UNIVERSITÉ DE NANTES

École polytechnique
SEII-1 Analyse Fonctionnelle III
Année 2006-2007

Contrôle (une heure et trente minutes)

26 février 2007

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.
Les réponses seront soigneusement justifiées.

I

Pour n entier, la fonction de Bessel J_n est définie par

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que

$$\int_0^r u J_0(u)du = rJ_1(r), \quad r \in \mathbb{R}.$$

[On pourra faire l'intégration terme à terme d'une série.]

En déduire

$$rJ_0(r) = J_1(r) + rJ_1'(r), \quad r \in \mathbb{R}.$$

II

Soit E l'espace vectoriel des fonctions s définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$s(t) = a\mathrm{e}^{\mathrm{j}t} + b\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sqrt{2}t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

où a, b sont deux constantes (dépendants de la fonction s).

(**1**) Soient $s(t) = a\mathrm{e}^{\mathrm{j}t} + b\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sqrt{2}t}$ et $\widetilde{s}(t) = \widetilde{a}\mathrm{e}^{\mathrm{j}t} + \widetilde{b}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sqrt{2}t}$ deux éléments de E. Montrer que

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t)\overline{\widetilde{s}(t)}dt = a\overline{\widetilde{a}} + b\overline{\widetilde{b}} + \left[a\overline{\widetilde{b}} + b\overline{\widetilde{a}}\right] \mathrm{sinc}((\sqrt{2}-1)T).$$

En déduire

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t)\overline{\widetilde{s}(t)}dt = a\overline{\widetilde{a}} + b\overline{\widetilde{b}}.$$

(**2**) Montrer que la fonction

$$\langle s, \widetilde{s}\rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t)\overline{\widetilde{s}(t)}dt, \quad s, \widetilde{s} \in E$$

définit un produit scalaire sur E.

III

Soit $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes à coefficients réels sur lequel est défini le produit scalaire $\langle \ , \ \rangle_L$ suivant

$$\langle P, Q\rangle_L = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x}dx, \quad P, Q \in \mathcal{P}.$$

Soit A l'opérateur qui à un polynôme $P \in \mathcal{P}$ associe le polynôme $A(P) \in \mathcal{P}$ défini par

$$[A(P)](x) = xP''(x) + (1-x)P', \quad x \in \mathbb{R}.$$

(**1**) Montrer que

$$\langle A(P), Q\rangle_L = \langle P, A(Q)\rangle_L, \quad P, Q \in \mathcal{P}.$$

(**2**) Soient α, β réels distincts et $P, Q \in \mathcal{P}$ tels que $A(P) = \alpha P, A(Q) = \beta Q$. Montrer que

$$\langle P, Q\rangle_L = 0.$$

(**3**) Montrer que l'expression

$$L_n(x) = \mathrm{e}^x \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[x^n \mathrm{e}^{-x}\right]$$

est un polynôme de degré n.
Calculer L_0, L_1, L_2 et vérifier $AL_n = -nL_n$ pour $n = 0, 1, 2$.