentes valent en remplaçant intégrable par mesurable, avec l'égalité (12) valant dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ .

▷ **Exemple A.3.** Calculons l'intégrale de la fonction  $e^{-y(1+x^2)}$  sur le quadrant positif  $\mathbb{R}_+^2$ . On a d'une part

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-y(1+x^2)} dx dy = \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{-y(1+x^2)} dy \right) dx = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = [\arctg x]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-y(1+x^2)} dx dy &= \int_0^\infty e^{-y} \left( \int_0^\infty e^{-yx^2} dx \right) dy = \int_0^\infty e^{-y} \left( y^{-1/2} \int_0^\infty e^{-u^2} du \right) dy \\ &= \left( \int_0^\infty e^{-u^2} du \right) \left( \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy \right) = 2 \left( \int_0^\infty e^{-u^2} du \right)^2 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad \triangleleft$$

Avant d'énoncer la formule de changement de variable, généralisant celle valable en dimension  $d = 1$  pour les intégrales de Riemann, rappelons quelques notions de calcul différentiel. Si  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_d)$  est une fonction définie au voisinage de  $x \in \mathbb{R}^d$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et différentiable en  $x$ , sa matrice jacobienne  $J\Phi(x)$  est la matrice des dérivées partielles de  $\Phi$  :  $J\Phi(x) = \left( \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} \right)$ . Soient  $U_1, U_2$  des ouverts de  $\mathbb{R}^d$  ; une application  $\Phi : U_1 \rightarrow U_2$  est un *difféomorphisme* de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $U_1$  sur  $U_2$  si  $\Phi$  est une bijection de  $U_1$  sur  $U_2$ ,  $\Phi$  est différentiable sur  $U_1$  et de matrice jacobienne  $J\Phi(x)$  inversible pour tout  $x \in U_1$  (et dans ce cas le déterminant  $\det J\Phi$  ne s'annule pas sur  $U_1$  et  $\Phi^{-1}$  est différentiable avec matrice jacobienne  $J(\Phi^{-1})(\Phi(x)) = (J\Phi(x))^{-1}$  inversible sur  $U_2$ ).

**Théorème\* A.2 (Changement de variable).** Soient  $U_1$  et  $U_2$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Phi$  un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $U_1$  sur  $U_2$  et  $f_2$  une fonction intégrable sur  $U_2$ . Alors la fonction  $f_1$  définie sur  $U_1$  par  $f_1(x) = f_2(\Phi(x)) |\det J\Phi(x)|$ ,  $x \in U_1$  est intégrable sur  $U_1$  et on a

$$(13) \quad \int_{U_2} f_2(y) dy = \int_{U_1} f_2(\Phi(x)) |\det J\Phi(x)| dx.$$

Si  $f_2$  est à valeurs réelles positives et mesurable sur  $U_2$ , alors  $f_1$  est mesurable, avec l'égalité (13) valant dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ .

▷ **Exemple A.4.** Les coordonnées sphériques dans  $\mathbb{R}^3$

$$x_1 = r \cos \theta \cos \varphi, x_2 = r \sin \theta \cos \varphi, x_3 = r \sin \varphi. \quad r \geq 0, \theta, \varphi \in \mathbb{R},$$

réalisent un difféomorphisme du pavé ouvert  $P = \{(r, \theta, \varphi) \in (0, 1) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$  sur la boule  $B(1) = \{\|x\|_2 < 1\}$  pour la norme euclidienne, à un ensemble de mesure nulle près. Sa matrice jacobienne est

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

de déterminant  $r^2 \cos \varphi$ . On en déduit le volume de la boule  $B_2(1)$

$$\text{vol } B_2(1) = \int_{B_2(1)} dx = \int_P r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3}. \quad \triangleleft$$

**A.3. Espaces  $L^p$ ,  $p = 1, 2, \infty$** 

L'application qui à  $f$  intégrable sur  $A$  associe le réel positif  $\int_A |f(x)|dx$  n'est pas une norme sur l'espace vectoriel  $\mathcal{L}^1(A)$  des fonctions intégrables : ce nombre est nul pour toute fonction nulle presque partout, fonction qui n'est pas nécessairement nulle.

Pour remédier à ce défaut, on rassemble les fonctions égales à un ensemble de mesure nulle près et on considère l'espace de ces classes. Autrement dit, on considère l'ensemble  $L^1(A)$  dont chaque élément est représenté par une fonction intégrable (remplacer cette fonction par une fonction égale presque partout importe peu du point de vue de l'intégration), qui est muni de la structure d'espace vectoriel induite par les opérations linéaires de  $\mathcal{L}^1(A)$  (cf. Prop. A.2).

