

TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE

François LAUDENBACH

INTRODUCTION¹

Pour la rédaction d'un premier cours de Topologie Différentielle, l'écueil est de gaspiller son énergie à mettre en place beaucoup d'objets nouveaux, avec leurs noms de baptême, autrement dit de faire un cours sans théorèmes profonds.

Tenant compte du fait que plusieurs notions géométriques ont déjà été abordées et mûries dans d'autres cours, j'ai pensé pouvoir être rapide sur la mise en place du paysage (chapitre 1). En revanche, je me suis fixé comme objectif d'obtenir des résultats substantiels concernant les formes différentielles sur les variétés compactes (orientables). Par exemple : *la cohomologie des formes différentielles est de rang fini et en degrés complémentaires les rangs sont égaux* (Poincaré-de Rham). Ou encore les inégalités de Morse : *la non-trivialité de la cohomologie force l'existence de points critiques pour les fonctions numériques (à points critiques non dégénérés)*.

Une place importante est donc faite aux formes différentielles (chapitre 2) et à l'intégration des formes différentielles (formule de Stokes).

Au chapitre 3, on montre comment les champs de vecteurs dérivent les formes différentielles (dérivée de Lie), ce qui donne une ouverture vers le sujet capital des *groupes de Lie*. On en déduit quelques applications importantes des équations différentielles.

Le chapitre 4 propose un cadre très général – certes un peu abstrait – pour l'intégration des formes différentielles, analogue à la théorie des *distributions* de L. Schwartz. Il s'agit de la théorie des *courants* de De Rham. Comme toute théorie abstraite, sa validité se mesure à ses fruits et ce cours vise à en mettre quelques-uns en évidence. Le point clé réside dans la régularisation des courants, avec ses propriétés (co)-homologiques.

Les fruits apparaissent au chapitre 6, dans le cadre de la théorie de Morse, grâce à un lemme que j'introduis dans un exposé par ailleurs classique et qui fait peut-être l'originalité de l'ensemble. Ce lemme, relégué en appendice parce qu'un peu technique, m'a fourni l'argument de ce cours.

Dans ce survol, je viens de mettre entre parenthèses le chapitre 5. Il est le plus ardu, au moins dans une de ses parties. J'y propose un exposé de la transversalité d'après R. Thom,

¹Ce cours a été enseigné à l'École polytechnique (Palaiseau) de 1992 à 1996, comme cours de seconde année, dit de Majeure. À quelques révisions près, le texte est celui de la version 1996.

dont certaines applications seront justement exploitées au chapitre 6. C'est sans doute un peu ambitieux ; heureusement, je ne suis pas le premier à faire cette tentative dans un cours de base (voir le livre de M. Hirsch [18]). La transversalité à *la Thom*, ou transversalité sous contraintes (voir chapitre 5), est un outil puissant que je suis heureux de promouvoir dans ce cours.

Chapitre 1

Variétés différentiables

1.1 Structure différentiable

La notion de structure différentiable sur un espace topologique M repose sur le choix d'un modèle auquel M devra ressembler au voisinage de chacun de ses points.

1.1.1 Modèle

Le *modèle* de dimension n est le demi-espace

$$\mathbb{R}_-^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \leq 0\}.$$

La considération de ce modèle permet de définir les variétés à bord avec l'orientation qui convient pour la formule de Stokes.

1.1.2 Atlas différentiable

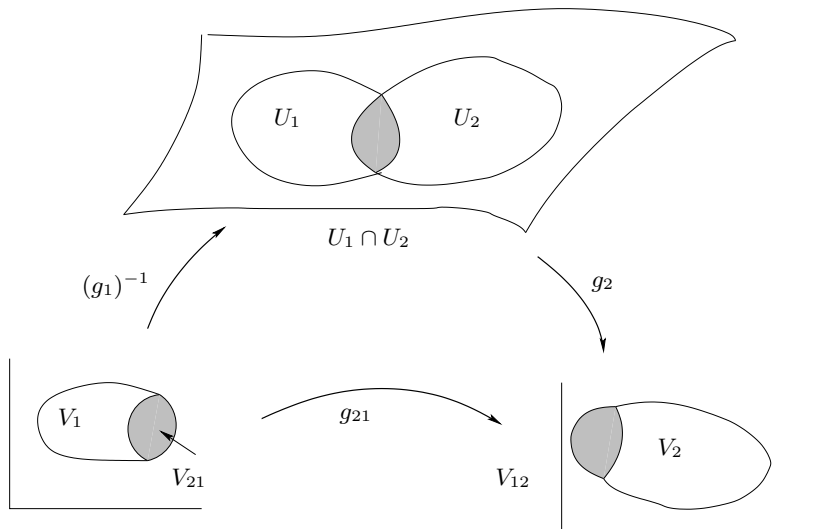
On considère un espace topologique M vérifiant deux hypothèses dont l'utilité n'apparaîtra que plus loin (partitions de l'unité) :

- M est séparé,
- M est union dénombrable de compacts.

Une *carte* de dimension n est la donnée d'un ouvert U de M et d'un *homéomorphisme* $g : U \rightarrow V$, où V est un ouvert de \mathbb{R}_-^n , c'est-à-dire l'intersection d'un ouvert de \mathbb{R}^n avec le demi-espace fermé.

En considérant une carte, on fait un geste, celui de mettre des coordonnées sur U , c'est-à-dire d'associer à chaque point de U un n -uplet de nombres réels de sorte que cette association repère les points de U avec les propriétés de continuité et d'ouverture contenues dans le mot "homéomorphisme". Pour l'instant, la différentiabilité ne peut avoir de sens. Le but de ce qui suit est de lui en donner un. Pour la commodité du maniement, il est impératif de s'habituer à appeler carte l'un quelconque des trois termes du triplet (U, g, V) .

Sur l'intersection de deux cartes $U_1 \cap U_2$, on a deux façons différentes de repérer les points. Cette intersection produit deux ouverts de \mathbb{R}^n : $V_{21} = g_1(U_1 \cap U_2)$ qui est un ouvert de V_1 et $V_{12} = g_2(U_1 \cap U_2)$ qui est un ouvert de V_2 . On note $g_{21} : V_{21} \rightarrow V_{12}$ l'homéomorphisme de changement de cartes défini par $g_{21} = g_2 \circ g_1^{-1}$. Son inverse est g_{12} .



L'intersection non vide de trois cartes U_1, U_2, U_3 donne lieu à trois changements de cartes et à leurs inverses qui sont liés par la relation dite de *cocyclicité* :

$$g_{12} \circ g_{23} \circ g_{31} = Id.$$

Dans le membre de droite de cette égalité, Id désigne l'application Identité de l'ouvert où le membre de gauche est défini, c'est-à-dire $g_1^{-1}(U_1 \cap U_2 \cap U_3)$.

Un *atlas* de classe C^k ($k = 0, 1, \dots, \infty$) est un recouvrement par des cartes de dimension n dont tous les changements de cartes sont de classe C^k . La donnée d'un atlas sur M lui confère une structure de variété de classe C^k . Inversement dans une expression telle que "soit M une variété de classe C^k " on sous-entend que M est un espace topologique séparé, union dénombrable de compacts, et muni d'un atlas de classe C^k .

Pour $k = 0$, on a affaire à une variété topologique. Le rôle de l'atlas se réduit à affirmer que l'espace M est localement homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n . On ne reparlera plus des variétés topologiques parce qu'elles sont beaucoup plus difficiles à étudier (voir le livre de Kirby et Siebenmann [20], Annex C).

Pour $k = 1, \dots, +\infty$, on a affaire à une variété différentiable. Le rôle de l'atlas est prépondérant, mais pour en parler il convient de préciser la notion d'isomorphisme; celle-ci deviendra claire dès que sera mis en place l'anneau des fonctions différentiables sur M .

1.1.3 Anneau des fonctions différentiables

L'espace M étant muni d'un atlas différentiable A de classe C^k , $k \geq 1$, une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est dite C^r , $r \leq k$, si pour toute carte $g : U \rightarrow V$, ($U \subset M$, $V \subset \mathbb{R}^n$), la composée $f \circ g^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ est C^r au sens habituel des fonctions réelles définies sur des ouverts de \mathbb{R}^n .

En fait, cette notion se localise : une fonction f est C^r au voisinage d'un point $x \in M$ s'il existe une carte $g : U \rightarrow V$, où U est un voisinage de x dans M , telle que $f \circ g^{-1}$ soit de classe C^r au voisinage de $g(x)$. Comme les changements de cartes sont C^k , $k \geq r$, cette notion est indépendante de la carte choisie au voisinage de x .

L'opération qui, pour définir une notion différentielle locale sur une variété, consiste à aller dans une carte et à vérifier l'invariance de la définition par rapport aux changements de cartes est l'opération est courante en calcul différentiel sur les variétés.

Dans le même ordre d'idées, si M et M' sont deux variétés différentiables (de classe C^k), et si $f : M \rightarrow M'$ est une application, on dit que f est de classe C^r au voisinage de $x \in M$ s'il existe des cartes g de M au voisinage de x et g' de M' au voisinage de $x' = f(x)$ telles que $g' \circ f \circ g^{-1}$ soit de classe C^r au sens usuel au voisinage de $g(x)$. On vérifie que cette définition est consistante, car elle ne dépend pas des cartes choisies.

On sait donc ce qu'est un *difféomorphisme* entre ouverts de deux variétés ; c'est une bijection qui est différentiable ainsi que la bijection réciproque. On s'aperçoit qu'avec cette définition les applications "cartes" sont des difféomorphismes. Poussant ce jeu un cran plus loin, on voit que, pour $f : M \rightarrow M'$ de classe C^1 au voisinage de x on peut définir le rang de f en x : c'est celui, lu dans les cartes, de $g' \circ f \circ g^{-1}$ en $g(x)$ et il ne dépend pas des cartes choisies car changer de cartes revient à composer l'application ci-dessus à droite et à gauche par des difféomorphismes, opération qui ne change pas le rang. En particulier, le théorème de la fonction réciproque s'applique : si $\dim M = \dim M' = n$ et si f est de rang n en x , alors f est un difféomorphisme au voisinage de x .

Il ne faut pas croire que l'on peut poursuivre ce jeu sans précautions. On peut donner un sens à la *différentielle* de f en x . De même, pour un chemin C^1 tracé sur une variété, on peut définir de façon intrinsèque le vecteur *vitesse*. En revanche, on ne peut définir le vecteur accélération ; Coriolis est là pour nous le rappeler ; la force de Coriolis est une force, dite d'*inertie*, qui dépend du repère utilisé par l'observateur, c'est-à-dire de la carte choisie.

1.1.4 Structures identiques, structures isomorphes

Deux atlas A_1 et A_2 de classes C^k sur M définissent des structures différentiables *identiques* si $A_1 \cup A_2$ est un atlas de classe C^k de M . Ceci veut dire que les changements de cartes de A_1 vers A_2 sont des difféomorphismes. On vérifie facilement que cela revient à dire que les deux atlas produisent le même anneau de fonctions différentiables.

On s'aperçoit vite que cette relation d'équivalence est trop fine. Il existe une infinité de structures deux à deux non identiques sur une variété. Regardons-le par exemple sur \mathbb{R} . On

prend $M = \mathbb{R}$ et on choisit l'atlas A formé d'une seule carte (donc il n'y a pas de changements de cartes à considérer) : $V = \mathbb{R}$, $U = M$, et $g : U \rightarrow V$ est définies par $g(x) = x^3$. L'anneau des fonctions différentiables défini par A est constitué des fonctions de la forme $f(x^3)$ où f est une fonction différentiable au sens usuel. Cet anneau est un sous-anneau strict de l'anneau des fonctions différentiables sur \mathbb{R} .

Deux variétés sont *isomorphes* s'il existe un difféomorphisme de l'une vers l'autre ; on dit aussi qu'elles sont difféomorphes. Lorsqu'il s'agit de deux structures sur le même espace topologique, cela revient à dire qu'il existe un homéomorphisme $h : M \rightarrow M$ qui est différentiable si on équipe la source et le but des deux atlas respectifs. Cependant h peut ne pas être l'identité.

Muni de cette définition, on peut se demander quelle est la classification des variétés différentiables (connexes). En dimension 1 la réponse est simple à obtenir (voir Milnor [27]) : \mathbb{R} , \mathbb{R}_- , $[0, 1]$ et le cercle sont les seules variétés de dimension 1 connexes à isomorphisme . En dimension 2, le résultat est connu également. En plus grande dimension, les résultats sont partiels, mais ils sont le fruit de travaux majeurs. En 1956, J. Milnor a prouvé qu'il existe des structures différentiables sur la sphère S^7 non isomorphes à la structure standard, que l'on appelle des structures exotiques ; on parle des *sphères exotiques* [25]. Sur \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, il n'y a qu'une seule structure différentiable à isomorphisme près [41]. Le même résultat vaut pour \mathbb{R}^3 par des arguments complètement différents et difficiles [29] et, rappelons-le, pour \mathbb{R} et pour \mathbb{R}^2 , pour lesquels c'est facile. (En fait les deux dernières références donnent les résultats dans la catégorie dite *linéaire par morceaux*, mais les mêmes démonstrations fonctionnent mot à mot dans la catégorie différentiable ; d'ailleurs il est connu que jusqu'à la dimension 3 ces deux catégories sont équivalentes en un sens que l'on ne précisera pas ici). En revanche, les travaux de S. Donaldson [8] ont permis de construire une structure exotique sur \mathbb{R}^4 (voir le petit livre de M. Freedman et Feng Luo pour une présentation de ces questions [9]).

1.1.5 Rôle de la régularité C^k

Si M admet un atlas C^1 , alors il existe un atlas C^∞ définissant la même structure C^1 .

Ce résultat de R. Palais repose sur un argument de transversalité et pourra faire l'objet d'une application du chapitre 5. En revanche, d'après les travaux de Kirby et Siebenmann en 1968-69, il existe des variétés topologiques sans structures différentiables [20].

1.2 Exemples de variétés

Les premiers exemples de variétés sont les sous-variétés de \mathbb{R}^m . Juste après viennent les variétés quotients.

1.2.1 Sous-variétés (sans bord)

Une partie $M \subset \mathbb{R}^m$ est une *sous-variété* de dimension n si, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage W de x dans \mathbb{R}^m , un ouvert W' de \mathbb{R}^m et un difféomorphisme $\phi : W \rightarrow W'$ tel que

$$\phi(W \cap M) = W' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}),$$

où $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ est un sous-espace de coordonnées dans \mathbb{R}^m . On dit que ϕ est une *linéarisation locale* de M .

Une seconde définition, qui est équivalente à la première par le théorème des fonctions implicites, est la suivante :

Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage W de x dans \mathbb{R}^m et une application $f : W \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ différentiable, de rang maximum, telle que $W \cap M = f^{-1}(0)$. Autrement dit, M est défini localement par $m - n$ équations indépendantes.

La seconde définition est d'usage courant. Par exemple :

- la sphère S^n , sphère unité de \mathbb{R}^{n+1} ;
- le groupe spécial linéaire $SL(n)$ défini comme sous-variété de l'espace vectoriel M_n des matrices carrées $n \times n$ par l'équation $\det A = 1$;
- le groupe orthogonal $O(n)$ défini comme sous-variété de M_n par les équations $A^*A = I$ (attention aux équations redondantes dues à la symétrie de la matrice A^*A).

De la première définition il résulte que toute sous-variété de \mathbb{R}^m a une structure de variété.

En effet une sous-variété de \mathbb{R}^m est séparée, car \mathbb{R}^m l'est. Elle est localement fermée, donc intersection d'un ouvert et d'un fermé de \mathbb{R}^m ; il s'en suit qu'elle est union dénombrable de compacts car les ouverts de \mathbb{R}^m le sont. Enfin, l'atlas est donné par les difféomorphismes de linéarisation : une carte est donnée par $U = W \cap M$, $V = W' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ et $g = \phi|_V$. Les changements de cartes sont donnés par des difféomorphismes d'ouverts de \mathbb{R}^m restreints à $\mathbb{R}^n \times \{0\}$; ce sont bien des difféomorphismes d'ouverts de \mathbb{R}^n .

Si M' est une variété de dimension m , une partie $M \subset M'$ est une sous-variété si, dans les cartes de M' , M apparaît comme une sous-variété. La définition des sous-variétés à bord est laissée au soin du lecteur.

1.2.2 Plongements

Une application $f : M \rightarrow M'$ est une *immersion* si f est de rang maximum égal à la dimension de M en chaque point de la source. L'application f est un *plongement* si l'image $f(M)$ est une sous-variété de M' et si f est un difféomorphisme de M sur $f(M)$ munie de sa structure de variété. En particulier, un plongement est une immersion injective, mais la réciproque n'est pas vraie.

La définition de plongement est délicate à manier ; il n'y a pas de caractérisation élémentaire. Cependant, le critère suivant est commode. On rappelle qu'une application est *propre* si la

préimage de tout compact est compact. A l'aide du théorème des fonctions implicites, on prouve (exercice) l'énoncé ci-dessous.

Si $f : M \rightarrow M'$ est injective, propre et de rang maximum, alors f est un plongement.

A l'aide de partitions de l'unité qui seront exposées à la fin de ce chapitre, on prouve facilement que toute variété de dimension n admet un plongement propre dans un espace affine \mathbb{R}^N , si N est choisi suffisamment grand. On essaie alors d'abaisser la dimension du but en composant avec des projections $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \dots$. En choisissant bien les projections successives (par application du lemme de Sard – voir chap. 5), on peut ramener la dimension de l'espace but à $2n + 1$; ceci est un théorème de H. Whitney.

Dans un premier temps, on pourrait être tenté de n'étudier que les sous-variétés des espaces affines. Ce point de vue se révèle désastreux, en particulier pour les quotients; la plupart des variétés n'ont pas de plongement naturel dans un \mathbb{R}^N .

1.2.3 Variété quotient

On envisage à titre d'exemple un seul type de quotient, celui par action de groupe discret. Précisément, on se donne une variété M et un sous-groupe G du groupe $\text{Diff}(M)$ des difféomorphismes de M . On suppose que G agit *librement*, ce qui signifie que, pour tout $x \in M$ et tout $g \neq \text{Id}$, on a $g.x \neq x$. On suppose aussi que G agit *proprement*, ce qui, en utilisant le fait que M est localement compact, peut s'exprimer comme suit : pour tout compact K de M et pour tout $g \in G$, excepté au plus un nombre fini d'éléments, on a $g.K \cap K = \emptyset$. *Dans ces conditions, l'espace topologique quotient $G \backslash M$ admet naturellement une structure de variété.*

On rappelle que, si $\pi : M \rightarrow G \backslash M$ désigne la projection qui à $x \in M$ associe sa classe d'équivalence, une partie $U \subset G \backslash M$ est ouverte si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans M . On remarque d'abord que le quotient est séparé : en effet, pour x et $x' \in M$ avec $x' \notin G.x$, on trouve (exercice) des voisinages (compacts) V et V' respectivement de x et x' dans M , tels que $(G.V) \cap V' = \emptyset$ ($G.V$ désigne la réunion des $g.V$ lorsque g parcourt G). Alors $\pi(G.V)$ et $\pi(G.V')$ sont des voisinages disjoints de $\pi(x)$ et $\pi(x')$ respectivement. Evidemment le quotient est union dénombrable de compacts.

Enfin, de façon analogue à ci-dessus, pour tout x il existe un voisinage U de x tel que $g.U \cap U = \emptyset$ si $g \neq \text{Id}$. Dans ces conditions, $\pi|_U$ est un homéomorphisme. Si U est un ouvert de cartes pour M , on fabrique un atlas du quotient avec les cartes $U \rightarrow \pi(U)$. Les changements de cartes sont essentiellement donnés par les difféomorphismes du groupe G . Si U_1, U_2 sont deux cartes de M avec $\pi(U_1) = \pi(U_2)$ et telles que $\pi|_{U_i}$ soit injectif, il y a exactement un $g \in G$ tel que $g.U_1 = U_2$.

Les exemples de cette situation sont très nombreux :

- l'espace projectif réel \mathbb{P}^n , quotient de la sphère S^n par l'involution antipodale ;
- le tore \mathbb{T}^n , quotient de \mathbb{R}^n par le groupe des translations entières.

On obtient toutes les surfaces orientables (compactes), autres que la sphère et le tore, comme quotient du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{x + iy \mid y > 0\}$ par l'action de certains sous-groupes

discrets du groupe des homographies

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1,$$

(voir [34], [3]).

Les quotients $M \rightarrow_G M$ dont on vient de parler sont des *revêtements* (réguliers ou galoisiens); (voir le livre de C. Godbillon [12], et aussi [14], [24]). Il y a d'autres types de quotients qui sont des variétés, par exemple $O(n+k)/O(n)$, qui est la *grassmannienne* des n -plans dans \mathbb{R}^{n+k} .

1.2.4 Atlas abstrait

Toute variété s'obtient comme quotient à partir de ses cartes; c'est ce que l'on explique maintenant et qui nous servira à construire l'espace tangent.

