UNIVERSITÉ DE NANTES

École polytechnique
SEII-1 Analyse Fonctionnelle II
Année 2006-2007

Contrôle (une heure et trente minutes)

22 janvier 2007

Le sujet est composé de deux exercices indépendants.
Les réponses seront soigneusement justifiées.

I

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$k(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) & \text{si } |t| < 1/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(**1**) Donner la partie maximale A de $\mathbb{R}$ où la fonction k est dérivable, en donnant l'expression de la dérivée $k'(t)$ pour $t \in A$. Tracer les graphes de k et de k'.

(**2**) Soit $K = u_k$ la distribution régulière associée à la fonction k. Calculer la dérivée première K' et la dérivée seconde K'' de K, en fonction des distributions u_k, $u_{k'}$ et d'autres.
En déduire

$$K'' + \pi^2 K + \delta'(1/2) + \delta'(-1/2) = 0.$$

(**3**) Calculer les transformées de Fourier $\widehat{K}$, $\widehat{K'}$, $\widehat{K''}$.
Montrer que

$$\widehat{K''} = -\pi^2 \widehat{K} - 4\mathrm{j}\pi f \cos(2\pi f).$$

II

(**0**) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, intégrable et à support borné. Si g est la fonction définie par $g(t) = -f(-t), t \in \mathbb{R}$, montrer la relation entre transformées de Laplace

$$\mathcal{L}(g)(p) + \mathcal{L}(f)(-p) = 0, \quad p \in \mathbb{C}.$$

Soit C_+ la fonction définie par $C_+(t) = 1$ si $1 < t < 2$ et $C_+(t) = 0$ sinon. Soit C_- la fonction définie par $C_-(t) = -C_+(-t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

(**1**) Calculer les transformées de Laplace $\mathcal{L}(C_+)$ et $\mathcal{L}(C_-)$. Quels sont leurs domaines de définition respectifs ?

(**2**) Soit D_α la fonction holomorphe définie sur le demi-plan $P_+ = \{p \in \mathbb{C}, \Re e\, p > 0\}$ par

$$D_\alpha(p) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha p}}{p^2}, \quad p \in P_+.$$

Montrer que la transformée de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}(D_\alpha)$ de D_α est la fonction d_α définie par

$$d_\alpha(t) = \begin{cases} t + \alpha & \text{si } t > -\alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(**3**) Calculer la convolution $C_- * C_+$ et sa transformée de Laplace. Tracer le graphe de $C_- * C_+$.