**Théorème\* A.3.** *L'espace  $L^1(A)$ , muni de l'application  $f \rightarrow \|f\|_1 = \int_A |f(x)|dx$ , est un espace vectoriel normé complet.*

Une fonction est dite de *carré intégrable* sur  $A$  si  $|f|^2$  est intégrable sur  $A$ .

**Théorème\* A.4.** *L'espace  $L^2(A)$  des fonctions de carré intégrable, muni de l'application  $f \rightarrow \|f\|_2 = \sqrt{\int_A |f(x)|^2 dx}$ , est un espace vectoriel normé complet.*

Si la borne supérieure essentielle est définie suivant

**Définition A.6.** Une fonction mesurable  $f$  a pour *borne supérieure essentielle*  $M$  si  $|f(x)| \leq M$  presque partout et pour tout  $\varepsilon > 0$ , la partie  $\{|f(x)| > M - \varepsilon\}$  n'est pas négligeable. On note  $M = \|f\|_\infty$  pour une telle fonction, qui est dite essentiellement bornée.

l'espace des fonctions essentiellement bornées est un autre espace vectoriel normé complet.

**Théorème\* A.5.** *L'espace  $L^\infty(A)$  des fonctions essentiellement bornées sur  $A$ , muni de l'application  $f \rightarrow \|f\|_\infty$ , est un espace vectoriel normé complet.*

**▷ Exemples A.5.**

1. Sur  $[0, 1]$ , la fonction  $t \in [0, 1] \rightarrow x^{-1/2}$  est intégrable, mais elle n'y est pas de carré intégrable, ni essentiellement bornée.
2. Sur  $[1, +\infty)$ , la fonction  $t \in [1, +\infty) \rightarrow x^{-1}$  est de carré intégrable, mais n'y est pas intégrable. Elle y est essentiellement bornée, avec borne supérieure essentielle 1.  $\triangleleft$

Terminons par des résultats de séparabilité.

**Théorème\* A.6.** *Soit  $A$  une partie mesurable de  $\mathbb{R}^d$ .*

*Le sous-espace des fonctions étagées sur  $A$  est dense dans  $L^p(A)$  pour  $p = 1$  ou  $2$ .*

*L'espace des fonctions continues  $f$  nulles en dehors d'un pavé (qui dépend de la fonction  $f$ ) est dense dans  $L^p(\mathbb{A})$  pour  $p = 1$  ou  $2$ .*

*Les espaces  $L^1(A)$  et  $L^2(A)$  sont séparables. L'espace  $L^\infty(A)$  n'est pas séparable.*

**A.4. Intégrales dépendant d'un paramètre**

Le théorème dit de convergence dominée de Lebesgue est un des résultats importants de la théorie de l'intégration

**Théorème\* A.7 (dit de convergence dominée).** *Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions intégrables telle qu'il existe une fonction intégrable  $g$  vérifiant*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{N}.$$

*Si la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers une fonction  $f$ , la fonction  $f$  est intégrable et*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f_n(x)| dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

▷ **Exemple A.6.** Soit  $\alpha > 0$  et  $f_n(\alpha)$  la fonction définie sur  $(0, 1)$  par

$$f_n(\alpha)(t) = n^\alpha e^{-nt}, \quad t \in (0, 1).$$

Pour tout  $t \in (0, 1)$ ,  $f_n(\alpha)(t)$  tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$  alors que  $\int_0^1 f_n(\alpha)(t)dt = n^{\alpha-1}$  converge vers 0 si et seulement si  $\alpha < 1$ . Pour  $\alpha \geq 1$ , le théorème de convergence dominée ne peut donc être applicable : les fonctions  $f_n(\alpha), n \in \mathbb{N}$  ne sont dominées par nulle fonction intégrable. Si  $\alpha < 1$ , on a  $n^\alpha e^{-nt} \leq \alpha^\alpha e^{-\alpha t - \alpha}$ , cette dernière fonction étant intégrable (même si non bornée) sur  $(0, 1)$  : l'application du théorème précédent est vérifiée. ◁

Ce théorème est utilisé dans l'étude des fonctions définies par des intégrales.

**Corollaire A.1 (continuité d'intégrale).** Soit  $T$  une boule de  $\mathbb{R}^k$  et  $f : (x, t) \in \mathbb{R}^d \times T \rightarrow f(x, t) \in \mathbb{C}$  telle que

1. pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , la fonction  $t \in T \rightarrow f(x, t)$  est continue,
2. pour tout  $t \in T$ , la fonction  $x \in \mathbb{R}^d \rightarrow f(x, t)$  est mesurable,
3. il existe une fonction intégrable  $g$  sur  $\mathbb{R}^d$  telle que  $|f(x, t)| \leq g(x), (x, t) \in \mathbb{R}^d \times T$ .