On considère un atlas $A = \{g_i : U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ d'une variété M . On ne garde de cette donnée que les V_i , ouverts de \mathbb{R}^n (ou de \mathbb{R}^n) et les changements de cartes g_{ij} ; ils vérifient la relation de cocycle. On a alors un *atlas abstrait*. Il est dit "abstrait", parce que l'on oublie l'espace topologique M .

A partir d'un tel atlas abstrait on peut reconstituer une variété : on forme la réunion disjointe $\coprod_{i \in I} V_i$ et on met la relation d'équivalence suivante : $x \in V_i$ est identifié à $y = g_{ji}(x)$; c'est une relation d'équivalence à cause de la relation de cocyclicité des g_{ij} . Lorsque l'atlas abstrait vient de l'atlas d'une variété M , l'espace quotient est homéomorphe à M et g_i^{-1} n'est autre que la projection sur le quotient restreinte à V_i .

Comme on va le voir dans le cas de l'espace tangent, on peut construire des variétés uniquement à partir d'un atlas abstrait. L'inconvénient est qu'il n'existe aucun critère simple sur l'atlas permettant d'affirmer que le quotient est séparé. Il faut faire une étude à la main. En revanche, si l'ensemble d'indices I est dénombrable, il est clair que le quotient est dénombrable à l'infini.

1.3 Le fibré tangent (C^∞)

AVERTISSEMENT PRÉLIMINAIRE

La construction de l'espace tangent est un exemple (il y en a d'autres avec les formes différentielles) où il y a une *perte de différentiabilité*. Pour cette raison, nous ne considérerons dans la suite que des variétés C^∞ et des applications C^∞ . Sauf mention du contraire le qualificatif "différentiable" signifiera dorénavant C^∞ .

1.3.1 Construction de l'espace tangent

Pour deux chemins de classe C^1 , $\gamma_1, \gamma_2 : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow M$, passant par le point x au temps $t = 0$ ($\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$), cela a un sens de dire que leurs vitesses à $t = 0$ sont les mêmes puisqu'on peut le lire dans les cartes et que cette propriété est invariante par changement de cartes. Il reste à créer en chaque point $x \in M$ un espace vectoriel $T_x M$ dans lequel vivra le vecteur vitesse $\dot{\gamma}_i(0)$.

L'ESPACE TANGENT D'UN OUVERT DE \mathbb{R}^n

Soit V un ouvert de \mathbb{R}^n et $x \in V$; on pose évidemment $T_x V = \mathbb{R}^n$. Tout vecteur de \mathbb{R}^n est vecteur vitesse d'un chemin passant en x . Noter que le \mathbb{R}^n contenant V est l'espace affine tandis que le \mathbb{R}^n des vecteurs vitesse est l'espace vectoriel. Si on considère tous les $T_x V$ ensemble, on définit l'espace tangent $TV = V \times \mathbb{R}^n$, muni de sa topologie d'ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

LA MÉTHODE DE L'ATLAS ABSTRAIT

On considère un atlas A de M . Si g_{ji} est un changement de cartes, on a un isomorphisme linéaire naturel

$$T_x V_i \longrightarrow T_{g_{ji}(x)} V_j$$

donné par

$$X \longmapsto dg_{ji}(x) X$$

où $dg_{ji}(x)$ est la différentielle de g_{ji} en x . Cet isomorphisme est celui qui fait correspondre les vecteurs vitesses de γ et de $g_{ji} \circ \gamma$.

On considère alors l'atlas abstrait formé avec les cartes $TV_i = V_i \times \mathbb{R}^n$ et les changements de cartes $G_{ji} = (g_{ji}, dg_{ji}) : TV_{ji} \rightarrow TV_{ij}$ définis sur $V_{ji} \times \mathbb{R}^n$ par

$$(x, X) \mapsto (g_{ji}(x), dg_{ji}(x)X).$$

On note TM l'espace quotient de cet atlas abstrait (exercice : démontrer qu'il est séparé); c'est le *fibré tangent* de M . Il est muni d'une projection

$$p : TM \rightarrow M$$

qui, dans les cartes, est la projection

$$V_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow V_i.$$

Pour $x \in M$, $T_x M = p^{-1}(x)$ est l'espace vectoriel tangent, encore appelé la *fibres* en x du fibré tangent. Un vecteur de cet espace vectoriel est une classe d'équivalence de l'union disjointe $\coprod T_{x_i} V_i$, où les x_i sont les différentes représentations du point x dans les cartes. Maintenant si $\gamma : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow M$ est un chemin de classe C^1 avec $x = \gamma(0)$, le vecteur $\dot{\gamma}(0)$ est bien défini comme élément de $T_x M$.

La différence fondamentale entre le cas d'un ouvert de \mathbb{R}^n et celui d'une variété est la suivante : pour deux points distincts $x, y \in M$, il n'y a pas d'isomorphisme canonique entre $T_x M$ et $T_y M$, même si x et y sont proches. De ce fait, il n'est pas possible de définir l'accélération

$\ddot{\gamma}(0)$ comme vecteur tangent ; d'ailleurs ce fait est bien connu sur une surface de \mathbb{R}^3 non plane.

Sans entrer dans une théorie des fibrés vectoriels, dont un aperçu sera donné plus loin, faisons tout de même la remarque suivante. En général, TM n'est pas un fibré produit $M \times \mathbb{R}^n$; c'est *localement* un produit (voir le paragraphe suivant 1.3.2). Si U_i est un ouvert de carte, $p^{-1}(U_i)$ est un produit isomorphe à $U_i \times \mathbb{R}^n$, par un isomorphisme

$$\Phi : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$$

qui, sur chaque fibre, est un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$p^{-1}(x) \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n.$$

Par exemple, TS^2 n'est pas un fibré produit, ce qui est une conséquence du fait suivant.

Sur la sphère S^2 , il n'existe pas de champ de vecteurs partout non nul.

PREUVE sous forme d'exercices. On utilise l'atlas de la sphère formé de deux cartes, à savoir le complémentaire de chaque pôle. Écrire le changement de cartes. Soit X un champ de vecteurs tangents à la sphère et sans zéros ; la restriction de X à l'équateur donne lieu dans la carte du pôle nord (resp. du pôle sud) à une application X_N (resp. X_S) : $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Chacune des applications X_N et X_S est homotope à une application constante. Vu le changement de cartes ceci est contradictoire.

1.3.2 Application tangente

Pour une application différentiable $f : M \rightarrow N$, on a une application

$$Tf : TM \rightarrow TN$$

dite *application tangente*, qui est linéaire sur les fibres $T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$: si $X = \dot{\gamma}(0)$, alors $Tf(X)$ est le vecteur vitesse au temps 0 du chemin $f \circ \gamma$. Si f est un difféomorphisme, Tf induit un isomorphisme linéaire sur chaque fibre. Puisque les cartes de M sont des applications différentiables, on a, pour tout i , une application tangente $Tg_i^{-1} : TV_i \rightarrow TM$ dont l'image est $p^{-1}(U_i)$ et Tg_i donne un isomorphisme de $p^{-1}(U_i)$ avec le produit $TV_i = U_i \times \mathbb{R}^n$.

La dérivation des applications composées donne la formule :

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf.$$

Si M est une sous-variété de N , la considération des difféomorphismes de linéarisation permet de voir que TM est une sous-variété de TN avec $T_x M$ comme sous-espace vectoriel de $T_x N$ pour tout point $x \in M$. Par exemple, si N est un ouvert de \mathbb{R}^n et si M est définie comme sous-variété de N par l'équation $M = \{f = 0\}$, où $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^k$ est une application C^∞ . Alors TM est une sous-variété de $N \times \mathbb{R}^n$ définie par les équations suivantes :

$$f(x) = 0, \quad df(x)X = 0,$$

ou encore $Tf(x, X) = (0, 0)$ (ici (x, X) désigne le point courant de TN et $(0, 0)$ est le zéro de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$).

1.3.3 Transversalité

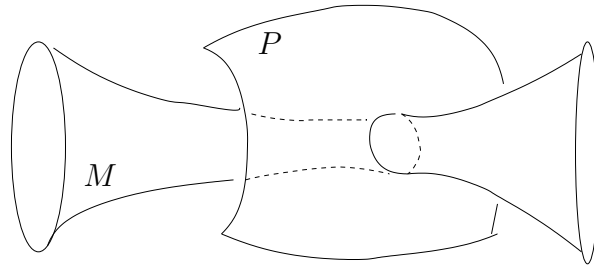
On se donne une application de classe C^1 , $f : M^m \rightarrow N^n$, et une sous-variété P^p de N . On dit que f est *transversale* sur P si, pour tout $x \in f^{-1}(P)$, on a :

$$(*) \quad T_{f(x)}N = T_{f(x)}P + Tf(T_xM).$$

Si $h = 0$ est une équation locale de P dans N , au voisinage de $f(x)$, (h est à valeurs dans \mathbb{R}^{n-p}), l'application $T(h \circ f) : T_xM \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ est de rang maximum au voisinage de x . Ainsi : $f^{-1}(P)$ est une sous-variété de M de même codimension que celle de P dans N .

Noter que, si E_x est un supplémentaire de $T_x(f^{-1}(P))$ dans T_xM , alors $Tf|E_x$ est un isomorphisme sur un supplémentaire de $T_{f(x)}P$ dans $T_{f(x)}N$.

Un cas particulier, plus facile à visualiser, est celui où M et P sont deux sous-variétés de N se rencontrant transversalement : l'intersection $M \cap P$ est une sous-variété dont la codimension est la somme des codimensions de M et de P .



Remarque. On a la propriété d'*ouverture* suivante : si $(*)$ vaut en un point x_0 de $f^{-1}(P)$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans M tel que $(*)$ soit vrai en tout point $x \in U \cap f^{-1}(P)$. En effet $(*)$ signifie que $Tf : T_xM \rightarrow T_{f(x)}N/T_{f(x)}P$ est un morphisme linéaire surjectif. Comme l'espace des surjections linéaires $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ est un ouvert dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{n-p})$, $(*)$ ne peut être détruit en passant de x_0 à un point voisin de $f^{-1}(P)$.

1.4 Le bord d'une variété

1.4.1 Cas de \mathbb{R}_-^n

Le *bord* de \mathbb{R}_-^n est l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$. Notons-le comme le seront tous les bords dans la suite : $\partial\mathbb{R}_-^n$. La définition du bord d'une variété repose sur le *lemme d'invariance du bord* ci-dessous. Ce lemme est facile pour les difféomorphismes ; il est aussi vrai pour les homéomorphismes, mais dans ce cas, sa preuve met en jeu des outils puissants de topologie algébrique.

Lemme. Soit V, W deux ouverts de \mathbb{R}_-^n et $f : V \rightarrow W$ un difféomorphisme. Alors $f(V \cap \partial\mathbb{R}_-^n) = W \cap \partial\mathbb{R}_-^n$.

Preuve. Par raison de symétrie, il suffit de prouver l'inclusion. Soit $a \in V \cap \partial\mathbb{R}_-^n$; on peut construire une fonction différentiable $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ admettant un minimum local en a avec $dh(a) \neq 0$. Alors $h \circ f^{-1}$ admet un minimum local en $f(a)$ et sa différentielle y est non nulle. Donc $f(a) \in \partial\mathbb{R}_-^n$ car le calcul différentiel nous apprend qu'en un minimum local sur un ouvert de \mathbb{R}^n la différentielle d'une fonction C^1 s'annule. \square

1.4.2 Cas d'une variété

Soit M une variété différentiable avec un atlas $A = \{g_i : U_i \rightarrow V_i\}$. On définit le *bord* de M par

$$\partial M \cap U_i = g_i^{-1}(V_i \cap \partial\mathbb{R}_-^n).$$

Le lemme affirme que cette définition ne dépend pas de la carte.

Le bord de M est une variété sans bord (= à bord vide) de dimension $n - 1$. Son atlas est donné par la restriction des g_i à $\partial\mathbb{R}_-^n = \mathbb{R}^{n-1}$. L'*intérieur* est formé des points de M qui ne sont pas sur le bord : toujours par le lemme d'invariance du bord, ce sont exactement ceux qui ont une carte dans un ouvert de \mathbb{R}^n .

1.5 Partitions de l'unité

1.5.1 Paracompacité

On présente ici la version C^∞ de la propriété de *paracompacité* des espaces localement compacts dénombrables à l'infini.

Proposition. Soit M une variété C^∞ et $\mathcal{R} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert. Alors il existe des fonctions C^∞ , $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}_+$, vérifiant les propriétés suivantes :

- 1) le support de f_i est contenu dans U_i ;
- 2) la famille $\{\text{supp } f_i\}_{i \in I}$ est localement finie, c'est-à-dire que chaque point a un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de ces supports;
- 3) $\sum_i f_i = 1$.

Commentaire. En imposant de garder le même ensemble d'indices, il faut s'attendre à ce que beaucoup des fonctions f_i soient nulles. Leur support est alors vide.

Démonstration. Appelons *boule* tout ouvert de M d'adhérence compacte, difféomorphe à la boule ouverte standard de \mathbb{R}^n (ou à la demi-boule, s'il y a un bord). Pour toute boule B , il existe une fonction "cloche" C^∞ , ≥ 0 , strictement positive sur une sous-boule. Soit alors une suite exhaustive de compacts avec $K_n \subset \text{int } K_{n+1}$. Pour tout x dans l'adhérence de $K_{n+1} - K_n$, on choisit une boule B_x munie d'une fonction cloche g_x avec $g_x(x) > 0$. La boule B_x est assez petite pour être dans l'un des U_i et pour être dans $K_{n+2} - K_{n-1}$.

On applique la propriété de Borel-Lebesgue au recouvrement de $\overline{K_{n+1} - K_n}$ par les ouverts $g_x^{-1}(]0, +\infty[)$, ce qui, pour chaque n conduit à ne garder qu'un nombre fini de boules B_x .

Finalement, on a un ensemble dénombrable d'indices J et de fonctions cloches g_j avec les propriétés suivantes :

- la famille des $\text{supp } g_j$ est localement finie, puisqu'au plus un nombre fini d'entre eux rencontre K_n ;
- $\text{supp } g_j$ est contenu dans l'un des ouverts du recouvrement \mathcal{R} ; on choisit l'un d'eux que l'on note $U_{i(j)}$;
- pour tout $x \in M$, il existe j tel que $g_j(x) > 0$.

La finitude locale des supports permet de dire que la somme de la série $\sum_j g_j$ est une fonction C^∞ . On pose alors

$$f_i = \frac{\sum_{i(j)=i} g_j}{\sum_j g_j} ;$$

le numérateur est nul s'il n'existe pas d'indices j tels que $i(j) = i$. Les fonctions f_i ont les propriétés requises. □

Voici maintenant un autre énoncé, très classique en paracompacité.

Lemme de rétrécissement. *Dans les mêmes conditions que ci-dessus, il existe un recouvrement ouvert $\{V_i\}$ avec $\overline{V_i} \subset U_i$ et tel que la famille $\{\overline{V_i}\}$ soit localement finie.*

Preuve. La solution est $V_i = f_i^{-1}(]0, \infty[)$. □

1.5.2 Métriques riemanniennes

Une métrique riemannienne est la donnée d'un produit scalaire euclidien $\mu(x)$ sur chaque espace vectoriel tangent $T_x M$, dépendant C^∞ de x . Cette dernière condition a un sens clair sur un ouvert de cartes car, si V est un ouvert de \mathbb{R}^n , $\mu(x)$ est donnée par une matrice symétrique définie positive ; on demande alors que ses coefficients soient des fonctions C^∞ .

L'espace des matrices réelles symétriques définies positives est un *convexe*. S'appuyant sur cette observation et grâce aux patitions de l'unité, on laisse en exercice de prouver :

Sur toute variété C^∞ , il existe une métrique riemannienne.

Si on retire l'hypothèse de dénombrabilité à l'infini dans la définition de variété, on peut perdre l'existence de métrique riemannienne ; par exemple, la "ligne longue" n'a pas de métrique riemannienne (voir [40], App.A).

Dans la suite de ce cours, nous n'utiliserons les métriques riemanniennes que très accessoirement ; ce sera surtout pour parler des champs de gradient dans le cadre de la théorie de Morse (chap. 6).

1.6 Voisinages tubulaires

Un livre de référence pour ce paragraphe et le suivant est le livre de M. Hirsch [18].

1.6.1 Fibré normal d'une sous-variété de \mathbb{R}^n

Soit M^m une sous-variété compacte sans bord de dimension m dans \mathbb{R}^n . On définit son *fibré normal* $\nu(M, \mathbb{R}^n)$ comme une sous-variété de l'espace tangent $T\mathbb{R}^n$. Il est défini comme l'ensemble

$$\nu(M, \mathbb{R}^n) = \{(x, \vec{v}) \in T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \in M \text{ et } \langle \vec{v}, T_x M \rangle = 0\}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien de \mathbb{R}^n . On observe que $\nu(M, \mathbb{R}^n)$ est muni d'une projection $p : \nu(M, \mathbb{R}^n) \rightarrow M$, donnée par $p(x, \vec{v}) = x$. La *fibre* $p^{-1}(x)$ est un espace vectoriel, appelé *espace normal* à M en x et noté $\nu_x(M, \mathbb{R}^n)$.

Proposition. *Le fibré normal $\nu(M, \mathbb{R}^n)$ est une sous-variété de $T\mathbb{R}^n$ de dimension n ; la projection p est différentiable et de rang m .*

Démonstration. Soit a un point de M . On choisit une carte linéarisante sur un voisinage U de a dans M . Elle donne d'une part $n - m$ équations indépendantes $f_1 = 0, \dots, f_{n-m} = 0$ de M le long de U et d'autre part m champs de vecteurs indépendants X_1, \dots, X_m tangents à M . Alors

$$\begin{aligned} f_1 = 0, \dots, f_{n-m} = 0 \\ \langle X_1(x), \vec{v} \rangle = 0, \dots, \langle X_m(x), \vec{v} \rangle = 0 \end{aligned}$$

sont n équations indépendantes pour $\nu(M, \mathbb{R}^n)$ le long de $p^{-1}(U)$.

Un vecteur tangent à $\nu(M, \mathbb{R}^n)$ au point (x, \vec{v}) est donné par un couple $(\delta x, \delta \vec{v})$ où δx est un vecteur tangent à M en x et où $\delta \vec{v} \in \nu_x(M, \mathbb{R}^n)$. L'application tangente à la projection est

$$Tp_{(x, \vec{v})}(\delta x, \delta \vec{v}) = \delta x.$$

Elle est donc surjective. □

1.6.2 Voisinage tubulaire pour une sous-variété de \mathbb{R}^n

Soit $r > 0$; l'ensemble des $(x, \vec{v}) \in \nu(M, \mathbb{R}^n)$ vérifiant $|\vec{v}| \leq \epsilon$ (ici $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^n) est une sous-variété compacte à bord de $\nu(M, \mathbb{R}^n)$, appelée *tube* de rayon r et notée $T(r)$. L'ensemble des $(x, \vec{0})$ est la section nulle ; c'est une sous-variété dans l'intérieur du tube. Enfin, on considère l'application, dite *exponentielle* $e : \nu(M, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$e(x, \vec{v}) = x + \vec{v}.$$

(L'exponentielle des géomètres a effectivement une parenté avec la fonction exponentielle $x \mapsto e^{ix}$.)

Proposition. *Si r est assez petit, la restriction de e au tube $T(r)$ de rayon r est un difféomorphisme sur son image, laquelle est donc un voisinage de M dans \mathbb{R}^n , dit voisinage tubulaire.*

Démonstration.

1) En tout point de la section nulle, e est de rang n . En effet, l'application tangente Te vaut :

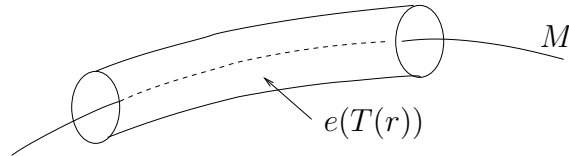
$$Te_{(x, \vec{0})}(\delta x, \delta \vec{v}) = \delta x + \delta \vec{v}.$$

Comme $T_x \mathbb{R}^n = T_x M \oplus \nu_x(M, \mathbb{R}^n)$, $Te_{(x, \vec{0})}$ est surjective donc bijective. C'est d'ailleurs l'identité (en un sens que l'on pourra chercher à comprendre). Comme l'ensemble des points (x, \vec{v}) où $Te_{(x, \vec{v})}$ est inversible est un ouvert, la restriction de e à un tube de rayon r_0 assez petit est une application de rang n .

