UNIVERSITÉ DE NANTES

École polytechnique
SEII-1 Analyse Fonctionnelle I
Année 2006-2007

Contrôle (une heure et trente minutes)

27 octobre 2006

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

Les réponses seront soigneusement justifiées.

I

Soient P_1 et P_2 les fonctions définies sur $\mathbb{C}^2$ par

$$P_1(x,y) = \max(|x|, |x-y|), \quad P_2(x,y) = 2|y| + |x+y|, \quad (x,y) \in \mathbb{C}^2.$$

(**1**) Montrer que la fonction P_1 est une norme.

(**2**) En remarquant $|x| \leq |y| + |x-y|$ (et d'autres inégalité analogues), montrer les inégalités

$$P_2(x,y) \leq 8P_1(x,y), \quad P_1(x,y) \leq P_2(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{C}^2.$$

II

Soit E l'espace des fonctions h définies sur l'intervalle $[-2,2]$, à valeurs réelles, dérivables sur $[-2,2]$. On munit l'espace E de la norme N définie par

$$N(h) = |h(-2)| + |h(0)| + |h(2)| + \int_{-2}^{2} |h'(u)| du, \quad h \in E.$$

Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$h_n(u) = (1 - u^2/4)^n, \quad u \in [-2,2].$$

(**1**) Calculer $N(h_n)$

(**2**) Soit $u \in [-2,2]$. Montrer que la suite $(h_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite qui sera notée $h_\infty(u)$. Tracer le graphe de la fonction h_∞.

III

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T = 2$, telle que

$$F(t) = \begin{cases} e^t, & \text{si } t \in]-1, 1[, \\ 0, & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

(1) Tracer le graphe de F en restriction à l'intervalle $[-4, 4]$.

(2) Calculer la série de Fourier de F avec des exponentielles à phase complexe.

(3) En déduire un développement de Fourier de F avec des fonctions trigonométriques circulaires cos et sin.

(4) Quelle est la valeur de la somme des séries de Fourier précédentes en $t = -1$?