Alors la fonction  $F$  définie sur  $T$  par  $F(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, t)dx, t \in T$  est continue sur  $T$ .

**Corollaire A.2 (différentiabilité d'intégrale).** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  ou une boule du plan complexe et  $f : (x, t) \in \mathbb{R}^d \times I \rightarrow f(x, t) \in \mathbb{C}$  telle que

1. il existe  $t_0$  telle que la la fonction  $x \in \mathbb{R}^d \rightarrow f(x, t_0)$  soit intégrable, pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , la fonction  $t \in I \rightarrow f(x, t)$  est dérivable,
2. pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , la fonction  $t \in I \rightarrow f(x, t)$  est dérivable,
3. pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \in \mathbb{R}^d \rightarrow \frac{df}{dt}(x, t)$  est mesurable,
4. il existe une fonction intégrable  $g$  sur  $\mathbb{R}^d$  telle que  $|\frac{df}{dt}(x, t)| \leq g(x), (x, t) \in \mathbb{R}^d \times I$ .

Alors la fonction  $F$  définie sur  $I$  par  $F(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, t)dx, t \in I$  est dérivable sur  $I$  et

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{df}{dt}(x, t)dx.$$

▷ **Exemple A.7.** La fonction  $\Gamma$ , définie sur  $\{\Re s > 0\}$ , par

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^s e^{-x} \frac{dx}{x}$$

est continue car, pour tout  $\alpha > 0$ , la fonction  $x^{s-1}e^{-x}$  est dominée sur  $\{(x, s), x > 0, \alpha \leq \Re s \leq 1 + \alpha^{-1}\}$  par la fonction  $(x^{\alpha-1} + x^{\alpha-1})e^{-x}$  intégrable sur  $(0, \infty)$ . On peut dériver sous l'intégrale avec

$$\frac{d^k \Gamma}{ds^k}(s) = \int_0^\infty x^s (\log x)^k e^{-x} \frac{dx}{x}. \quad \triangleleft$$

# INDEX

- application
  - linéaire, 4
  - linéaire continue, 6
- S. BANACH, 12
- base de voisinages, 3
- P. BÉZIER, 11
- É. BOREL, 26
- borne supérieure essentielle, 31
- boule
  - ouverte, 5
- A. CAUCHY, 12
- coefficients de Fourier, 19
- convergence
  - dans  $\mathcal{S}$ , 14
  - en moyenne, 10
  - en moyenne quadratique, 10
  - simple, 15
  - uniforme, 10
- difféomorphisme, 30
- J. DIRICHLET, 21
- espace
  - complet, 12
  - de dimension finie, 4
  - normé, 4
  - séparable, 10
  - vectorel, 3
- fonction
  - étagée, 28
  - à décroissance rapide, 14
  - caractéristique, 28
  - de Schwartz, 14
  - essentiellement bornée, 31
  - intégrable, 28
  - mesurable, 28
- J. FOURIER, 2, 18
- G. FUBINI, 29
- J. GAUSS, 12
- gaussienne, 14
- J. GIBBS, 22
- intégrale
  - d'une fonction positive, 28
  - d'une fonction étagée, 28
  - d'une fonction mesurable, 28
- J.-L. LAGRANGE, 8
- H. LEBESGUE, 26, 31
- limite d'une suite, 10
- mesure de Lebesgue, 26
- norme, 4
- partie
  - dense, 10
  - mesurable, 26
  - négligeable, 26
  - ouverte, 5
- pavé, 26
- phénomène de Gibbs, 22
- polynôme trigonométrique, 12
- presque partout, 27
- B. RIEMANN, 29
- L. SCHWARTZ, 14
- suite de Cauchy, 12
- translatée
  - fonction, 14
  - partie, 27
- tribu de Lebesgue, 26
- vecteur
  - nul, 3
  - unitaire, 4
- voisinage, 5
- K. WEIERSTRASS, 11

## Indications bibliographiques

Le contenu de ces ouvrages dépasse le contenu de ce cours. Néanmoins, une introduction, un chapitre bien choisi le complètent parfois agréablement.

J.-M. BONY, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2001.

C. GASQUET, P. WITOMSKI, *Analyse de Fourier et applications*, Masson, Paris, 1990.

S. MALLAT, *Une exploration des signaux en ondelettes*, Ellipses, Paris, 2000.

L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1973.