2) Il reste à voir qu'il existe r , $0 < r \leq r_0$, tel que $e|_{T(r)}$ soit injective. Si ce n'est pas le cas, on a, pour tout entier n , des éléments distincts (x_n, \vec{v}_n) et (x'_n, \vec{v}'_n) dans $T(1/n)$ avec

$$x_n + \vec{v}_n = x'_n + \vec{v}'_n.$$

Mais, par compacité de M , quitte à prendre une sous-suite, on a $x_n \rightarrow a$. Comme \vec{v}_n et \vec{v}'_n tendent vers $\vec{0}$, on a aussi $x'_n \rightarrow a$. Par le théorème de la fonction réciproque, on sait que la restriction de e à un petit voisinage de $(a, \vec{0})$ est un difféomorphisme sur son image et, en particulier, qu'elle y est injective. Or, pour n assez grand, les points (x_n, \vec{v}_n) et (x'_n, \vec{v}'_n) sont dans ce voisinage, ce qui contredit l'injectivité. \square



Remarques. 1) Le raisonnement fait dans la seconde partie de la démonstration vaut dans un cadre plus général : *une application, qui est une immersion au voisinage d'une sous-variété compacte et qui est injective sur la sous-variété, est injective sur un voisinage.*

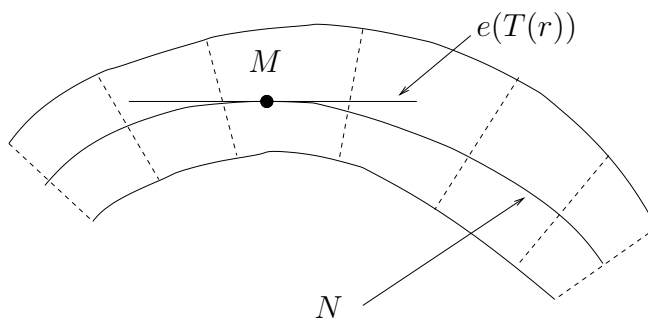
2) Comme un voisinage tubulaire est une image par difféomorphisme d'un tube, il hérite de la même structure : il est muni d'une projection sur M et les fibres sont difféomorphes à des boules d'un espace euclidien.

3) On peut faire la même construction si M est une sous-variété à bord. Mais dans ce cas on fait un abus de langage car un voisinage tubulaire n'est plus un voisinage de M , mais seulement de $M - \partial M$.

1.6.3 Cas général

Soit M^m une sous-variété compacte d'une variété N^n , laquelle peut être supposée compacte quitte à se restreindre à un voisinage de M . On peut donc plonger N comme sous-variété d'un espace euclidien \mathbb{R}^q . On définit alors le *fibré normal* $\nu(M, N)$ comme l'ensemble $\{(x, \vec{v}) \mid x \in M, \vec{v} \in T_x N, \langle \vec{v}, T_x M \rangle = 0\}$ (on verra en 1.7 une définition plus intrinsèque!). D'après 1.6.2, on a un voisinage tubulaire T de N dans \mathbb{R}^q , muni d'une projection π . Soit $T(r)$ le tube de rayon r de $\nu(M, N)$ (formé des vecteurs de norme $\leq r$) et soit e l'application exponentielle $e : \nu(M, N) \rightarrow \mathbb{R}^q$, $e(x, \vec{v}) = x + \vec{v}$. Si r est assez petit, $e(T(r)) \subset T$; par suite, la composée $\pi \circ e$ est bien définie. C'est une application de rang n en tout point de la section nulle. C'est donc une immersion sur un tube plus petit; quitte à restreindre encore, $\pi \circ e$ est un difféomorphisme sur son image. *L'image du plongement d'un tube du fibré normal $\nu(M, N)$*

est un voisinage tubulaire. Il est muni d'une projection p sur M dont les fibres sont des boules de l'espace euclidien $n - m$.



Le voisinage tubulaire construit ci-dessus dépend beaucoup du plongement choisi de N dans \mathbb{R}^q . On peut établir sans grande peine que tous les voisinages tubulaires sont équivalents entre eux pour la relation dite d'*isotopie*.

1.7 Aperçu sur la théorie des fibrés

Références : [Hirsch], [Steenrod]

La démarche est très analogue à celle utilisée pour définir les variétés. Ici la structure, au lieu de concerner un espace topologique, concerne une application $p : E \rightarrow B$. Après une définition générale, on se limitera aux fibrés vectoriels.

1.7.1 Fibré de fibre type F et de groupe structural G

On se donne un espace topologique F et un sous-groupe G du groupe des homéomorphismes de F .

Le *fibré trivial* de base B est le triplet $\xi = (E, p, B)$, où $E = B \times F$ et où p est la première projection ; dans ce cas le groupe G ne joue aucun rôle.

Un *espace fibré* général $\xi = (E, p, B)$ a une structure de fibré trivial au-dessus de chaque ouvert d'un recouvrement ouvert de la base. Expliquons cela précisément.

Définition 1. Soit U un ouvert de B ; une *trivialisantion* de ξ au-dessus de U est un homéomorphisme $\Phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tel que $pr_1 \circ \Phi = p$, où pr_1 désigne la première projection. S'il existe une telle trivialisantion, on dit que U est un *ouvert trivialisant*.

Si U_i et U_j sont deux ouverts trivialisants, on a un homéomorphisme, dit *changement de trivialisantion*, Φ_{ji} de $(U_i \cap U_j) \times F$ dans lui-même, donné par

$$\Phi_{ji} = \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}.$$

On observe que $pr_1 \circ \Phi_{ji} = pr_1$, donc :

$$\Phi_{ji}(x, y) = (x, H_{ji}(x, y)),$$

et que, pour x fixé, $y \mapsto H_{ji}(x, y)$ est un homéomorphisme $h_{ji}(x)$ de F :

$$\Phi_{ji}(x, y) = (x, h_{ji}(x)(y)).$$

Définition 2. Le triplet $\xi = (E, p, B)$ admet une structure de G -fibré de fibre type F s'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de B et des trivialisantions Φ_i au-dessus de U_i de sorte que les changements de trivialisantion soient donnés par

$$x \in U_i \cap U_j \longrightarrow h_{ji}(x) \in G.$$

Noter la relation de cocycle : si $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$,

$$h_{ik}(x) h_{kj}(x) h_{ji}(x) = \text{Id},$$

où le produit est au sens du groupe G , c'est-à-dire la composition dans $\text{Homéo}(F)$, et où Id est l'élément neutre.

On dit que E est *l'espace total* du fibré ; il est fréquent de l'utiliser pour désigner le fibré, au lieu de nommer tout le triplet. La *fibre* au-dessus de x est $p^{-1}(x)$.

Définition 3. Un *isomorphisme* entre deux fibrés $\xi_1 = (E_1, p_1, B)$ et $\xi_2 = (E_2, p_2, B)$ de même fibre type F au-dessus de la même base B est un homéomorphisme $\Psi : E_1 \rightarrow E_2$ avec les propriétés suivantes :

- 1) $p_2 \circ \Psi = p_1$;
- 2) si U est un ouvert trivialisant pour les deux fibrés, avec des trivialisantions respectives Φ et Φ' , alors $\Phi' \circ \Psi \circ \Phi^{-1}$ est un homéomorphisme de $U \times F$ dans lui-même de la forme

$(x, y) \mapsto (x, h(x)(y))$, où $h(x) \in G$ pour tout $x \in U$.

Comme pour les variétés, on peut utiliser la méthode de l'atlas abstrait. On se donne la base B , un recouvrement ouvert $\{U_i\}$; sur chaque U_i , on pose le fibré trivial de fibre F . Au-dessus de chaque $U_i \cap U_j$ on se donne un changement de trivialisations $(x, y) \mapsto (x, h_{ji}(x)(y))$ de sorte que sur les intersections triples la relation de cocycle soit satisfaite. Avec ces données, on construit un vrai fibré en recollant les fibrés triviaux les uns aux autres par les changements de trivialisations.

On rappelle que le fibré tangent a été construit de cette façon.

Exercice. Le ruban de Möbius \mathbf{M} est défini comme le quotient

$$\mathbf{M} = \mathbb{R} \times [-1, +1] / (x, y) \sim (x + 1, -y).$$

Il est muni d'une projection $p : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbf{Z}$, induite par $(x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, +1] \mapsto x \in \mathbb{R}$. Soit $F = [-1, +1]$ et $G = \mathbf{Z}/2 \subset \text{Homéo}(F)$, où l'élément non trivial est donné par l'homéomorphisme $g(y) = -y$. Montrer que $(\mathbf{M}, p, \mathbf{S}^1)$ a une structure de G -fibré de fibre F et que ce n'est pas un produit.

Dans le cas où les espaces sont des variétés et où p est différentiable, on peut demander que les trivialisations soient des difféomorphismes. On dira que l'on a un fibré différentiable. Dans ce secteur, il y a des questions très difficiles : on sait maintenant qu'un fibré différentiable peut être trivial comme fibré topologique mais pas comme fibré différentiable (voir [20]).

1.7.2 Fibré vectoriel (réel) de rang n

Dans ce cas, la fibre type est \mathbb{R}^n et le groupe G est le groupe linéaire $GL(n, \mathbb{R})$. Si (E, p, B) est un fibré vectoriel de rang n , pour tout x la fibre $p^{-1}(x)$ a une structure d'espace vectoriel isomorphe à \mathbb{R}^n . En effet, on peut mettre une telle structure en utilisant une trivialisations et, comme les changements de trivialisations sont linéaires fibre à fibre, celle-là ne dépend pas de la trivialisations choisie.

Si la base est paracompacte, c'est-à-dire si elle est séparée et admet des partitions de l'unité, il existe sur le fibré (E, p, B) une *métrique euclidienne*, c'est-à-dire un produit scalaire $\mu(x)$ sur chaque fibre, dont les coefficients varient continûment avec x (ce qui a un sens via les trivialisations locales).

N.B. Dans le cas où les espaces sont des variétés, il ne faut pas confondre une métrique euclidienne sur le fibré donné avec une métrique riemannienne sur la variété E , espace total du fibré, qui est en fait une métrique euclidienne sur son fibré tangent TE .

On donne dans ce qui suit quelques constructions de fibrés à partir d'un fibré donné. On le fait dans le cadre des fibrés vectoriels, même si, de toute évidence, certaines d'entre elles valent pour les fibrés de fibre quelconque.

1.7.3 Fibré induit

Soit $\xi = (E, p, B)$ un fibré vectoriel de rang n . Soit $f : B' \rightarrow B$ une application continue. On définit un fibré $f^*\xi$ de base B' appelé *fibré image réciproque* (*pullback* en anglais) de la façon suivante : son espace total E' est donné comme partie de $B' \times E$,

$$E' = \{(b', e) \in B' \times E \mid f(b') = p(e)\}$$

et la projection p' est la restriction à E' de la première projection.

On remarque que si ξ est trivial, alors $E' = \{(b', b, y) \in B' \times B \times \mathbb{R}^n \mid f(b') = b\}$ et que la projection $(b', b, y) \mapsto (b', y)$ est une trivialisations de $f^*\xi$. A partir de là, il est facile de déduire la proposition suivante.

Proposition. *Le triplet $f^*\xi = (E', p', B')$ est un fibré de rang n .*

Pour une inclusion $j : A \hookrightarrow B$, on parle du fibré induit ou du fibré *restreint* à A , que l'on note $\xi|_A$.

1.7.4 Sous-fibré

Soit $\xi = (E, p, B)$ un fibré de rang n . Soit $E' \subset E$ et $p' = p|_{E'}$. On dit que $\xi' = (E', p', B)$ est un *sous-fibré* de rang m ($m < n$), s'il existe des trivialisations locales de ξ , $\Phi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$, telles que $\Phi_i(p^{-1}(U_i) \cap E') = U_i \times \mathbb{R}^m \subset U_i \times \mathbb{R}^n$.

On dira que Φ_i *trivialisent simultanément* $\xi|_{U_i}$ et $\xi'|_{U_i}$.

Exercice. Montrer qu'il revient au même de dire que (E', p', B) a une structure de fibré vectoriel de rang m telle que, pour tout $b \in B$, $p'^{-1}(b)$ soit un sous-espace vectoriel de $p^{-1}(b)$.

1.7.5 Fibré quotient

On se donne sur B un fibré vectoriel ξ_1 de rang n et un sous-fibré ξ_2 de rang m . Le fibré quotient s'obtient en prenant les quotients fibre à fibre. La méthode de l'atlas abstrait convient bien pour rendre cela rigoureux.

On utilise un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de la base, muni de trivialisations simultanées pour les deux fibrés. Les changements de trivialisations sont donnés par des applications $x \in U_i \cap U_j \mapsto h_{ji}(x) \in GL(n, \mathbb{R})$. L'isomorphisme $h_{ji}(x)$ respecte le sous-espace $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$, donc il passe au quotient en $\bar{h}_{ji}(x)$ qui est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}^m$. De plus les $\bar{h}_{ji}(x)$ vérifient la relation de cocycle si x appartient à l'intersection de trois ouverts du recouvrement. Donc les \bar{h}_{ji} définissent un fibré vectoriel de rang $n - m$, qui est le *fibré quotient* ξ_1/ξ_2 .

D'autre part on a une application $\pi : \xi_1 \rightarrow \xi_1/\xi_2$, qui est linéaire surjective de la fibre en b de ξ_1 sur la fibre en b du quotient ; son noyau est la fibre en b de ξ_2 .

Par une méthode analogue, si ξ et ξ' sont deux fibrés vectoriels sur B , on définit la somme directe $\xi \oplus \xi'$ consistant à prendre la somme directe fibre à fibre.

Comme pour les espaces vectoriels, on a pour les fibrés le phénomène de scindement :

Proposition. *Sur une base paracompacte, tout sous-fibré ξ_2 d'un fibré vectoriel ξ_1 admet un fibré supplémentaire. Autrement dit, il existe un sous-fibré ξ'_2 de ξ_1 tel que ξ_1 soit isomorphe à $\xi_2 \oplus \xi'_2$; de plus, $\pi|_{\xi'_2} \rightarrow \xi_1/\xi_2$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On met une métrique euclidienne sur le fibré ξ_1 . On prend alors dans chaque fibre de ξ_1 l'orthogonal de la fibre de ξ_2 . On démontre que la collection de ces sous-espaces vectoriels dans chaque fibre forme un sous-fibré.

Voici une indication pour ce dernier fait. En présence d'une métrique euclidienne, on a des trivialisations qui non seulement sont simultanées pour ξ_1 et pour ξ_2 mais qui en outre transportent la métrique du fibré ξ_1 sur la métrique euclidienne standard de \mathbb{R}^n ; on les obtient par un procédé d'orthonormalisation. \square

Exemple. Si $M^m \subset N^n$ est une sous-variété d'une variété, on peut construire le fibré normal sans utiliser ni métrique riemannienne ni plongement dans un espace euclidien. On considère la restriction à M du fibré tangent TN , notée $T_M N$; le fibré normal $\nu(M, N)$ est le quotient $T_M N/TM$. En présence d'une métrique riemannienne sur N , on peut le réaliser comme un sous-fibré de $T_M N$ supplémentaire de TM .

Revenons au voisinage tubulaire, dans le cas où M est compacte. On peut voir qu'il a une structure de $O(n - m)$ -fibré dont la fibre type est la boule unité de \mathbb{R}^{n-m} .

1.7.6 Le théorème fondamental des fibrés

Pour simplifier, on ne considère ici que les fibrés de base compacte.

Théorème. *Soit ξ un fibré (vectoriel de rang n) de base $B \times [0, 1]$. Soit $\pi : B \times [0, 1] \rightarrow B \times \{0\}$ donné par la première projection. Alors ξ est isomorphe au fibré $\pi^*(\xi|_{B \times \{0\}}) = \pi^*\xi$.*

Démonstration. Par le lemme ε de Lebesgue, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $(x, t) \in B \times [0, 1]$, le segment $\{x\} \times [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$ est contenu dans un ouvert trivialisant. Ce ε étant fixé, on construit l'isomorphisme demandé de proche en proche au-dessus de $B \times [0, \varepsilon]$, puis de $B \times [\varepsilon, 2\varepsilon]$ etc. Regardons seulement la première étape puisque les autres sont identiques. La propriété de ε implique qu'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de B , fini ($i = 1, 2, \dots, m$) et tel que les $U_i \times [0, \varepsilon]$ soient contenus dans des ouverts trivialisants pour le fibré ξ .

On utilise alors une partition de l'unité $\{\lambda_i\}$ subordonnée au recouvrement $\{U_i\}$ et ses sommes partielles $\Lambda_k = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$; on a $\Lambda_m = 1$. On suppose pour une récurrence sur k que l'isomorphisme cherché est déjà construit au-dessus du compact

$$F_k = \{(x, t) \in B \times [0, \varepsilon] \mid \varepsilon \Lambda_k(x) \geq t\},$$

qui est le sous-graphe de $\varepsilon \Lambda_k$. On observe que les points de F_{k+1} qui ne sont pas dans F_k ont une première coordonnée x dans le support de λ_{k+1} . Donc la partie où il faut prolonger l'isomorphisme est une partie où les fibrés ξ et $\pi^*\xi$ sont triviaux. Si on choisit des trivialisations,

le problème consiste alors à prolonger au compact $C_k = \overline{F_{k+1} - F_k}$ une application h à valeurs dans $GL(n, \mathbb{R})$ donnée le long de $C_k \cap F_k$. Or il existe une rétraction évidente $\rho : C_k \rightarrow C_k \cap F_k$ qui à (x, t) associe $(x, \varepsilon \Lambda_k(x))$; la composée $h \circ \rho$ donne le prolongement cherché. \square

Remarque. Dans le cas où B est une variété et où le fibré est C^∞ , on peut adapter la démonstration ci-dessus pour produire un isomorphisme C^∞ : on suppose que h est donnée C^∞ au voisinage de F_k et il s'agit de construire \bar{h} , C^∞ au voisinage de F_{k+1} , dont la restriction à un voisinage de F_k coïncide avec h (exercice).

Corollaire. Soit $h : A \times [0, 1] \rightarrow B$ une application continue de source compacte; on note h_t la restriction de h à $A \times \{t\}$. Soit ξ un fibré de base B . Alors les fibrés $h_0^* \xi$ et $h_1^* \xi$ sont isomorphes.

Démonstration. On applique le théorème précédent au fibré $h^* \xi$. Il donne un isomorphisme entre $h^* \xi$ et $\pi^* h^* \xi$, où $\pi : A \times [0, 1] \rightarrow A \times \{0\}$ est donné par la première projection. Si on se restreint à $A \times \{1\}$, ces deux fibrés sont respectivement $h_1^* \xi$ et $h_0^* \xi$, à l'identification près de $A \times \{1\}$ à $A \times \{0\}$. \square En d'autres termes, deux applications *homotopes*, de source compacte,

induisent des fibrés isomorphes.

1.7.7 Base contractile

On dit que B est *contractile* s'il existe une application continue $c : B \times [0, 1] \rightarrow B$ telle que $c_0 = \text{Id}$ et $c_1 = \text{const}$. On dit que c est une *contraction*. Par exemple une partie convexe d'un espace euclidien est contractile.

Théorème. Tout fibré (vectoriel) sur une base compacte contractile est trivial.

Démonstration. Le corollaire ci-dessus nous dit que $c_1^* \xi$, qui n'est autre que le fibré trivial puisque c_1 est constante, est isomorphe au fibré $c_0^* \xi$, qui n'est autre que ξ lui-même. \square

En fait, la bonne hypothèse topologique est que la base soit paracompacte. Il existe des espaces contractiles (non paracompacts) portant des fibrés non triviaux (voir [40], App.A).

Chapitre 2

Formes différentielles

Références : le livre de C. Godbillon [11], et aussi [2], [6], [40].

2.1 Algèbre des formes k-linéaires alternées sur \mathbb{R}^n

Puisque de toutes façons les variétés nous obligeront à travailler dans les cartes et à faire des calculs de changements de cartes, pourquoi s'interdirait-on d'avoir recours aux bases pour introduire les formes multilinéaires alternées ? Celui qui est intéressé pourra chercher une approche plus abstraite et comparer l'efficacité de deux approches.

2.1.1 Base des formes k-linéaires alternées

Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . Soit (dx_1, \dots, dx_n) la base duale. Pour $I = (i_1, \dots, i_k)$, avec $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, on note dx_I la forme k-linéaire alternée sur \mathbb{R}^n définie par :

$$\begin{aligned} dx_I(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) &= 1 \\ dx_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) &= 0 \quad \text{si } j_1 \leq \dots \leq j_k \text{ et } |i_1 - j_1| + \dots + |i_k - j_k| \neq 0. \end{aligned}$$

On voit immédiatement que les dx_I forment une base de l'espace Λ^k des formes k-linéaires alternées sur \mathbb{R}^n (en toute rigueur, il faudrait noter cet espace $\Lambda^k(\mathbb{R}^{n*})$). Pour $\alpha \in \Lambda^k$, on dit que α est de *degré* k . On pose aussi $\Lambda^0 = \mathbb{R}$, l'espace des scalaires.

2.1.2 Produit extérieur

Pour $dx_I \in \Lambda^k$ et $dx_J \in \Lambda^{k'}$, on définit le *produit extérieur*

$$dx_I \wedge dx_J \in \Lambda^{k+k'}$$

de la façon suivante :

- $dx_I \wedge dx_J = 0$ si les deux suites I et J ont un terme en commun ;
- sinon, on note $R(I, J)$ la suite obtenue en réordonnant $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{k'})$, on note $\sigma(I, J)$ le nombre de transpositions utilisées pour ce réordonnement et on pose

$$dx_I \wedge dx_J = (-1)^{\sigma(I, J)} dx_{R(I, J)}.$$

Cette application se prolonge par bilinéarité :

$$\begin{aligned} \Lambda^k \times \Lambda^{k'} &\longrightarrow \Lambda^{k+k'}, \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta. \end{aligned}$$

On vient de fabriquer, de façon fort peu intrinsèque, l'algèbre extérieure ou *algèbre de Grassmann*.

On sait que la *signature* est un morphisme du groupe des permutations à valeurs dans $\{+, -\}$. On vérifie alors immédiatement que le produit extérieur est anticommutatif :

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} \beta \wedge \alpha$$

et qu'il est associatif :

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

On vérifie alors que :

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

le terme de droite étant l'écriture classique des éléments de la base canonique de Λ^k .

Les éléments non nuls de Λ^n s'appellent des *formes volumes*; $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ est la forme volume canonique de \mathbb{R}^n .

2.1.3 Produit intérieur par un vecteur

Soit $X \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \Lambda^k$; on définit le *produit intérieur* $i(X)\alpha$ comme étant la forme de degré $k - 1$ donnée par la formule

$$(i(X))\alpha(X_1, \dots, X_{k-1}) = \alpha(X, X_1, \dots, X_{k-1}).$$

C'est une *antidérivation* sur l'algèbre de Grassmann, c'est-à-dire que pour deux formes alternées α et β on a la formule :

$$i(X)(\alpha \wedge \beta) = i(X)\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge i(X)\beta.$$

Exercices

- 1) Etudier les noyaux et images des morphismes

$$\Lambda^{k+1} \xrightarrow{i(X)} \Lambda^k \xrightarrow{i(X)} \Lambda^{k-1}.$$

2) Montrer que

$$X \in \mathbb{R}^n \longmapsto i(X)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Lambda^{n-1}$$

est un isomorphisme.

3) \mathbb{R}^3 étant muni de son produit scalaire euclidien canonique et donc d'une identification avec son dual, étudier la composée

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} \Lambda^1 \times \Lambda^1 \xrightarrow{\wedge} \Lambda^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3$$

et constater qu'à isomorphisme près le produit extérieur coïncide avec le produit vectoriel usuel de \mathbb{R}^3 .

2.1.4 Composition avec une application linéaire

Soit $u : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Si α est une forme de degré k au but, on définit la forme $u^*\alpha$ comme forme de degré k à la source par la formule

$$u^*\alpha (X_1, \dots, X_k) = \alpha (u(X_1), \dots, u(X_k)) .$$

C'est la forme *image réciproque* de α par u . En anglais, cette opération est couramment appelée "pullback". On a donc un opérateur linéaire

$$u^* : \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*}) \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^{p*}) .$$

Que fait-on en coordonnées ? Soit (x_1, \dots, x_p) les coordonnées à la source, (y_1, \dots, y_n) les coordonnées au but. L'application u transforme les y en fonctions linéaires des x :

$$y_1 = u_1(x_1, \dots, x_p) \text{ etc.}$$

Alors la forme u^*dy_i est la différentielle de la fonction u_i :

$$u_i = \sum u_{ij}x_j , \quad u_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$du_i = \sum u_{ij}dx_j .$$

De même, un calcul brutal donne :

$$u^*(dy_I) = \sum_J \det(U_{IJ})dx_J$$

où J parcourt l'ensemble des suites à k termes strictement croissantes dans $\{1, \dots, n\}$, où U_{IJ} est la sous-matrice de la matrice de u obtenue en gardant les lignes dont le numéro appartient à I et les colonnes dont le numéro appartient à J . En particulier, si u est un endomorphisme de \mathbb{R}^n , il vient :

$$u^*(dx_{y_1} \wedge \dots \wedge dx_{y_n}) = \det u(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) .$$

Un autre calcul brutal donne

$$(u^* dy_{i_1}) \wedge \dots \wedge (u^* dy_{i_k}) = \sum_J \det(U_{IJ}) dx_J$$

où $I = (i_1, \dots, i_k)$.

La différence entre les deux calculs est que dans un cas le déterminant est développé selon les lignes et dans l'autre cas selon les colonnes. En conséquence, on a :

$$u^*(dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}) = u^* dy_{i_1} \wedge \dots \wedge u^* dy_{i_k}$$

et donc on a établi la proposition :

Proposition. *L'opérateur u^* commute avec le produit extérieur :*

$$u^*(\alpha \wedge \beta) = u^*\alpha \wedge u^*\beta .$$

Remarques.

Le recours à un calcul tient au fait qu'on n'a pas explicité la valeur de $(\alpha \wedge \beta)$ sur un système de $(\deg \alpha + \deg \beta)$ vecteurs.

Par ailleurs, la formule ci-dessus prouve que le produit extérieur est une opération indépendante des bases.

2.2 Formes différentielles sur un ouvert de \mathbb{R}^n

2.2.1 Définition

Soit V un ouvert de \mathbb{R}^n ; une forme différentielle de degré k (de classe C^∞) sur V est une application $(C^\infty) V \rightarrow \Lambda^k$. L'ensemble des formes différentielles de degré k sur V est noté $\Omega^k(V)$. Si $\alpha \in \Omega^k(V)$ et si $x \in V$, $\alpha(x)$ se calcule sur un système de k vecteurs de \mathbb{R}^n auxquels, en prévision de la suite, on pense comme vecteurs tangents en x , c'est-à-dire vecteurs de $T_x V$.

2.2.2 Produit extérieur, composition avec une application

Si $\alpha \in \Omega^k(V)$ et $\beta \in \Omega^{k'}(V)$, on définit le produit extérieur $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+k'}(V)$ par

$$(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x).$$

Ce produit est anticommutatif : $\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg(\alpha)\deg(\beta)} \beta \wedge \alpha$.

Soit $f : U \rightarrow V$ une application C^∞ d'un ouvert U de \mathbb{R}^n vers un ouvert V de \mathbb{R}^p et soit $\alpha \in \Omega^k(V)$. On définit $f^*\alpha$ par la formule suivante, où $x \in U$ et $X_1, \dots, X_k \in T_x U$:

$$f^*\alpha(x)(X_1, \dots, X_k) = \alpha(f(x))(Tf X_1, \dots, Tf X_k)$$

ou encore

$$f^*\alpha(x) = (df(x))^*\alpha(f(x)) .$$

Si y_1, \dots, y_p désignent les coordonnées du but, on a

$$\alpha = \sum \alpha_{j_1 \dots j_p} dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_p} ,$$

où les α_J sont des fonctions C^∞ sur V . Par f , les y_j deviennent des fonctions $y_j = f_j(x_1, \dots, x_p)$ des coordonnées de la source. Alors $f^*\alpha$ s'obtient en remplaçant α_J par $\alpha_J \circ f$ et dy_j par la différentielle de la fonction f_j . On a :

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta .$$

Si f est un difféomorphisme ($n = p$), on a :

$$f^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = (\det f'(x)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

2.2.3 Opérateur cobord

On définit un opérateur, dit *opérateur cobord*,

$$d : \Omega^k(V) \longrightarrow \Omega^{k+1}(V)$$

qui généralise la différentielle des fonctions.. On le fait en coordonnées : si $\alpha = \sum_I \alpha_I dx_I$, on pose

$$d\alpha = \sum_I d\alpha_I \wedge dx_I .$$

On dit aussi que c'est la différentielle de α .

La formule du produit est facile à vérifier sur les "monômes" :

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$$

La magie des formes différentielles vient du premier point suivant :

Proposition.

- 1) $d \circ d = 0$.
- 2) Si $f : U \rightarrow V$ est une application C^∞ d'un ouvert de \mathbb{R}^n vers un ouvert de \mathbb{R}^p et si $\alpha \in \Omega^k(V)$, on a alors :

$$f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha) .$$

En particulier, la définition de d est indépendante des coordonnées.

Démonstration. 1) D'après notre définition, $d(dx_I) = 0$. Donc

$$\begin{aligned} d \circ d(\alpha_I dx_I) &= d(d\alpha_I \wedge dx_I) = \\ (dd\alpha_I) \wedge dx_I - d\alpha_I \wedge ddx_I &= (dd\alpha_I) \wedge dx_I \end{aligned}$$

et pour une fonction $dd(\alpha_I) = 0$ traduit exactement le lemme de Schwarz d'égalité des dérivées croisées.

2) Si α est une fonction réelle ($k = 0$), $f^*\alpha$ est la fonction $\alpha \circ f$ et la formule n'est qu'une réécriture de la différentielle des fonctions composées. Par exemple, $f^*dx_1 = df_1$. Avec la commutation des opérateurs f^* et \wedge et avec la formule du produit, on déduit $d(f^*dx_I) = 0$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} f^*(d\alpha_I \wedge dx_I) &= f^*d\alpha_I \wedge f^*(dx_I) = \\ d(f^*\alpha_I) \wedge f^*dx_I &= d(f^*\alpha_I \wedge f^*dx_I). \end{aligned}$$

Cela donne la formule cherchée. □

2.2.4 Cocycles et cobords

- Une forme dont la différentielle est nulle est dite *fermée*; on dit encore que c'est un *cocycle*.
 - Une forme qui est dans l'image de d est dite *exacte*; on dit encore que c'est un *cobord*.
- Si $\omega = d\alpha$, on dit aussi que α est une *primitive* de ω .

Comme on vient de le voir, *toute forme exacte est fermée*, mais il existe des formes fermées non exactes. La forme suivante sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ en est un exemple (voir 2.4.4) :

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Si cette forme était exacte, il y aurait une fonction "angle" bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

On note :

$$\begin{aligned} Z^k(V) &= \text{Ker } d \cap \Omega^k(V) \\ B^k(V) &= \text{Im } d \cap \Omega^k(V). \end{aligned}$$

On a $B^k(V) \subset Z^k(V)$. L'espace vectoriel quotient $Z^k(V)/B^k(V)$ s'appelle le k -ème groupe de *cohomologie* de De Rham; il est noté $H^k(V)$.

En fait, c'est un espace vectoriel réel et par groupe on pense au groupe additif sous-jacent; cette terminologie est due au fait qu'il existe des groupes de cohomologie *entière* dont la partie libre correspond à un réseau dans H^k .

On peut aussi considérer la *cohomologie à support compact* : $\Omega_c^k(V)$ est le sous-espace des formes différentielles de degré k à support compact dans V ; il contient le sous-espace $Z_c^k(V)$ de cocycles à support compact, qui lui-même contient le sous-espace $B_c^k(V)$ des formes ayant une primitive à support compact; on pose

$$H_c^k(V) = Z_c^k(V)/B_c^k(V).$$

Attention : une forme à support compact peut être exacte mais ne pas avoir de primitives à support compact. On verra au 2.5 que c'est en général le cas pour les formes différentielles de degré n à support compact sur \mathbb{R}^n .

2.3 Formes différentielles sur une variété

2.3.1 Cohomologie de De Rham

Une forme différentielle α de degré k sur une variété M est donnée, pour tout $x \in M$, par une forme $\alpha(x)$, k -linéaire alternée, sur $T_x M$ "dépendant de façon C^∞ de x ".

Du point de vue de l'algèbre cette définition est claire mais la régularité n'a pas un sens d'emblée. Une méthode consiste à introduire un atlas de cartes $g_i : U_i \rightarrow V_i$, où U_i (resp. V_i) est un ouvert de M (resp. \mathbb{R}^n). Pour $x \in U_i$ et $y = g_i(x) \in V_i$ on pose

$$\alpha_i(y) = (Tg_i^{-1})^*(\alpha(x)).$$

Autrement dit, l'image réciproque par l'inverse de l'application carte fournit en chaque point $y \in V_i$ une forme k -linéaire $\alpha_i(y)$. La régularité de α s'exprime en disant que α_i est une forme différentielle sur V_i , c'est-à-dire $\alpha_i \in \Omega^k(V_i)$. On remarque que sur le domaine de définition d'un changement de cartes g_{ij} on a $\alpha_j = g_{ij}^* \alpha_i$.

Inversement une façon de se donner une forme différentielle sur M consiste à se donner dans chaque carte une forme différentielle $\alpha_i \in \Omega^k(V_i)$, avec la compatibilité aux changements de cartes :

$$\alpha_j = g_{ij}^* \alpha_i.$$

(On sous-entend que l'égalité n'est considérée qu'aux points où les deux membres sont définis.)

Si on ne veut pas utiliser les cartes, voici une autre façon de donner un sens à C^∞ . Soit $p : TM \rightarrow M$ la projection ; dans le produit cartésien $TM \times \dots \times TM$, il y a une sous-variété, appelée le produit fibré,

$$\{(X_1, \dots, X_k) \in TM^k \mid p(X_1) = \dots = p(X_k)\}.$$

Une forme différentielle de degré k sur M est une fonction réelle sur cette variété, vérifiant certaines propriétés algébriques. Pour ce qui concerne la régularité d'une forme différentielle, il s'agit tout simplement de celle définie pour les fonctions réelles sur les variétés.

La différentielle $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$, encore appelée *opérateur cobord*, est définie en allant dans les cartes. Si α_i représente α dans chaque carte, on a :

$$d\alpha_j = g_{ij}^* d\alpha_i$$

ce qui signifie que les $d\alpha_i$ représentent une forme différentielle sur M ; par définition, cette forme est $d\alpha$. Les propriétés locales sont les mêmes que sur les ouverts de \mathbb{R}^n . En particulier, $d \circ d = 0$.

Comme pour un ouvert de \mathbb{R}^n on peut considérer l'espace des *cocycles* de degré k , $Z^k(M) = \text{Ker } d \cap \Omega^k(M)$, et l'espace des *formes exactes* de degré k , $B^k(M) = \text{Im } d \cap \Omega^k(M)$. Le second étant un sous-espace du premier, on peut considérer le quotient $H^k(M)$, qui est le k -ième *groupe de cohomologie* de De Rham de M . Deux formes fermées dont la différence est une forme exacte sont dites *cohomologues* ; elles sont dans la même classe du quotient.

De même, on peut considérer l'espace $\Omega_c^k(M)$ des formes à support compact et la *cohomologie à support compact* : $H_c^k(M)$ est le quotient de l'espace des cocycles à support compact par le sous-espace des formes ayant une primitive à support compact.

2.3.2 Forme volume et orientation

Une *forme volume* sur M de dimension n est une forme différentielle de degré n , non nulle en chaque point.

Une *orientation* sur M est une orientation de chaque espace tangent $T_x M$, dépendant continûment de x .

Cette continuité pose un problème car il n'y a pas de comparaison possible entre $T_x M$ et $T_{x'} M$. On va donc dans les cartes : pour $y = g_i(x) \in V_i \subset \mathbb{R}^n$, Tg_i induit un isomorphisme $T_x M \rightarrow T_y V_i$ et donc $T_y V_i$ se trouve orienté mais, cette fois-ci, la continuité a un sens car $T_y V_i$ et $T_{y'} V_i$ sont canoniquement isomorphes.

Si α est une forme volume, on lui associe une orientation par la règle suivante : (X_1, \dots, X_n) est une base (ordonnée) positive de $T_x M$ si et seulement si $\alpha(x)(X_1, \dots, X_n) > 0$.

Proposition.

- 1) Une variété M est orientable si et seulement si il existe un atlas "de variété orientée", c'est-à-dire dont tous les changements de cartes sont à jacobien positif.
- 2) Il existe une forme volume sur M si et seulement si elle est orientable.

Démonstration. 1) La condition est suffisante : l'orientation canonique de \mathbb{R}^n induit une orientation de tous les $T_x V_i$ compatible avec les changements de cartes. Réciproquement, prenons les cartes connexes ; si M est orienté, les $T_x V_i$ le sont et de deux choses l'une, ou bien cette orientation coïncide avec l'orientation canonique de \mathbb{R}^n , auquel cas on garde cette carte, ou bien elle coïncide avec l'orientation négative de \mathbb{R}^n , auquel cas on change la carte par composition avec une symétrie hyperplane. Dans le nouvel atlas, tous les changements de cartes préservent l'orientation canonique de \mathbb{R}^n , donc leurs jacobiens sont positifs.

2) On a vu que la condition est nécessaire. Voici pour la suffisance. On utilise un atlas de variété orientée ; l'orientation canonique de \mathbb{R}^n fixe une orientation sur M . Dans chaque carte $V_i \subset \mathbb{R}^n$ on prend le volume canonique $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ que l'on transporte sur $U_i \subset M$ en un volume

$$\omega_i = (g_i^{-1})^* dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

On considère une partition de l'unité $\{f_i\}$ subordonnée au recouvrement $\{U_i\}$. Montrons que la forme $\omega = \sum f_i \omega_i$ répond à la question.

On observe d'abord que la série converge et que sa somme est une forme différentielle C^∞ parce que la famille $\{\text{supp } f_i\}$ est localement finie. Soit (X_1, \dots, X_n) une base positive de $T_x M$. Pour tous les i tels que $x \in U_i$, on a $\omega_i(x)(X_1, \dots, X_n) > 0$ et il existe i_0 avec $f_{i_0}(x) > 0$. Si $x \notin U_i$, $f_i(x) = 0$. Finalement, $\omega(x)(X_1, \dots, X_n)$ est une somme de termes ≥ 0 dont l'un est strictement positif. \square

Exercice.

Soit M une variété orientée connexe et σ un difféomorphisme involutif de M (c'est-à-dire $\sigma \circ \sigma = \text{Id}$) sans point fixe. Montrer que la variété quotient $\sigma \backslash M$ est orientable si et seulement si σ préserve l'orientation.

Inversement, montrer que si M est une variété connexe *non orientable*, alors $M = \sigma \backslash \widetilde{M}$, où \widetilde{M} est une variété connexe orientable, munie d'une involution sans point fixe σ qui renverse l'orientation. Cette variété \widetilde{M} est appelée le *revêtement des orientations* de M .

[Indication : considérer un atlas $\{g_i\}$ et pour chaque carte introduire deux cartes $g_i^+ = g_i$ et g_i^- obtenue en composant la précédente avec une symétrie hyperplane de la source. Définir convenablement des changements de cartes préservant l'orientation ; l'atlas abstrait ainsi formé construira \widetilde{M} .]

Exemples : 1) L'espace projectif réel $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, quotient de la sphère de dimension n par l'involution antipodale est orientable si et seulement si n est impair.

2) Le ruban de Möbius (voir 1.7.1) est non orientable.

2.3.3 Forme d'aire riemannienne sur une surface orientée de \mathbb{R}^3

On a défini la notion de forme volume sur une variété de dimension n . Pour $n = 2$, cette terminologie heurte l'oreille et on lui préfère le mot *forme d'aire* ; mais il s'agit de la même chose.

Soit S une surface orientée plongée dans \mathbb{R}^3 ; chacun de ses plans tangents est orienté et cette orientation peut être suivie continûment. Pour $a \in S$, on définit $N(a)$ comme étant le vecteur normal unitaire tel que $(N(a), \text{base directe de } T_a S)$ soit une base directe de \mathbb{R}^3 pour son orientation canonique ; N est une application C^∞ de S vers \mathbb{R}^3 . On considère la formule :

$$i(N(a)) dx \wedge dy \wedge dz .$$

En tout point a de S , elle définit une forme alternée sur \mathbb{R}^3 et en particulier sur son sous-espace vectoriel $T_a S$. C'est donc une forme différentielle sur S ; sa valeur sur une base directe (X_1, X_2) de $T_a S$ est

$$(dx \wedge dy \wedge dz)(N(a), X_1, X_2) > 0.$$

Donc cette forme est bien une forme d'aire. Elle est appelée *riemannienne* pour signifier qu'elle découle de la considération du produit scalaire euclidien (choix de la normale unitaire). Cette

construction se généralise aux hypersurfaces de \mathbb{R}^n et aussi en codimension > 1 . Mais attention : à partir de la codimension 2, il n'existe pas nécessairement N_1 et N_2 , orthogonaux à $T_a S$, indépendants et dépendant continûment de a .

3.4 Orientation transversale

Les considérations précédentes fournissent l'occasion de préciser la notion d'orientation *transversale* d'une sous-variété et la relation avec son orientation.

Soit $M^m \subset N^n$ une sous-variété d'une variété. On dit que M est *transversalement orientable* dans N si on peut choisir, continûment en $x \in M$, une orientation des fibres $\nu_x(M, N)$ du fibré normal.

Exercice : 1) Donner un sens à cette continuité.

2) Donner un exemple où M est transversalement orientable mais pas orientable.

Si M et N sont orientées, alors M est transversalement orientable. La convention qui généralise celle donnée ci-dessus pour les hypersurfaces consiste à dire qu'une base de $\nu_x(M, N)$ est positive si *suivie* d'une base positive de $T_x M$ elle donne une base positive de $T_x N$.

Exercice. Montrer que, réciproquement, si M est orientable et transversalement orientable, alors N est orientable au voisinage de M .

2.3.4 Autre approche pour l'aire riemannienne

On propose maintenant une construction de la forme d'aire fondée sur le paramétrage local. Sa généralisation en toute dimension et codimension est immédiate. Cependant, il faudra vérifier qu'elle ne dépend pas du paramétrage choisi. On laisse en exercice de vérifier que cette définition coïncide avec celle proposée au paragraphe précédent.

Soit $\phi : V \rightarrow U$ un *paramétrage local* de S , où V est un ouvert de \mathbb{R}^2 (coordonnées u et v), où U est un ouvert de S et où $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une application différentiable induisant un difféomorphisme de V sur U ; $\phi^{-1} : U \rightarrow V$ est une carte de S . En particulier ϕ est une immersion, c'est-à-dire que $\frac{\partial \phi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial v}$ sont indépendants en tout point et constituent une base de l'espace tangent $T_{\phi(u,v)}$. Supposer que ϕ est compatible avec l'orientation de S revient à dire que cette base est directe. On introduit alors la matrice de Gram

$$G(u, v) = \begin{pmatrix} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\|^2 & \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle & \left\| \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|^2 \end{pmatrix}$$

Le fait suivant est bien connu. *Pour une matrice réelle quelconque A , on a :*

$$\text{rang}({}^t A A) = \text{rang } A.$$

En particulier, si A est la matrice 3×2 formée des deux colonnes $\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}$ la matrice $G(u, v) = {}^t A A$ est de rang 2. Cette matrice symétrique est la matrice d'une forme quadratique appelée *première forme fondamentale* de la surface.

Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que $g(u, v) = \det G(u, v)$ est strictement positif. On définit alors la forme d'aire dans la carte ϕ par

$$g(u, v)^{1/2} du \wedge dv.$$

2.4 Intégration des formes différentielles et formule de Stokes

L'objet de ce paragraphe est de montrer que l'on peut intégrer une forme différentielle à support compact sur une variété *orientée* de dimension n .

2.4.1 Intégration sur un ouvert de \mathbb{R}^n

Soit ω une forme différentielle de degré n sur un ouvert V de \mathbb{R}^n , à support compact. Cette forme s'écrit en coordonnées

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

On définit :

$$\int_V \omega = \int_V f dx_1 \dots dx_n$$

où $dx_1 \dots dx_n$ désigne la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^n . Ici l'orientation de V est l'orientation canonique de \mathbb{R}^n .

Si $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ est un difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{R}^n , *préservant l'orientation canonique* de \mathbb{R}^n , et si ω est une forme différentielle de degré n à support compact sur V_2 , alors

$$\int_{V_2} \omega = \int_{V_1} \phi^* \omega.$$

En effet, si (y_1, \dots, y_n) sont les coordonnées du but et si (x_1, \dots, x_n) sont celles de la source, on a :

$$\omega = f(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$$

$$\phi^* \omega = f(\phi(x)) \det(\phi'(x)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$\int_{V_2} f(y) dy_1 \dots dy_n = \int_{V_1} f(\phi(x)) |\det \phi'(x)| dx_1 \dots dx_n.$$

D'où on déduit la formule cherchée, si on tient compte du fait que, par hypothèse, $\det \phi'(x)$ est positif.

2.4.2 Intégration sur une variété

Soit M une variété orientée de dimension n et $\omega \in \Omega^n(M)$ à support compact. Pour définir $\int_M \omega$, on choisit un atlas de variété orientée $\{g_i : V_i \rightarrow U_i\}$; les cartes g_i envoient l'orientation canonique de \mathbb{R}^n sur celle de M et les changements de cartes sont à jacobiens positifs. On choisit une partition de l'unité $\{\alpha_i\}$ subordonnée au recouvrement $\{U_i\}$; la forme différentielle $\alpha_i \omega$ est à support compact dans U_i et on pose :

$$\int_M \alpha_i \omega = \int_{U_i} \alpha_i \omega = \int_{V_i} g_i^*(\alpha_i \omega)$$

et

$$\int_M \omega = \sum_i \int_M \alpha_i \omega.$$

Cette définition est indépendante du choix de l'atlas orienté et de la partition de l'unité. Soit $\{g'_j : V'_j \rightarrow U'_j\}$ un autre atlas orienté et $\{\alpha'_j\}$ une partition de l'unité subordonnée. On a :

$$\int_M \omega = \sum_{i,j} \int_{U_i \cap U'_j} \alpha_i \alpha'_j \omega$$

Il suffit de s'assurer que

$$\int_{V_i} g_i^*(\alpha_i \alpha'_j \omega) = \int_{V'_j} g'_j{}^*(\alpha_i \alpha'_j \omega)$$

ce qui est vrai par 2.4.1.

Exemple. Si M est compacte, si ω est une forme volume et si M est orientée par ω alors $\int_M \omega > 0$.

Naturalité. Ayant prouvé que l'intégrale ne dépend pas de l'atlas (de variété orientée) choisi, on a établi en même temps l'invariance par difféomorphisme. Précisément, si $\varphi : N \rightarrow M$ est un difféomorphisme de variétés orientées, préservant l'orientation, on a :

$$\int_N \varphi^* \omega = \int_M \omega.$$

Rôle de l'orientation. Si $-M$ désigne la variété M munie de l'orientation opposée, on a :

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega.$$

On peut comparer cette formule à

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

et on retrouve qu'en théorie élémentaire de l'intégration, ce n'est pas la fonction f qui est intégrée, mais bien la forme différentielle $f(x)dx$ sur un intervalle orienté.

Remarque. Les partitions de l'unité sont souvent utilisées sur les formes différentielles pour faire des constructions globales à partir de constructions locales. C'est un peu ce qu'on vient de faire pour définir l'intégrale. En revanche, on doit souligner que les formes fermées ne se laissent pas traiter de la même façon : si ω est une forme fermée et si f est une fonction réelle, alors $f\omega$ n'est plus une forme fermée ; ou encore, à partir de formes fermées données dans des cartes, on ne peut pas construire une forme fermée globale, simplement à l'aide d'une partition de l'unité.

2.4.3 Orientation canonique du bord d'une variété

Si M est une variété à bord non vide et si $x \in \partial M$, l'espace tangent $T_x\partial M$ est un hyperplan dans T_xM séparant celui-ci en deux demi-espaces : celui des vecteurs *rentrants* et celui des vecteurs *sortants*. Un vecteur $X \in T_xM$ est *non-sortant* si $X = \dot{\gamma}(0)$ pour un arc différentiable $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow M$.

La convention d'orientation est celle-ci : *une base de $T_x\partial M$ est positive si, précédée d'un vecteur sortant, elle donne une base positive de T_xM* (comparer à 2.3.3).

Exemple. Soit $\mathbb{R}_-^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \leq 0\}$, muni de l'orientation canonique de \mathbb{R}^n . Son bord est $\{(0, x_2, \dots, x_n)\}$ qui est isomorphe à \mathbb{R}^{n-1} . Alors l'orientation de \mathbb{R}^{n-1} est bien l'orientation de $\partial\mathbb{R}_-^n$.

2.4.4 Formule de Stokes

Soit ω une forme différentielle de degré $n-1$, à support compact sur la variété orientée M . Alors

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega .$$

Démonstration. a) Les deux membres dépendent linéairement de ω . Par partition de l'unité, on se ramène à prouver la formule lorsque ω est à support compact dans une carte.

b) Si $M = \mathbb{R}_-^n$, avec des coordonnées (x_1, \dots, x_n) , on a :

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_i f_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n \\ d\omega &= \sum (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n . \end{aligned}$$

Par Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}_-^n} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$$

et, pour $i > 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n = 0.$$

□

Remarque. Si j désigne l'inclusion $\partial M \hookrightarrow M$, pour être précis on devrait écrire $\int_{\partial M} j^* \omega$ au lieu de $\int_{\partial M} \omega$, car c'est $j^* \omega$ qui est une forme différentielle sur ∂M : pour $x \in \partial M$, $(j^* \omega)(x)$ se calcule sur un système de $n - 1$ vecteurs tangents au bord tandis que $\omega(x)$ se calcule sur un système de $n - 1$ vecteurs tangents à M . Mais cet abus est courant.

4.5 Applications

Les applications de la formule de Stokes sont innombrables. En voici quelques-unes.

1) Non-exactitude en degré n

Si M est une variété compacte de dimension n orientée à bord vide et si $\deg \omega = n - 1$, on a $\int_M d\omega = 0$. Autrement dit, on a l'énoncé suivant.

Sur une variété compacte orientable à bord vide, une forme différentielle dont l'intégrale est non nulle n'est pas exacte.

Par exemple, une forme volume sur une variété compacte à bord vide n'est pas exacte. En fait, en degré maximum il n'y a pas d'autre obstruction à l'exactitude que la nullité de l'intégrale. On verra en 2.5.5 le théorème suivant.

Sur une variété orientée de dimension n , une forme différentielle de degré n à support compact dont l'intégrale est nulle est la différentielle d'une forme de degré $n - 1$ à support compact.

2) Non-exactitude en degré $< n$

Soit ω une forme de degré k sur M . Soit N une variété de dimension k à bord vide compacte orientée (sans bord) et $f : N \rightarrow M$ une application C^∞ . Si $\int_N f^ \omega \neq 0$, ω n'est pas exacte.*

Exemples.

i) Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

n'est pas exacte car, si j est l'inclusion du cercle unité dans le plan,

$$\int_{S^1} j^* \omega = 2\pi,$$

si le cercle est orienté dans le sens trigonométrique.

ii) Sur le tore \mathbb{T}^n , $\omega = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$, où les a_i sont des constantes réelles non toutes nulles, est une forme de degré 1 fermée non exacte. *De plus, toute forme fermée de degré 1 est la somme d'une forme à coefficients constants et de la différentielle d'une fonction.*

3) Caractérisation intégrale des formes fermées

Soit ω une forme de degré $k - 1$. La forme ω est fermée si et seulement si $\int_{\partial D} \omega = 0$ pour toute sous-variété D difféomorphe à la boule unité de \mathbb{R}^k .

La condition est nécessaire d'après la formule de Stokes. Elle est suffisante. En effet, supposons que $d\omega(a) \neq 0$ en un certain point a . Alors il existe des coordonnées locales au voisinage de a , avec $x_1(a) = \dots = x_n(a) = 0$, où

$$d\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k + \dots \text{ et } f(0) \neq 0.$$

Les termes non écrits sont les composantes de $d\omega$ sur les autres éléments différentiels de base. Si D est une boule de dimension k contenue dans le sous-espace linéaire $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$ et centrée en 0, alors

$$\int_D d\omega = \int_D f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \neq 0.$$

Donc, par la formule de Stokes, $\int_{\partial D} \omega \neq 0$, contrairement à l'hypothèse. \square

2.4.5 La formule de Stokes appliquée aux sous-variétés de \mathbb{R}^3

Il convient de montrer que la formule de Stokes, sous la forme générale donnée en 4.4, contient les formules connues dans \mathbb{R}^3 (coordonnées x, y, z).

Si U est un ouvert de \mathbb{R}^3 , grâce à la structure euclidienne, on a des isomorphismes $\chi(U) \cong \Omega^1(U)$ et $\chi(U) \cong \Omega^2(U)$, où $\chi(U)$ est l'espace des champs de vecteurs sur U . Le premier associe à un champ X de composantes (A, B, C) la forme de degré 1

$$\omega^1 = A dx + B dy + C dz .$$

Le second associe la forme de degré 2

$$\omega^2 = A dy \wedge dz - B dx \wedge dz + C dx \wedge dy .$$

qui est le produit intérieur $i(X) dx \wedge dy \wedge dz$. L'opérateur *rotationnel* est la composée

$$\chi(U) \xrightarrow{\cong} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2(U) \xrightarrow{\cong} \chi(U) .$$

De même, si $\mathcal{F}(U)$ désigne l'espace des fonctions différentiables, on a un isomorphisme $\mathcal{F}(U) \cong \Omega^3(U)$ qui à f associe la forme de degré 3

$$\omega^3 = f dx \wedge dy \wedge dz$$

et l'opérateur de *divergence* s'obtient par composition

$$\chi(U) \xrightarrow{\cong} \Omega^2(U) \xrightarrow{d} \Omega^3(U) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(U)$$

Si S est une surface compacte orientée avec sa forme d'aire $d\sigma$, et si N désigne le champ des normales unitaires positives, on définit le *flux* de X à travers S par

$$\int_S \langle X, N \rangle d\sigma.$$

Si S est le bord orienté d'une variété compacte D contenue dans U , la formule de Stokes donne :

$$\int_S \langle X, N \rangle d\sigma = \int_D \operatorname{div} X dv,$$

où $dv = dx \wedge dy \wedge dz$ est le volume canonique de \mathbb{R}^3 .

Si au contraire S est compacte mais a un bord non vide, celui-ci est une union finie de courbes fermées que l'on oriente comme bord de S et on définit le *travail* de X le long du bord par

$$\int_{\partial S} \langle X, T \rangle dl,$$

où dl est la 1-forme de longueur (forme de volume unidimensionnel) et où T est le champs des vecteurs unitaires positifs tangents au bord. Dans ce cas la formule de Stokes donne :

$$\int_{\partial S} \langle X, T \rangle dl = \int_S \langle \operatorname{rot} X, N \rangle d\sigma.$$

2.5 Formules d'homotopie

Après avoir vu, grâce à l'intégration, des critères de non-exactitude, il est temps de proposer un critère d'exactitude souvent cité comme le "lemme de Poincaré". La clé réside dans la compréhension des formes différentielles sur un produit $M \times [0, 1]$.

2.5.1 Formes différentielles sur un produit par $[0, 1]$

On considère une variété M et son produit $M \times [0, 1]$; on note x le point courant dans M et t la variable dans $[0, 1]$. Si ω est une forme différentielle sur $M \times [0, 1]$, on peut l'écrire

$$\omega = \omega_t + dt \wedge \alpha_t.$$

Cette formule contient quelques abus de notations puisque la variable t n'est pas écrite à gauche. Elle est fondée sur l'isomorphisme d'espaces vectoriels tangents :

$$T_{(x,t)}(M \times [0, 1]) = T_x M \oplus \mathbb{R}.$$

Donc $\omega(x, t)$ est la somme d'une forme k -linéaire alternée sur $T_x M$ dépendant de t , notée $\omega_t(x)$, et du produit extérieur $dt \wedge \alpha_t(x)$ où $\alpha_t(x)$ est une forme $(k - 1)$ -linéaire alternée sur $T_x M$.

Précisément, $\omega_t(x) = j_t^* \omega(x, t)$, où j_t désigne l'inclusion $M = M \times \{t\} \hookrightarrow M \times [0, 1]$, et $\alpha_t(x) = i(\frac{\partial}{\partial t}) \omega(x, t)$, où $i(\frac{\partial}{\partial t})$ désigne le produit intérieur par le vecteur unitaire du facteur \mathbb{R} . Finalement $t \mapsto \omega_t$ et $t \mapsto \alpha_t$ sont des chemins dans $\Omega^k(M)$ et $\Omega^{k-1}(M)$ respectivement, dépendant différenciablement de t au sens où les coefficients dans des cartes sont des fonctions C^∞ du couple (x, t) .

2.5.2 Opérateur cobord sur un produit par $[0, 1]$

A partir de ω_t , on peut former la dérivée par rapport à t : $\dot{\omega}_t \in \Omega^k(M)$, en dérivant par rapport t les coefficients ; on peut aussi dire que, pour tout $x \in M$, on dérive $t \mapsto \omega_t(x)$ dans l'espace de dimension finie des formes k -linéaires alternées sur $T_x M$.

Par ailleurs, on a un opérateur "cobord par rapport à x ", noté d_x , qui s'applique aux formes sur M . Un calcul en coordonnées donne :

$$d\omega = d_x \omega_t + dt \wedge \dot{\omega}_t - dt \wedge d_x \alpha_t .$$

Faisons le produit intérieur par $\frac{\partial}{\partial t}$, il vient :

$$i(\frac{\partial}{\partial t}) d\omega = \dot{\omega}_t - d_x \alpha_t .$$

En effet, $d_x \omega_t$ "ne contient pas dt ", donc $i(\frac{\partial}{\partial t}) d_x \omega_t$ est nul. Réécrivons la formule en tenant compte de l'expression de α_t donnée en 2.5.1 :

$$\dot{\omega}_t = d_x i(\frac{\partial}{\partial t}) \omega + i(\frac{\partial}{\partial t}) d\omega .$$

Le terme $i(\frac{\partial}{\partial t}) d\omega$ est une k -forme sur M dépendant de t . Les théorèmes généraux justifiant la commutation de l'intégration et de d_x , on déduit par intégration en t la formule fondamentale suivante :

$$\omega_1 - \omega_0 = d \left(\int_0^1 i(\frac{\partial}{\partial t}) \omega \right) + \int_0^1 i(\frac{\partial}{\partial t}) d\omega .$$

Dans cette formule, les deux intégrales sont à comprendre comme des moyennes en t de formes différentielles sur M , de degré respectif $k-1$ et k . Comme $\int_0^1 i(\frac{\partial}{\partial t}) \omega$ ne contient ni t ni dt , il n'y a pas d'ambiguïté à noter d à la place de d_x .

2.5.3 Formule d'homotopie des images réciproques

Une *homotopie différentiable* est une application C^∞ , $h : M \times [0, 1] \rightarrow N$, où M et N sont des variétés. Si on note h_t la restriction de h à $M \times \{t\}$, on dit que h est une homotopie de h_0 à h_1 vues comme applications $M \rightarrow N$.

Soit α une forme différentielle sur N . En appliquant 2.5.2 à $\omega = h^*\alpha$, on obtient la *formule d'homotopie des images réciproques* :

$$\begin{aligned} h_1^*\alpha - h_0^*\alpha &= d \left(\int_0^1 i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)h^*\alpha \right) + \int_0^1 i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)h^*\alpha \\ &= d \circ H(\alpha) + H \circ d(\alpha) . \end{aligned}$$

Ici on désigne par H l'opérateur $\Omega^k(N) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$, ou $\Omega^{k+1}(N) \rightarrow \Omega^k(M)$, obtenu en composant les opérateurs

$$\alpha \mapsto h^*\alpha \mapsto i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)h^*\alpha \mapsto \int_0^1 i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)h^*\alpha .$$

De même que l'on ne note pas le degré des formes auxquelles on applique le cobord, de même on ne note pas celui des formes auxquelles on applique l'*opérateur d'homotopie* H qui ne dépend que de l'homotopie h :

$$H : \Omega^*(N) \longrightarrow \Omega^{*-1}(M) .$$

L'opérateur d'homotopie est linéaire et continu pour la topologie de la convergence C^∞ des coefficients sur les compacts.

Enfin, si h est une *homotopie propre*, H opère sur les formes à support compact :

$$H : \Omega_c^*(N) \longrightarrow \Omega_c^{*-1}(M) .$$

Un exemple important d'homotopie propre est donné par le cas où h_0 est propre et où l'homotopie est stationnaire ($h(x, t)$ est indépendant de t) hors d'un compact de M . A ce propos, signalons une faute à ne pas faire : une homotopie propre n'est pas une homotopie h telle que h_t serait propre pour tout t (donner un tel exemple $h : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$).

2.5.4 Le lemme dit de Poincaré

Soit M une variété. On dit que M est *différentiablement contractile* – ou *contractile* – s'il existe une contraction C^∞ , $c : M \times [0, 1] \rightarrow M$, c'est-à-dire une application C^∞ vérifiant $c_1 = \text{Id}$ et $c_0 = \text{constante}$. Les ouverts étoilés de \mathbb{R}^n ont cette propriété. (Exercice : montrer que, pour les ouverts de \mathbb{R}^n , la contractibilité C^0 implique la contractibilité C^∞). On a l'énoncé suivant.

Sur une variété contractile, toute forme différentielle fermée de degré > 0 est exacte. De plus une primitive est donnée explicitement par l'homotopie.

Nous dirons qu'il s'agit de la *primitive de Poincaré* associée à l'homotopie. En effet, pour $\alpha \in \Omega^k(M)$, on a $c_1^*\alpha = \alpha$ et $c_0^*\alpha = 0$. D'après 2.5.3, il vient :

$$\alpha = d \int_0^1 i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)c^*\alpha . \quad \square$$

Voici une application directe : *une variété compacte M sans bord n'est pas contractile*. En effet si M est orientable, une forme volume sur M n'est jamais exacte. Par ailleurs si M , connexe, n'est pas orientable, alors $M = \sigma \backslash \widetilde{M}$, où \widetilde{M} est une variété compacte connexe orientable sans bord, munie d'une involution sans point fixe σ qui retourne l'orientation (voir 2.3.2, Exercice) ; le théorème fondamental des fibrés assure alors, sans autre considération, que M n'est pas contractile (voir 1.7.7).

En particulier, *une contraction d'une variété sans bord n'est jamais une application propre et la primitive de Poincaré associée n'est pas à support compact*.

Heureusement, il y a des résultats plus profonds découlant de l'étude précédente ; ils sont proposés ci-dessous sous forme d'exercices.

2.5.5 Exercices d'application : cohomologie de De Rham en degré maximum

1) Soit $I^n = [0, 1]^n$ le cube de dimension n . Démontrer par récurrence sur n le résultat suivant.

Une forme différentielle de degré n à support dans l'intérieur de I^n est la différentielle d'une forme de degré $n - 1$, elle-même à support dans l'intérieur du cube, si et seulement si son intégrale est nulle.

[On pourra utiliser l'homotopie $I^n \times [0, 1] \rightarrow I^n$ donnée par

$$(x_1, \dots, x_n, t) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, tx_n).]$$

ESQUISSE DE SOLUTION EN DIMENSION 2. On note (x, y) les coordonnées du carré $C = [0, 1] \times [0, 1]$. Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'intégrale nulle à support dans $\{(x, y) \in C \mid \epsilon \leq x, y \leq 1 - \epsilon\}$. Soit β la primitive de Poincaré de $\alpha = f(x, y)dx \wedge dy$ associée à l'homotopie $(x, y, t) \mapsto (x, ty)$; on voit en examinant la formule de 2.5.4 qu'elle est nulle en tout point de $E = \{(x, y) \in C \mid x \leq \epsilon \text{ ou } x \geq 1 - \epsilon \text{ ou } y \leq \epsilon\}$. Écrivons $\beta = a(x, y)dx + b(x, y)dy$. Soit $E' = \{(x, y) \in C \mid y > 1 - \epsilon\}$. Toujours en examinant la formule de 2.5.4, on voit que, sur E' , la fonction a est indépendante de y et que la fonction b est identiquement nulle. Or d'après la formule de Stokes,

$$\int_0^1 a(x, 1)dx = 0$$

car le premier membre coïncide avec l'intégrale de β sur tout le bord du carré (orienté dans le sens rétrograde). Donc la fonction $x \mapsto a(x, 1)$ possède une primitive $A(x)$ à support dans $[\epsilon, 1 - \epsilon]$ (en dimension quelconque, c'est à ce point que joue l'hypothèse de récurrence). On introduit alors une fonction C^∞ $\rho(y)$ égale à 1 si $1 - \epsilon/2 \leq y \leq 1$ et nulle si $y \leq 1 - \epsilon$. La différentielle de la fonction $A(x)\rho(y)$ est une forme fermée de degré 1 et donc $\beta' = \beta - d(A\rho)$ est une nouvelle primitive de α ; mais tout a été fait pour qu'elle soit à support dans l'intérieur du carré C .

2) Démontrer, en utilisant l'exercice précédent, que l'intégrale donne un isomorphisme

$$H_c^n(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}.$$

Démontrer avec la même méthode que $H_c^k(\mathbb{R}^n) = 0$ si $k \neq n$.

3) Pour une variété M de dimension n connexe orientée, on dira (ici) qu'elle a la propriété (P) si l'intégrale donne un isomorphisme $H_c^n(M) \cong \mathbb{R}$. Montrer que (P) équivaut au fait que toute forme de degré n sur M est cohomologue (dans la cohomologie à support compact) à une forme à support dans une boule.

Soit $M = U_1 \cup U_2$ une variété de dimension n , connexe orientée, donnée comme réunion de deux ouverts. On suppose que, pour $i = 1, 2$, U_i a la propriété (P) . Montrer que M a aussi la propriété (P) .

Démontrer alors (partie d'un théorème de De Rham) que si M est une variété de dimension n , orientée compacte connexe sans bord, on a $H^n(M) \cong \mathbb{R}$; précisément :

Une forme différentielle de degré n est exacte si et seulement si son intégrale est nulle.

4) Soit M une variété de dimension n compacte connexe à bord non vide. En utilisant la première question de 3) ci-dessus, montrer que toute forme de degré n sur M est exacte.

5) Soit M une variété de dimension n connexe et non orientable. Alors $H_c^n(M) = 0$.

Les considérations qui viennent d'être abordées sous forme d'exercices débouchent sur *la théorie du degré* pour les applications différentiables entre variétés orientées. Celle-ci a de nombreuses applications géométriques (voir [27]).

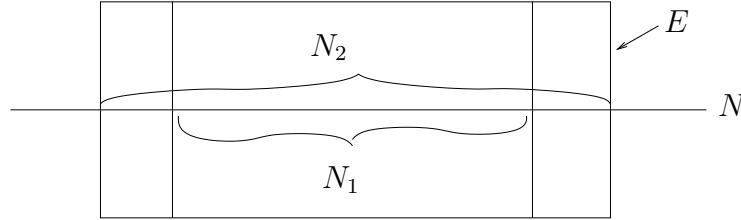
2.5.6 Lemme de Poincaré relatif

On termine ce chapitre avec une application qui nous servira en théorie de Morse au chapitre 6. Son nom vient de ce qu'il s'agit essentiellement d'appliquer le lemme de Poincaré dans les fibres d'un voisinage tubulaire d'une sous-variété.

Proposition. *Soit M une variété de dimension n . Soit N une sous-variété propre de dimension q ; on note $j : N \rightarrow M$ l'inclusion. Soit ω une forme différentielle fermée de degré k à support compact telle que $j^*\omega$ ait une primitive à support compact : $j^*\omega = d\alpha$. Alors, il existe sur M une forme différentielle $\tilde{\alpha}$ de degré $k - 1$ à support compact, telle que $\omega - d\tilde{\alpha} = 0$ au voisinage de N .*

Par exemple, si $N \cong \mathbb{R}^q$, l'hypothèse d'exactitude est satisfaite si $k \neq q$ ou si $k = q$ et $\int_N \omega = 0$ (voir 2.5.5-2).

Démonstration. Soit $N_1 \subset N_2 \subset N$ deux sous-variétés de N , compactes à bord de dimension q , $N \setminus N_1$ étant disjoint des supports de ω et α . D'après le théorème des voisinages tubulaires (1.6.3), appliqué à N_2 , il existe un domaine $E \subset M$, muni d'une projection $\pi : E \rightarrow N_2$ qui en fait un tube.



L'homothétie de rapport $t \in [0, 1]$ dans les fibres de E , $h(e, t) = te$, donne une homotopie entre $h_1 = \text{Id}_E$ et $h_0 = \pi$. D'après les formules d'homotopie 5.3, on a

$$\omega - \pi^*\omega = d\beta$$

pour une certaine forme différentielle β définie sur E . Si le tube est assez petit, $\pi^{-1}(N_2 - N_1)$ est disjoint du support de ω et l'opérateur d'homotopie qu'on donne la primitive β nulle sur $\pi^{-1}(N_2 - N_1)$. Finalement $\omega|_E = d(\pi^*\alpha + \beta)$ et cette primitive est nulle sur $\pi^{-1}(N_2 - N_1)$.

Soit λ une fonction numérique à support compact dans E et valant 1 au voisinage de N_1 . La forme $\tilde{\alpha} = \lambda(\pi^*\alpha + \beta)$ est une solution du problème ; noter qu'au voisinage de $N_2 - N_1$, $d\lambda$ n'est pas nul mais qu'en revanche $\pi^*\alpha + \beta$ est nul, donc $d\tilde{\alpha}$ y est nul. \square

Chapitre 3

Calcul de Lie – Cartan

Références : [11], [40].

3.1 Champs de vecteurs

3.1.1 Champs de vecteurs sur un ouvert de \mathbb{R}^n , image par un difféomorphisme

Si V est un ouvert de \mathbb{R}^n , un champ de vecteurs sur V est une application C^∞ , $X : V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Grâce à l'isomorphisme canonique $T_x V \cong \mathbb{R}^n$, on convient que, pour $x \in V$, $X(x) \in T_x V$, c'est-à-dire que $X(x)$ est un vecteur tangent en x .

Si $\phi : V \rightarrow W$ est un difféomorphisme, on définit le champ *image directe* $\phi_* X$ par la formule

$$\phi_* X(y) = \phi'(x)(X(x)) ,$$

où $y = \phi(x)$. En revanche, on voit que si ϕ n'est pas un difféomorphisme la formule ci-dessus ne définit en général pas un champ de vecteurs sur W ; si ϕ n'est pas injectif, $\phi_* X$ peut être multivoque et, si ϕ est injectif mais n'est pas de rang maximum, ϕ_* peut ne pas être C^∞ . Cela est à comparer au fait que l'on peut tirer en arrière une forme différentielle par une application aussi singulière que l'on veut ; comme quoi le fibré tangent et le fibré cotangent sont bien de nature fondamentalement différente.

3.1.2 Champs de vecteurs sur une variété

Si M est une variété différentiable, un champ de vecteurs X sur M est une section (C^∞) du fibré tangent, c'est-à-dire une application $M \rightarrow TM$ telle que $X(x) \in T_x M$. Mais on peut préférer utiliser un atlas et dire que X est défini dans chaque carte par un champ de vecteurs X_i sur V_i de sorte que, si g_{ji} est un difféomorphisme de changement de cartes, $(g_{ji})_* X_i = X_j$ sur l'ouvert où le membre de gauche a un sens.

3.1.3 Flot d'un champ de vecteurs sur une variété sans bord

Le théorème fondamental des équations différentielles énonce qu'il existe un ouvert W de $M \times \mathbb{R}$, dont l'intersection avec chaque $\{pt\} \times \mathbb{R}$ est un intervalle contenant 0, et une application C^∞ , $\Phi : W \rightarrow M$, appelé le flot de X , vérifiant :

- 1) $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t) = X(\Phi(x, t))$
- 2) $\Phi(x, 0) = x$.

Autrement dit, pour $x \in M$, notant I_x l'intervalle $W \cap \{x\} \times \mathbb{R}$, le chemin $t \in I_x \mapsto \Phi(x, t)$ est la solution passant par x en $t = 0$ de l'équation différentielle associée au champ de vecteurs. La formule proposée pour l'image directe d'un champ de vecteurs correspond à la formule de changement de variables (ou plutôt de fonction inconnue) dans les équations différentielles. On rappelle que, le champ de vecteurs considéré étant indépendant du temps, on a l'égalité

$$\Phi(x, t_1 + t_2) = \Phi(\Phi(x, t_1), t_2)$$

lorsque les deux membres sont définis.

On note Φ_t l'application non partout définie $x \mapsto \Phi(x, t)$; c'est un difféomorphisme de l'ouvert $\{x \in M \mid (x, t) \in W\}$ sur son image. On dit que le champ X est *complet* si Φ est défini sur $M \times \mathbb{R}$; c'est le cas si X est à support compact. Lorsque X est complet, Φ définit un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \text{Diff}(M) \\ t &\longmapsto \Phi_t . \end{aligned}$$

Exercice. Montrer qu'on peut rendre un champ de vecteurs complet sans changer ses orbites, en changeant $X(x)$ en $f(x)X(x)$ où f est une fonction strictement positive convenablement choisie.

3.1.4 Champs de vecteurs comme dérivation

Soit \mathcal{F} l'anneau des fonctions C^∞ réelles sur la variété M . Une *dérivation* est une application $D : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ telle que

$$\begin{aligned} D(f + g) &= D(f) + D(g) \\ D(fg) &= f D(g) + g D(f)\mathbb{F}. \end{aligned}$$

De cette dernière formule on déduit facilement que D diminue les supports : $\text{supp} D(f) \subset \text{supp} f$. Si ce n'est pas le cas, il existe une fonction α , vérifiant $\text{supp} \alpha \cap \text{supp} f = \emptyset$ et $\text{supp} \alpha \cap \text{supp} Df \neq \emptyset$, et on déduit une contradiction en calculant $D(\alpha f)$.

Si X est un champ de vecteurs sur M de flot ϕ_t , on lui associe la dérivation L_X définie par

$$L_X f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^* f - f) .$$

On note aussi $L_X f = X.f$. Dans cette formule, on utilise la notation $\phi_t^* f$ pour $f \circ \phi_t$, traitant ainsi les fonctions comme des formes différentielles de degré 0 ; on le fait non par pédantisme mais en prévision de la suite. Bien sûr, il y a un abus, car ϕ_t^* n'est pas globalement défini ; il faut comprendre que, $x \in M$ étant fixé, il existe un voisinage V de x et un intervalle I contenant 0 tels que, pour tout $t \in I$, ϕ_t soit défini sur V , donc $\phi_t^* f - f$ a un sens sur V . En fait, la fonction $L_X f$ n'est pas autre chose que $x \mapsto df(x)(X(x))$.

Dans le passage à la limite, la convergence vaut au sens de la topologie C^∞ : convergence uniforme de chaque dérivée sur chaque compact, ce qui a un sens évident dans chaque carte.

Proposition. *L'application $X \mapsto L_X$ est une bijection linéaire de l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur l'espace vectoriel des dérivations.*

Démonstration. Puisque la notion de dérivation est locale, on se ramène sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Pour la surjectivité, à partir d'une dérivation D , on considère le champ de vecteurs $X = (D(x_1), \dots, D(x_n))$, où la i -ème composante est $D(x_i)$, c'est-à-dire D appliquée à la i -ème fonction coordonnée. On va vérifier par un calcul en chaque point que $L_X f = D(f)$. Disons qu'on veut le vérifier en 0 ; un développement limité avec reste intégral permet d'écrire

$$f = f(0) + x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$$

où f_1, \dots, f_n sont des fonctions C^∞ . Il vient :

$$D(f)(0) = \sum_i D(x_i)(0) f_i(0) = df(0).X(0) = (L_X f)(0) .$$

□

Enfin si $\Psi : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme entre deux ouverts, si X est un champ de vecteurs sur U et f une fonction réelle sur V , la formule de "dérivation des fonctions composées" donne la formule de naturalité suivante :

$$X.(\Psi^* f) = \Psi^*((\Psi_* X).f) = ((\Psi_* X).f) \circ \Psi .$$

3.1.5 Structure d'algèbre de Lie

Cette bijection est très importante car elle répercute sur les champs de vecteurs les propriétés algébriques des dérivations.

Proposition. *L'ensemble des dérivations est une algèbre de Lie pour le crochet*

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 .$$

Cela veut dire que le crochet est interne aux dérivations, qu'il est bilinéaire et qu'il vérifie l'identité de Jacobi :

$$[D_1, [D_2, D_3]] + [D_2, [D_3, D_1]] + [D_3, [D_1, D_2]] = 0 .$$

On vérifie ces propriétés par calcul direct. On observe au passage que $D_1 \circ D_2$ n'est pas une dérivation. Le *crochet de Lie* de deux champs de vecteurs X, Y est le champ noté $[X, Y]$ qui dérive les fonctions comme suit :

$$[X, Y].f = X.(Y.f) - Y.(X.f) .$$

Muni du crochet de Lie, l'espace des champs de vecteurs est une algèbre de Lie.

Sur \mathbb{R}^n , le champ de vecteurs constant, égal au i -ème vecteur de coordonnée, est noté $\frac{\partial}{\partial x_i}$ comme la dérivation correspondante. Le crochet de Lie est alors donné par :

$$[X, Y] = \sum_j \left(\sum_i X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

3.1.6 Crochet et flot

Proposition. *On a la formule suivante :*

$$[X, Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(Y - (\phi_t)_* Y \right)$$

où $\{\phi_t\}$ est le flot local du champ X . La limite est au sens C^∞ . Autrement dit :

$$[X, Y] = - \frac{d}{dt} (\phi_t)_* Y \Big|_{t=0} .$$

Démonstration. C'est un calcul.

$$\begin{aligned} [X, Y].f &= X.(Y.f) - Y.(X.f) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^*(Y.f) - Y.f) - Y. \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^* f - f}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^*(Y.f) - Y.f) - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y.\phi_t^* f - Y.f}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*(Y.f) - Y.\phi_t^* f}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{((\phi_{-t})_* Y - Y)}{t} . \phi_t^* f \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_t)_* ((\phi_{-t})_* Y - Y)}{t} . f \end{aligned}$$

Les deux premières égalités découlent des définitions du crochet et de la dérivation associée à X . Dans la troisième, on a permuté une dérivation et une limite ; c'est justifié en topologie C^∞ . La quatrième est un regroupement de termes et la cinquième résulte de la dérivation des fonctions composées (voir 3.1.4). A la fin, on a inséré $(\phi_t)_*$ et retiré ϕ_t^* , ce qui ne change rien à la limite puisque ces deux opérateurs tendent vers l'identité lorsque t tend vers 0.

Remarquer que l'on sait a priori que le membre de gauche existe ; par conséquent, il n'est pas nécessaire de s'interroger sur l'existence de la limite de $\frac{1}{t}((\phi_t)_*Y - Y)$. \square

3.1.7 Compléments.

On a les formules suivantes :

1) (Naturalité) Si ψ est un difféomorphisme,

$$\psi_*([X, Y]) = [\psi_*X, \psi_*Y].$$

2) Avec les notations de la proposition 3.1.6,

$$\frac{d}{dt}(\phi_t)_*Y = -(\phi_t)_*[X, Y].$$

3) Si f est une fonction réelle,

$$[X, fY] = (X.f).Y + f.[X, Y].$$

Preuve. 1) La première formule est claire car le crochet des dérivations est une notion invariante par difféomorphisme.

2) Pour la deuxième, on utilise l'identité de flot :

$$\phi_{t+\theta} = \phi_\theta \circ \phi_t.$$

La formule de dérivation en $\theta = 0$ donne

$$\frac{d}{dt}(\phi_t)_*Y = -[(\phi_t)_*X, (\phi_t)_*Y]$$

ce qui, avec la formule de naturalité, donne la formule cherchée.

3) La vérification est directe au niveau des dérivations ; c'est comme la dérivation d'un produit. \square

On peut trouver en appendice à ce chapitre un bref aperçu sur les *groupes de Lie* à la lumière des considérations précédentes.

Exercice.

1) $[X, Y] = 0 \Leftrightarrow \phi_t \psi_s \phi_{-t} = \psi_s$ où ϕ_t désigne le flot de X et ψ_s celui de Y . Si les champs de vecteurs X et Y sont complets, on a alors affaire à une action de \mathbb{R}^2 sur M définie par $\Psi(s, t)(x) = \psi_s \circ \phi_t(x)$. On peut voir Ψ comme un morphisme de groupes $\mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Diff}(M)$ et, en un sens que l'on précisera, on a :

$$\Psi_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = Y \quad \text{et} \quad \Psi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = X .$$

D'autre part, du point de vue local (donc sans hypothèse de complétude), on a le fait suivant : on suppose qu'en un point $a \in M$, les vecteurs $X(a)$ et $Y(a)$ sont indépendants ; alors il existe un redressement simultané des deux champs de vecteurs au voisinage de a , c'est-à-dire une carte dans laquelle X (resp. Y) coïncide avec le premier (resp. le second) vecteur coordonné.

2) $[X, Y] = Y \Leftrightarrow \phi_t \psi_s = \psi_{se^{-t}} \phi_t$,

cela pour tout (t, s) voisin de $(0, 0)$, et globalement si les champs sont complets.

Définition. On dit que deux champs de vecteurs X et Y *commutent* ou qu'ils sont *commutants* si $[X, Y] = 0$.

A propos des champs commutants, on peut citer le résultat de [Lima] : *Deux champs de vecteurs commutants sur la sphère S^2 ont un zéro commun.*

On sait déjà que tout champ de vecteurs sur la sphère a un zéro ; la commutation implique que le flot d'un des champs laisse invariant l'ensemble des zéros de l'autre. Mais à partir de là, il reste encore du travail à faire.

3.1.8 Relation entre le crochet des champs de vecteurs et le cobord

Proposition (Formule intrinsèque du cobord). *Si ω est une forme de degré 1 et si X et Y sont deux champs de vecteurs, on a :*

$$(d\omega)(X, Y) = X.\omega(Y) - Y.\omega(X) - \omega([X, Y]) .$$

Démonstration. Pour $\omega = df$, le membre gauche est nul car $d \circ d = 0$. Le membre droit est aussi nul par la définition du crochet de deux champs de vecteurs comme dérivation. Ensuite, on obtient la formule pour $\omega = g df$, car on sait comment chaque membre se comporte par rapport au produit. \square

Cette formule appelle des remarques. Le membre de gauche est C^∞ -bilinéaire : si f est une fonction réelle, on a

$$d\omega(fX, Y) = f d\omega(X, Y) = d\omega(X, fY) .$$

Dans le membre de droite, si on garde seulement $X.\omega(Y) - Y.\omega(X)$ qui est la partie créant l'antisymétrie, on n'a pas cette propriété. Le terme avec $[X, Y]$ est la correction qui la restitue.

Par ailleurs, si on s'intéresse au calcul en un point, on peut travailler avec des champs commutants : si on se donne deux vecteurs dans T_aM , ils appartiennent toujours à deux champs de vecteurs commutants.

Exercice. Généraliser la formule intrinsèque du cobord en tout degré.

3.2 Dérivée de Lie des formes différentielles

3.2.1 Définition de la dérivée de Lie

On considère une forme différentielle ω de degré k et un champ de vecteurs X de flot local ϕ_t . On pose :

$$L_X\omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\phi_t^*\omega - \omega) .$$

On peut se convaincre que la limite existe, mais c'est inutile car la formule de Cartan ci-dessous donne une valeur explicite à cette limite. Avant ceci, précisons la relation entre la dérivée de Lie et la dérivée par rapport au temps $\frac{d}{dt}(\phi_t^*)$. On a :

$$\frac{d}{dt}(\phi_t^*\omega) = \phi_t^*(L_X\omega) .$$

On a vu une formule analogue pour la dérivée de Lie des champs de vecteurs et l'argument est le même. Pour la dérivée au temps t , on écrit la formule du flot $\phi_{t+\theta} = \phi_\theta \circ \phi_t$ et $\frac{1}{\theta}(\phi_{t+\theta}^*\omega - \phi_t^*\omega) = \phi_t^*\left(\frac{\phi_\theta^*\omega - \omega}{\theta}\right)$; on prend la limite pour $\theta \rightarrow 0$. Enfin on utilise que ϕ_t^* commute au passage à la limite.

3.2.2 Formule de Cartan

$$L_X\omega = i(X) d\omega + d(i(X)\omega)$$

où d est l'opérateur cobord et où $i(X)$ est le produit intérieur par X .

Démonstration.

- 1) La formule est locale.
- 2) Elle est vraie pour les fonctions : $L_X f = i(X) df$.
- 3) L_X et d commutent car le passage à la limite définissant L_X a lieu dans C^∞ . D'un autre côté, l'opérateur $i(X) \circ d + d \circ i(X)$ commute visiblement avec d .
- 4) Les deux membres sont des dérivations de degré 0 sur l'algèbre des formes différentielles, c'est-à-dire vérifient $D(\alpha \wedge \beta) = D\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge D\beta$.

A partir de là, comme toute forme s'écrit localement $\sum f_i dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, la formule est toujours vraie. \square

3.2.3 Formules importantes

- 1) $L_X d\omega = d L_X \omega$.
- 2) $L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X \beta$.
- 3) Pour une fonction f , $L_X(f\omega) = L_X f \wedge \omega + f L_X \omega$. C'est un cas particulier de la formule précédente pour $\deg \alpha = 0$.
- 4) $L_{X+Y}\omega = L_X \omega + L_Y \omega$.
- 5) $L_{fX}\omega = f L_X \omega + df \wedge i(X)\omega$.
- 6) $L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$.

3.2.4 Cas d'un volume

Soit ω une forme volume; $L_X \omega = d i(X)\omega$ est une forme de degré maximal, donc produit de ω par une fonction. Ce coefficient fonction est par définition la *divergence* de X par rapport au volume ω et est noté $\operatorname{div}_\omega(X)$. Si ω est la forme volume canonique de \mathbb{R}^n , c'est la divergence usuelle

$$\operatorname{div}(X) = \sum \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$$

où $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Si D est un domaine (= sous-variété de codimension 0, compacte à bord) dans une variété M munie d'une forme volume ω , on a :

(Théorème de Liouville)

$$\left. \frac{d}{dt} (\text{volume } \phi_t(D)) \right|_{t=0} = \int_D \operatorname{div}_\omega(X) \omega = \int_{\partial D} i(X) \omega .$$

En effet :

$$\begin{aligned} \operatorname{vol} \phi_t(D) &= \int_{\phi_t(D)} \omega = \int_D \phi_t^* \omega \\ \left. \frac{d}{dt} \operatorname{vol} \phi_t(D) \right|_{t=0} &= \int_D L_X \omega = \int_D \operatorname{div}_\omega X \omega = \int_D d(i(X)\omega) = \int_{\partial D} i(X) \omega . \end{aligned}$$

La dernière égalité est donnée par la formule de Stokes (voir 2.4.4). Noter que M est orientable au voisinage de D par l'existence d'une forme volume; ∂D reçoit alors son orientation comme bord de D (voir 2.4.3). \square

L'intégrale sur ∂D mérite de s'appeler le *flux*, car seule la composante normale de X intervient dans le calcul de $i(X)\omega$ sur des vecteurs tangents à ∂D . Finalement, on voit que *le flot d'un champ de vecteurs préserve le volume ω si et seulement si $\operatorname{div}_\omega X = 0$* .

Remarques.

1) Les champs de vecteurs *hamiltoniens* sont des champs de vecteurs qui préservent une forme volume (voir le cours de J.P. Bourguignon *Calcul variationnel* ou [Arnold]).

nd 2) Pour un difféomorphisme φ préservant une forme volume (qu'il soit ou non sur un groupe à un paramètre) et à support compact, on a le principe de récurrence de Poincaré (voir

[Arnold], p.77) : pour tout ouvert U et presque tout point $x \in U$, la φ -orbite de x , c'est-à-dire l'ensemble $\{x, \varphi(x), \varphi^2(x), \dots\}$, passe dans U une infinité de fois. On pourra apprécier avec Arnold l'étrange paradoxe que ce principe soulève en dynamique des gaz.

3.2.5 Dérivée de Lie par rapport à un champ dépendant du temps

Un champ de vecteurs dépendant du temps X_t donne lieu à des solutions locales ϕ_t vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x) = X_t(\phi_t(x)) \\ \phi_0(x) = x \end{cases}$$

La formule de groupe additif (ou formule de flot) n'est plus satisfaite. Cependant, on a encore la formule de dérivation.

Formule de dérivation

$$\frac{d}{dt}(\phi_t^* \omega) = \phi_t^* L_{X_t} \omega$$

Démonstration. Faisons-la par exemple en $t = 0$. On veut démontrer :

$$\left. \frac{d}{dt} \phi_t^* \omega \right|_{t=0} = L_{X_0} \omega.$$

On introduit le flot local ψ_t du champ X_0 . Les développements au premier ordre donnent :

$$\begin{aligned} \phi_t(x) &= x + t X_0(x) + o(t) \\ d\phi_t(x) &= \text{Id} + t dX_0(x) + o(t). \end{aligned}$$

Ici, $d\phi_t$ (resp. dX_0) désigne la différentielle au point x de l'application ϕ_t (resp. X_0) vue comme une application d'un ouvert de \mathbb{R}^n vers un ouvert de \mathbb{R}^n (attention : sur une variété, il n'est pas loisible de différentier un champ de vecteurs, il faut le faire dans une carte). Il en est de même pour ψ_t et pour sa différentielle $d\psi_t(x)$, et cela avec la même partie principale dans le développement limité. Donc $\phi_t^* \omega - \psi_t^* \omega = o(t)$. La formule de dérivation pour le flot ψ_t de X_0 donne donc le résultat. \square

3.2.6 Un exemple d'application : le lemme $\mathcal{M}J^2$ et le lemme de Morse

Voir [23, 16].

3.2.7 Le lemme $\mathcal{M}J^2$

Il est commode d'utiliser la notion de *germe*. Deux fonctions C^∞ f et g définies au voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^n ont le même germe en 0 si elles coïncident sur un voisinage de 0. Il n'y a pas de topologie sympathique sur un ensemble de germes. On définit donc un chemin f_t de germes en 0 sur \mathbb{R}^n , $t \in [0, 1]$, comme étant un germe de fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$ le long de $\{0\} \times [0, 1]$.

Soit donc \mathcal{F} l'anneau des germes en 0 de fonctions C^∞ sur \mathbb{R}^n . Soit \mathcal{M} l'idéal des germes nuls en 0; c'est un idéal maximal; il est engendré par les fonctions coordonnées. Pour $f \in \mathcal{F}$, on note $J = J(f)$ l'*idéal jacobien*, c'est-à-dire l'idéal de \mathcal{F} engendré par les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Théorème. *Soit $f \in \mathcal{F}$ un germe de fonction C^∞ avec $df(0) = 0$ et J son idéal jacobien, $J \subset \mathcal{M}$. Si $h \in \mathcal{M}J^2$ alors les germes f et $f + h$ sont conjugués : il existe un germe de difféomorphisme ϕ de $(\mathbb{R}^n, 0)$ tel que $(f + h) \circ \phi = f$.*

Avant de donner la démonstration, montrons que le lemme de Morse en est une application directe.

3.2.8 Lemme de Morse

Soit $f \in \mathcal{M}$. On suppose que 0 est un point critique de f et que son hessien en 0 est non singulier : $\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right) \neq 0$. Alors il existe un germe de difféomorphisme ϕ de \mathbb{R}^n tel que $f \circ \phi$ soit un polynôme homogène du second degré.

Démonstration. Soit q le polynôme de Taylor de degré 2 de f en 0. L'hypothèse sur le hessien se traduit par $J(q) = \mathcal{M}$. En effet, on a évidemment $J(q) \subset \mathcal{M}$. Mais, en vertu du théorème de la fonction réciproque, les fonctions $\frac{\partial q}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial q}{\partial x_n}$ définissent des coordonnées locales au voisinage de l'origine; appliquant, dans ces coordonnées la formule de Taylor avec reste intégral, on trouve que toute fonction nulle en 0 est dans l'idéal $J(q)$, d'où $J(q) = \mathcal{M}$. Donc $\mathcal{M}J^2 = \mathcal{M}^3$. De nouveau par la formule de Taylor avec reste intégral, $f - q \in \mathcal{M}^3$; donc $f - q \in \mathcal{M}J^2$ et en vertu du théorème ci-dessus $f = q + (f - q)$ est conjugué à q au voisinage de 0. \square

3.2.9 Démonstration du lemme \mathcal{MJ}^2

On cherche à résoudre un problème plus fort : trouver un chemin ϕ_t de germes de difféomorphismes de $(\mathbb{R}^n, 0)$, $t \in [0, 1]$, tels que $\phi_0 = \text{Id}$ et que, pour tout t , on ait :

$$(1) \quad (f + th) \circ \phi_t = f .$$

L'équation (1) équivaut à l'équation (2) obtenue en dérivant par rapport à t , dans laquelle on pose $f_t = f + th$:

$$(2) \quad \begin{cases} X_t \cdot f_t + h = 0 \\ X_t(0) = 0 \end{cases}$$

En effet, en dérivant (1), on obtient

$$df_t(\phi_t(x)) \left(\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x) \right) + h(\phi_t(x)) = 0$$

qui s'écrit

$$\left(X_t \cdot f_t + h \right) \circ \phi_t = 0$$

si on note X_t le champ de vecteurs dépendant du temps dont ϕ_t est solution :

$\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x) = X_t(\phi_t(x))$. On a $X_t(0) = 0$ car ϕ_t laisse fixe l'origine.

Inversement, si on a un champ de vecteurs nul en 0, il s'intègre jusqu'au temps 1 sur un petit voisinage de l'origine donnant donc lieu à un chemin ϕ_t de germes de difféomorphismes. Si X_t satisfait (2), alors ϕ_t vérifie (1), ce qui prouve l'équivalence (1) \Leftrightarrow (2).

Trouver X_t satisfaisant (2) consiste à écrire h sous la forme

$$(3) \quad h = \sum a_t^i \frac{\partial f_t}{\partial x_i},$$

où a_t^i est un chemin dans \mathcal{M} .

AFFIRMATION : On a

$$J(f_t) = J(f) .$$

En effet, $\frac{\partial f_t}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + t \frac{\partial h}{\partial x_i}$. On vérifie que, si $h \in \mathcal{MJ}^2$, on a $\frac{\partial h}{\partial x_i} \in \mathcal{MJ}$. Donc :

$$\left(\frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right) = A_t \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

où A_t est une matrice qui coïncide avec l'identité modulo \mathcal{M} . Elle est donc inversible. Ainsi

$$(4) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = A_t^{-1} \left(\frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right),$$

ce qui prouve l'affirmation.

Comme $h \in \mathcal{MJ}$, on a $h = \sum a_o^i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ avec $a_o^i \in \mathcal{M}$. Si on remplace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ par (4), on obtient la décomposition (3). \square

3.3 Le lemme de Darboux sur les formes symplectiques

3.3.1 Définition

Une *forme symplectique* ω sur une variété est une forme différentielle *fermée* de degré 2 qui définit sur chaque espace tangent une forme bilinéaire alternée non singulière et donc un isomorphisme de $T_x M$ sur son dual ; la dimension doit alors être paire (une matrice antisymétrique de dimension impaire a toujours un noyau non trivial). Les formes symplectiques apparaissent naturellement en mécanique hamiltonienne (voir [2]).

Le lemme de Darboux énonce qu'à difféomorphisme près il n'y a qu'un seul modèle local de forme symplectique à savoir

$$dx_1 \wedge dx_2 + \dots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n} .$$

On en donne une démonstration qui remonte à [32] et utilise la méthode du chemin, qui ici met en jeu la dérivée de Lie de formes différentielles.

3.3.2 Lemme de Darboux

Soit ω un germe de forme symplectique sur $(\mathbb{R}^n, 0)$. Alors il existe un germe de difféomorphisme ϕ tel que :

$$\phi^* \omega = dx_1 \wedge dx_2 + \dots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n} .$$

Démonstration. Du point de vue de l'algèbre linéaire, on sait qu'il existe un automorphisme linéaire conjuguant entre elles deux formes bilinéaires alternées non-singulières. On peut donc supposer que $\omega(0) = dx_1 \wedge dx_2 + \dots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n} = \omega_0$.

Soit $\omega_t = t\omega + (1-t)\omega_0$. C'est un chemin dans les germes en 0 de formes différentielles fermées. Pour tout t , ω_t est un germe de forme symplectique, car $\omega_t(0) = \omega_0$ est non-singulier ; donc, pour x voisin de 0, $\omega_t(x)$ est encore non-singulier. Alors au lieu de résoudre $\phi^* \omega = \omega_0$, on cherche à résoudre :

$$(1) \quad \begin{cases} \phi_t^* \omega_t = \omega_0 , & t \in [0, 1], \\ \phi_0 = Id \end{cases}$$

qui équivaut par dérivation-intégration à :

$$(2) \quad \begin{cases} L_{X_t} \omega_t + \frac{\partial \omega_t}{\partial t} = 0 , & t \in [0, 1] \\ X_t(0) = 0 \end{cases}$$

Si X_t et ϕ_t sont reliés par $\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = X_t(\phi_t)$, en dérivant (1), on trouve :

$$\phi_t^* \left(L_{X_t} \omega_t + \frac{\partial \omega_t}{\partial t} \right) = 0,$$

ce qui donne la première ligne de (2) car, comme ϕ_t est un difféomorphisme, l'opérateur ϕ_t^* est inversible. L'équivalence se justifie mot à mot comme au paragraphe précédent. Utilisant que $d\omega_t = 0$, (2) équivaut à (3) :

$$(3) \quad \begin{cases} d(i(X_t)\omega_t) + \frac{\partial\omega_t}{\partial t} = 0 \\ X_t(0) = 0 \end{cases}$$

Ici $\frac{\partial\omega_t}{\partial t} = \omega - \omega_0$ est un germe de forme fermée indépendant de t . Par le lemme de Poincaré, la contraction radiale $(x, s) \mapsto sx$ associée à chaque forme fermée définie sur une boule autour de 0 a une primitive canonique. La primitive de Poincaré est une forme différentielle α de degré 1 telle que :

$$d\alpha = \frac{\partial\omega_t}{\partial t} \quad \text{et} \quad \alpha(0) = 0.$$

Ainsi (3) est impliquée par :

$$(4) \quad \begin{cases} i(X_t)\omega_t + \alpha = 0 \\ X_t(0) = 0 \end{cases}$$

Comme $\omega_t(x)$ est non-singulière, l'application $X(x) \mapsto i(X(x))\omega_t(x)$ est un isomorphisme de $T_x\mathbb{R}^n$ sur son dual. Ainsi la première équation de (4) a une unique solution en X_t . La seconde est satisfaite car $\alpha(0) = 0$. \square

Remarque. Cette démonstration d'un résultat local est en réalité due à A. Weinstein [48], car l'article (antérieur) de Moser s'attache à des résultats globaux. Ceux-ci se démontrent tous selon le même principe ; citons-les.

On considère une variété compacte sans bord M , munie d'un chemin (C^∞) de formes différentielles fermées ω_t , $t \in [0, 1]$, dont la classe de cohomologie est indépendante de t . On fait sur les formes ω_t l'une des hypothèses suivantes :

- 1) *elles sont de degré 1 et non singulières, c'est-à-dire qu'elles ne s'annulent en aucun point de M ,*
- 2) *elles sont symplectiques,*
- 3) *elles sont des formes-volumes.*

Alors les formes sont conjuguées entre elles : il existe un chemin ϕ_t de difféomorphismes de M tels que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\phi_t^\omega_t = \omega_0$.*

3.4 Aperçu sur l'intégrabilité des formes de degré 1

Théorème de Frobenius

Pour ce qui est de leur classification d'un point de vue topologique les formes différentielles restent largement mal comprises, si l'on excepte le résultat de Moser mentionné ci-dessus et surtout les formes différentielles de degré 1 qui forment à elles toutes seules un grand chapitre des mathématiques incluant les *feuilletages* d'une part et la *géométrie de contact* d'autre part.

3.4.1 Le problème du facteur intégrant.

On considère une forme différentielle α de degré 1 *non singulière* sur la variété M . Elle définit un champ d'hyperplans tangents à M , c'est-à-dire un sous-fibré (vectoriel) de TM , noté $\ker \alpha$, dont la fibre en $x \in M$ est le noyau de $\alpha(x) : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$. On s'intéresse aux propriétés de α qui ne dépendent que de son champ des noyaux, c'est-à-dire qui soient préservées par le changement $\alpha \mapsto f\alpha$, où f est une fonction réelle sans zéros. Le fait d'être fermée n'a pas cette propriété car $d\alpha = 0$ n'implique pas la nullité de $d(f\alpha) = df \wedge \alpha$. En revanche par construction même, le fait d'avoir un *facteur intégrant* est une propriété du champ de plan.

Définitions.

- 1) Soit α une forme différentielle de degré 1 *non singulière*. On dit que la fonction réelle f est un *facteur intégrant* pour α , si elle est sans zéros et si $f\alpha$ est une forme fermée.
- 2) Si α admet un *facteur intégrant*, on dit que α est *intégrable*.
- 3) Pour un champ ξ d'hyperplans tangents à M , on dit que ξ est *intégrable* si, au voisinage de chaque point, il existe une forme différentielle intégrable α telle que $\ker \alpha = \xi$ (restreint à ce voisinage).

Un sous-fibré ξ de TM de codimension 1 est défini par une équation globale $\alpha = 0$ si et seulement si le fibré quotient TM/ξ est trivial ; c'est la raison pour laquelle dans 3) on doit se restreindre à des voisinages. Dans le contexte de 3), au voisinage de tout point on peut prendre pour α une forme fermée et même une forme exacte en vertu du lemme de Poincaré, c.-à-d. la différentielle d'une fonction, qui sera automatiquement sans point critique.

D'autre part dans 1), si on impose à f de ne pas avoir de zéros, c'est pour ne pas sortir de la classe des formes non singulières. On a alors un énoncé de "redressement du champ", analogue à celui bien connu pour les champs de vecteurs sans zéros, mais élémentaire à prouver car la difficulté est cachée dans la définition :

Proposition. Soit ξ un champ d'hyperplans tangents à une variété M . On suppose que ξ est intégrable. Alors, au voisinage de tout point $a \in M$, il existe des coordonnées x_1, \dots, x_n telles que $\xi = \ker(dx_1)$.

Démonstration. Par définition il existe un voisinage U de a et une fonction sans point critique $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $\xi|_U = \ker dg$. Le théorème des fonctions implicites énonce alors que, quitte à rétrécir U , g peut être prise comme fonction première coordonnée. \square

3.4.2 La condition d'intégrabilité de Frobenius

La nullité de $\alpha \wedge d\alpha$ est une condition nécessaire d'intégrabilité. En effet elle est satisfaite si α est une forme fermée. Par ailleurs, elle est préservée par multiplication par une fonction (sans zéros), comme le montre le calcul suivant :

$$f\alpha \wedge d(f\alpha) = f^2\alpha \wedge d\alpha - fdf \wedge \alpha \wedge \alpha = f^2\alpha \wedge d\alpha.$$

Théorème de Frobenius

Une forme différentielle α , non singulière de degré 1, est intégrable si et seulement si elle vérifie $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

Démonstration de la suffisance. La question est locale; on travaille sur un voisinage U d'un point a et on se permet de rétrécir U autant que l'on veut. On commence par un lemme d'algèbre.

Lemme 1. La condition $\alpha \wedge d\alpha = 0$ équivaut au fait que (localement) $d\alpha$ est divisible par α , c'est-à-dire qu'il existe une 1-forme η telle que $d\alpha = \alpha \wedge \eta$.

Preuve. En effet, il existe sur U un champ de repères du fibré cotangent T^*M , $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, avec $\epsilon_1 = \alpha$. Il lui correspond un champ de repères du fibré $\wedge^2 T^*M : (\epsilon_i \wedge \epsilon_j)_{i < j}$. On peut décomposer $d\alpha$ dans ce repère; il vient $d\alpha = \alpha \wedge \eta + \beta$, où β ne contient aucun terme en $\epsilon_1 \wedge \epsilon_j$. Un calcul montre que si β n'est pas nul alors $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$. \square

Lemme 2. Soit X un champ de vecteurs dans le noyau de α et soit ϕ_t son flot local. Si $\alpha \wedge d\alpha = 0$, alors le flot de X laisse $\ker \alpha$ invariant :

$$\phi_t^*(\ker \alpha) = \ker \alpha.$$

Preuve. Il s'agit de voir que $\phi_t^*\alpha$ est proportionnel à α ou encore, par intégration d'une équation différentielle, que $\frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha$ est proportionnel à $\phi_t^*\alpha$. Or avec les notations du lemme 1 et en tenant compte de $\alpha(X) = 0$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha &= \phi_t^*(L_X\alpha) = \phi_t^*(i(X)d\alpha) \\ &= -(\eta(X) \circ \phi_t) \cdot (\phi_t^*\alpha). \end{aligned}$$

\square

La fin de la démonstration se fait par récurrence sur n , la dimension de la variété. Soit N une sous-variété passant par a et dont l'espace tangent en a contient un supplémentaire de $\ker \alpha(a)$; soit $j : N \hookrightarrow M$ l'inclusion. La forme induite $j^*\alpha$ est non singulière au voisinage de a et vérifie la condition de Frobenius : $j^*\alpha \wedge d(j^*\alpha) = 0$. Par hypothèse de récurrence il existe des coordonnées (x_1, \dots, x_{n-1}) de N telles que $\ker(j^*\alpha) = \ker dx_1$. On choisit un vecteur $X(a) \in \ker \alpha(a)$, non tangent à N , que, l'on prolonge au voisinage en un champ de vecteurs X dans $\ker \alpha$ nulle part tangent à N . On commence par lui appliquer le théorème classique de redressement du champ : les coordonnées (x_1, \dots, x_{n-1}) de N au voisinage de a peuvent être complétées par une n -ième fonction x_n pour former des coordonnées de M au voisinage de a avec les propriétés suivantes :

$$1) X = \frac{\partial}{\partial x_n},$$

2) $x_n = 0$ est l'équation locale de N .

On peut alors affirmer qu'en tout point de N voisin de a on a $\ker \alpha = \ker dx_1$. Enfin on applique le lemme 2 et, comme le flot de X est le flot des translations parallèlement au dernier axe, on trouve qu'en tout point de M voisin de a on a $\ker \alpha = \ker dx_1$. \square

3.4.3 Feuilletage d'un point de vue global

Il ne s'agit ici que d'ouvrir une fenêtre sur un vaste sujet. Une bonne référence est [13].

Si M est une variété munie d'un champ d'hyperplans tangents ξ intégrable, on a un atlas dont les cartes sont celles données par la proposition 5.1 ; elles sont appelées *cartes feuilletées*. L'allure des changements de cartes explique cette terminologie imagée. Ils sont de la forme

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x'_1, \dots, x'_n)$$

où x'_n n'est fonction que de x_n . Autrement dit les *plaques* $x_n = \text{const}$ sont recollées à des plaques $x'_n = \text{const}$. Une *feuille* est la relation d'équivalence sur M définie comme suit : deux points appartiennent à la même feuille s'ils sont joignables par un arc tangent à ξ . On démontre sans peine que les feuilles sont des images de variétés de dimension $n - 1$ par des immersions injectives en général non propres. Les feuilles sont pour ξ ce que sont les orbites pour un champ de vecteurs. Une feuille peut "spiraler" autour d'une autre feuille, voire autour d'elle-même comme c'est le cas pour un feuilletage "linéaire" de pente irrationnelle sur le tore T^n . Cette notion de "spirale" est bien formalisée par le concept d'*holonomie*.

La question de l'existence de feuilletage de codimension 1 (c.-à-d. défini par un champ d'hyperplans intégrable) sur une variété donnée a été longtemps une question ouverte. La solution définitive est due à W. Thurston en 1975 [46]. Même le cas des sphères, résolu peu de temps auparavant, a offert une sérieuse résistance. *Toutes les sphères de dimension impaire admettent un feuilletage de codimension 1.*

Les sphères de dimension paire sont exclues pour une raison de topologie algébrique : l'existence d'un sous-fibré de codimension 1 du fibré tangent implique que la "caractéristique d'Euler

est nulle”, alors qu'elle vaut 2 pour les sphères de dimension paire. Le plus célèbre des feuilletages sur S^3 est le *feuilletage de Reeb* qui est décrit ci-dessous.

3.4.4 Le feuilletage de Reeb

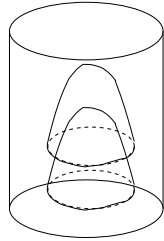
La sphère S^3 , vue comme sphère unité de \mathbb{C}^2 , est la réunion de deux tores solides Θ_1, Θ_2 , ($\Theta_i \cong D^2 \times S^1$), recollés le long de leur bord commun. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, |z_1| \leq |z_2|\} \\ \Theta_2 &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, |z_2| \leq |z_1|\}\end{aligned}$$

L'intersection des deux tores solides est le tore ($\cong S^1 \times S^1$)

$$T = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 = |z_2|^2 = 1/2\}.$$

On construit un feuilletage sur le tore solide $D^2 \times S^1$ de sorte que le bord soit une feuille. Ainsi, grâce à leur difféomorphisme canonique avec $D^2 \times S^1$, Θ_1 et Θ_2 se trouvent feuilletés avec T comme feuille commune et on vérifie que la réunion est bien un feuilletage lisse de S^3 , c'est-à-dire que le champ de plans tangents est C^∞ .



La figure représente trois morceaux de feuilles du feuilletage de Reeb de $D^2 \times S^1$.

Le feuilletage du tore solide s'obtient comme suit. On considère sur $D^2 \times \mathbb{R}$, muni des coordonnées cylindriques (r, θ, t) , la forme différentielle

$$\alpha = \cos^2(r^2) dt - 2r dr$$

(ici D^2 est le disque de rayon $\sqrt{\pi/2}$). Elle est intégrable et ses feuilles sont :

- le cylindre d'équation $r^2 = \pi/2$,
- les graphes ($\cong \mathbb{R}^2$) d'équations $t = \tan r^2 + const.$ au-dessus du disque ouvert.

On observe que ce feuilletage est préservé par les translations verticales. Le passage au quotient par les translations verticales *entières* fournit le feuilletage de Reeb sur $D^2 \times S^1$, connu sous le nom de *composante de Reeb*.

On peut à juste titre se demander s'il n'y a pas plus simple. La réponse est non, d'après un grand théorème de S. P. Novikov : *tout feuilletage de codimension de S^3 contient une composante de Reeb et en particulier une feuille compacte.*

3.4.5 Exercice : la classe de Godbillon-Vey

On considère un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 sur une variété M , dont le fibré tangent est globalement le noyau d'une 1-forme α (intégrable). Reprenons le calcul fait en 3.4.2 lemme 1, qui a aussi un sens global : $\alpha \wedge d\alpha = 0$ implique $d\alpha = \alpha \wedge \eta$. En dérivant il vient $d\alpha \wedge \eta - \alpha \wedge d\eta = 0$. Mais $d\alpha \wedge \eta = \alpha \wedge \eta \wedge \eta = 0$. Donc $\alpha \wedge d\eta = 0$ et de nouveau $d\eta$ est divisible par α : $d\eta = \alpha \wedge \zeta$.

Montrer que $\eta \wedge d\eta$ est une forme fermée. Montrer que, la forme α étant fixée, la classe de cohomologie de $\eta \wedge d\eta$ ne dépend pas du choix de η [remplacer η par $\eta + g\alpha$ où g est une fonction]. Montrer que changer α en $f\alpha$, où f est une fonction ne s'annulant pas, ne change pas non plus la classe de cohomologie considérée, qui finalement est une *classe caractéristique* du feuilletage.

Pour le feuilletage de Reeb de S^3 , cette classe est nulle mais R. Roussarie a découvert que les quotients compacts de $SL(2, \mathbb{R})$ par des sous-groupes discrets sont munis de feuilletages de codimension 1 où la classe de Godbillon-Vey est non nulle (voir [10]).

3.4.6 A l'opposé des formes intégrables, les formes de contact

L'exemple le plus classique de forme non intégrable sur \mathbb{R}^3 est $\alpha_0 = dz - ydx$. On vérifie que $\alpha_0 \wedge d\alpha_0$ est une forme volume, c'est-à-dire qu'elle ne s'annule en aucun point. L'importance de cette forme tient à ceci : une courbe de la forme $x \mapsto (x, y = f(x), z = F(x))$ a sa tangente (vectorielle) dans $\ker \alpha_0$ si et seulement si $f(x) = \frac{dF}{dx}$. Établir à titre d'exercice les faits suivants :

- 1) Il n'existe aucune surface S dont le plan tangent $T_a S$ coïncide avec le noyau de $\alpha_0(a)$ en chaque point $a \in S$.
- 2) Etant donné une courbe C^1 , $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et $z_0 \in \mathbb{R}$, il existe un unique relèvement dit *legendrien* $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ vérifiant $\Gamma(0) = (x(0), y(0), z_0)$ et $\dot{\Gamma}(t) \in \ker \alpha_0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Si γ est un lacet ($\gamma(0) = \gamma(1)$), la quantité $z(1) - z(0)$ est l'aire entourée par γ dans le plan (x, y) muni de la forme d'aire $dy \wedge dx$.
- 3) Tout chemin peut être approché au sens C^0 par un chemin legendrien ayant les mêmes extrémités.

Ce dernier point contraste fortement avec le cas d'une forme intégrable où, en général, deux points n'appartiennent pas à la même feuille c'est-à-dire ne sont pas joignables par un chemin dont l'espace tangent est contenu dans le noyau de la forme considérée.

La forme ci-dessus sur \mathbb{R}^3 est un exemple de *forme de contact*. Par définition, *une forme de contact sur une variété M , de dimension $2n + 1$, est une forme différentielle de degré 1 α telle que $\alpha \wedge (d\alpha)^n = \alpha \wedge d\alpha \wedge \dots \wedge d\alpha$ soit une forme volume.*

On trouvera dans [2], Appendice 4, l'origine de cette terminologie. Il y a des relations étroites entre les formes de contact et les formes symplectiques. Le renouveau spectaculaire de la géométrie symplectique depuis les années 80 engendre aussi un important développement de

la géométrie de contact. L'exemple fondamental suivant justifierait à lui tout seul une étude systématique de la géométrie de contact.

Exemple. Soit N^n une variété de dimension n . Si $(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ sont des coordonnées locales de N , il leur correspond canoniquement des coordonnées $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \in (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n$ pour le fibré cotangent T^*N . On vérifie que la 1-forme, dite de Liouville,

$$\lambda = \sum p_i dq_i$$

est invariante par les changements de coordonnées du fibré cotangent. Autrement dit, λ est bien définie sur T^*N . Les deux faits suivants sont de première importance :

- 1) $d\lambda$ est une forme symplectique ; c'est la forme symplectique canonique du cotangent.
- 2) Si N est munie d'une structure riemannienne μ (établissant un isomorphisme du tangent sur le cotangent) et si $U \subset T^*N$ est le fibré unitaire associé, alors la forme induite par λ sur U est une forme de contact.

Appendice sur les groupes de Lie

A.1 Champs de vecteurs invariants à gauche

Un *groupe de Lie* G est une variété (C^∞) munie d'une loi de groupe (notée multiplicativement dans la suite) de sorte que le produit et l'inverse soient des applications C^∞ , respectivement $G \times G \rightarrow G$ et $\rightarrow G$. Les premiers exemples sont les groupes de matrices (groupe linéaire, unitaire, symplectique, spécial linéaire).

On note e l'élément neutre et $T_e G$ l'espace tangent à G en e . Pour $g \in G$, on note R_g (resp. L_g) la multiplication à droite (resp. à gauche) par g ; ce sont des difféomorphismes de G . Un champ de vecteurs X sur G est *invariant à gauche* si $L_{g*} X = X$ pour tout $g \in G$. Évidemment, un tel champ X est complètement déterminé par le vecteur $X(e)$, par la formule

$$X(g) = (L_{g*} X)(e) = (TL_g) X(e).$$

Il y a un isomorphisme linéaire canonique entre l'espace (de dimension finie) $T_e G$ et l'espace des champs invariants à gauche. On vérifie facilement le fait primordial suivant.

le crochet de deux champs de vecteurs invariants à gauche est invariant à gauche.

Donc par la bijection précédente le crochet des champs de vecteurs donne une structure d'algèbre de Lie à l'espace tangent en l'élément neutre $T_e G$, qui devient *l'algèbre de Lie du groupe* ; on la note \mathcal{G} . Pour $x, y \in \mathcal{G}$, on note $[x, y] \in \mathcal{G}$ leur crochet.

Par exemple, pour $G = GL_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}l_n$ est l'espace vectoriel de toutes les matrices carrées $n \times n$ et le crochet est donné par

$$[A, B] = AB - BA.$$

Un des premiers résultats remarquables dans la théorie des groupes de Lie est qu'*un sous-groupe fermé dans un groupe de Lie est une sous-variété* et donc lui-même un groupe de Lie. On peut se demander si tout groupe de Lie ne serait pas un sous-groupe de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$, pour un n assez grand. La réponse est non, par exemple pour le revêtement à deux feuillets de $GL_n(\mathbb{R})$ (c-à-d le groupe de Lie simplement connexe dont l'algèbre de Lie est $\mathcal{G}l_n$); je dois cette information à J.P. Bourguignon. En revanche, la réponse est positive pour tout groupe de Lie compact (voir [7], Th.III 4.1).

A.2 L'application exponentielle

C'est un exercice intéressant - laissé au lecteur - de voir que les champs de vecteurs invariants à gauche sont complets. Soit donc X un tel champ et soit $x = X(e)$. L'application *exponentielle*, notée $\exp : \mathcal{G} \rightarrow G$ est définie en considérant le flot de X , qui est défini pour tout temps, et en prenant l'image de e au temps 1. La terminologie trouve son origine dans le cas particulier de $G = S^1$; $\mathcal{G} = \mathbb{R}$ et l'application exponentielle coïncide avec l'exponentielle usuelle. La comparaison avec ce cas particulier se poursuit un peu plus loin :

1) Si t_1 et t_2 sont réels, on a :

$$\exp(t_1 + t_2)x = \exp t_1x \cdot \exp t_2x.$$

2) L'application tangente à l'origine, $T_{(0)}\exp : \mathcal{G} = T_0\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} = T_eG$ est l'identité.

En revanche si le groupe n'est pas commutatif, on n'a pas en général

$$\exp(x_1 + x_2) = \exp x_1 \cdot \exp x_2,$$

comme on le sait pour $GL_n(\mathbb{R})$, cas que nous traitons ci-dessous.

L'exponentielle sur $GL_n(\mathbb{R})$. Ce groupe de Lie, est un ouvert dans l'espace vectoriel $\mathcal{G}l_n = \text{End}(\mathbb{R}^n)$. En fait, tous les espaces tangents T_gGL_n s'identifient canoniquement à $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ et, avec cette identification, si X est un champ de vecteurs invariant à gauche tel que $X(Id) = A$, alors, $X(g) = gA$ pour tout $g \in GL_n$.

Pour trouver son flot, on doit donc résoudre dans $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ l'équation différentielle matricielle suivante :

$$\frac{dM}{dt} = MA,$$

dont la solution est $M(t) = M(0) \exp(tA)$, où $\exp A$ est la somme de la série exponentielle (convergente), calculée sur la matrice A . Finalement, le flot de ce champ X est donné, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g \in GL_n$, par

$$\phi_t(g) = g \cdot \exp(tA).$$

Ce fait est général. Avec la définition donnée pour l'exponentielle dans un groupe de Lie, on vérifie que le flot du champ de vecteurs X qui vaut $X(e) = x$ en l'élément neutre, est la multiplication à droite dans le groupe G par $\exp(tx)$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercice. A l'aide de l'exercice 1 de 3.1.7, montrer que, pour deux éléments x et y de l'algèbre de Lie, on a :

$$[x, y] = 0 \Leftrightarrow \exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(y) \cdot \exp(x) \Rightarrow \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

A.3 La représentation adjointe

Le groupe de Lie agit à gauche sur lui-même par conjugaison intérieure. Pour $g \in G$, on note a_g l'automorphisme de G donné par $a_g(g') = gg'g^{-1}$. L'application tangente Ta_g donne un isomorphisme linéaire $\text{Ad}(g)$ de \mathcal{G} sur lui-même. On vérifie que

$$\text{Ad}(g_1g_2) = \text{Ad}(g_1) \text{Ad}(g_2);$$

autrement dit, Ad est un morphisme de groupe :

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut } \mathcal{G}.$$

Comme a_g est un morphisme de groupe de Lie de G sur lui-même (l'image d'un champ de vecteurs invariant à gauche est un champ invariant à gauche), on a :

$$\exp(\text{Ad}(g)(x)) = g(\exp(x))g^{-1}.$$

De la même manière, Ad est un morphisme de groupe de Lie dont l'application tangente donne lieu à un morphisme d'algèbre de Lie :

$$\text{ad} : \mathcal{G} \rightarrow \text{end}(\mathcal{G}).$$

Comme conséquence de la proposition 3.1.6 reliant crochet et flot, on trouve facilement que pour tout $x, y \in \mathcal{G}$, on a :

$$\text{ad}(x)(y) = [x, y].$$

Comme l'application exponentielle est "naturelle", on a :

$$\exp \circ \text{ad} = \text{Ad} \circ \exp : \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G}).$$

Cette formule s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \exp(x) \exp(y) \exp(-x) &= \exp((\exp \text{ad}(x))(y)) \\ &= \exp(y + [x, y] + \frac{1}{2!}[x, [x, y]] + \dots). \end{aligned}$$

Si on remplace x par tx avec $t \in \mathbb{R}$, on obtient une formule de développement limité :

$$\exp(tx) \exp(y) \exp(-tx) = \exp(y + t[x, y] + \frac{t^2}{2!}[x, [x, y]] + o(t^2)).$$

Chapitre 4

Courants de De Rham

Les courants de De Rham sont aux formes différentielles ce que les distributions de Schwartz sont aux fonctions C^∞ . Le livre de référence est [36]. Les courants apportent un outil puissant pour l'étude globale des variétés. Cela sera évoqué dans des termes plus précis une fois que sera introduit le complexe des courants (voir 4.2.2).

Dans toute la suite, on se limite à étudier les courants sur une variété *orientée* M ; la raison en est que la théorie des courants est fondée sur l'intégration des formes différentielles de degré maximum. Pour développer une théorie analogue dans le cas non orientable, il faut travailler avec des formes différentielles *tordues* par l'orientation.

4.1 Définition des courants

4.1.1 Première définition et premiers exemples

Un courant T de dimension k sur la variété M est une forme linéaire sur l'espace $\Omega_c^k(M)$ des formes différentielles de degré k à support compact

$$\omega \mapsto \langle T, \omega \rangle$$

avec la propriété de continuité suivante : si ω_n est une suite de formes à support dans un même compact et si $\omega_n \rightarrow 0$ dans C^∞ , alors

$$\langle T, \omega_n \rangle \rightarrow 0 .$$

En quelque sorte un courant est n'importe quel objet sur lequel on peut intégrer une forme différentielle. Voici les premiers exemples qui se présentent.

- 1) Si la dimension de M est n , M elle-même est un courant de dimension n . Mais comme une forme linéaire peut être multipliée par un scalaire, $\sqrt{2}M$ est aussi un courant de dimension n .

- 2) Une sous-variété orientée, proprement plongée dans M .
- 3) Une sous-variété orientée compacte à bord.
- 4) Une variété *singulière* orientée propre, c'est-à-dire la donnée $f : V \rightarrow M$, où V est une variété orientée et f une application C^∞ propre, mais qui peut ne pas être un plongement ; le courant est alors donné par

$$\omega \mapsto \int_V f^* \omega .$$

- 5) Une forme différentielle α de degré $n - k$ est un courant de dimension k donné par la formule :

$$\omega \mapsto \int_M \alpha \wedge \omega .$$

On dit dans ce cas qu'il s'agit d'un courant *régulier*.

4.1.2 Définition locale

On peut restreindre un courant T à un ouvert U de M . Cela signifie que l'on n'évalue T que sur les formes différentielles à support compact dans U . La restriction de T à U est un courant régulier s'il existe une forme différentielle $\alpha \in \Omega^{n-k}(U)$ telle que, pour tout $\omega \in \Omega_c^k(U)$, on ait

$$\langle T, \omega \rangle = \int_U \alpha \wedge \omega .$$

Par partition de l'unité, un courant est entièrement déterminé par sa restriction aux ouverts de cartes d'un atlas orienté. En coordonnées locales, un courant de dimension k est une *forme différentielle de degré $n - k$ dont les coefficients sont des distributions* :

$$T = \sum_I T_I dx_I$$

où I est un multi-indice de longueur $n - k$, $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k}$. Voici la formule donnant la valeur de ce courant sur une forme différentielle de degré k : si $\omega = \sum \omega_J dx_J$, où J est un multi-indice ordonné de longueur k , on a

$$\begin{aligned} \langle T_I dx_I, \omega_J dx_J \rangle &= 0 && \text{si } I \cup J \neq \{1, \dots, n\} \\ &= (-1)^{\sigma(I, J)} \langle T_I, \omega_J \rangle && \text{sinon,} \end{aligned}$$

où $\sigma(I, J)$ est l'indice de la permutation $i_1 \dots i_{n-k} j_1 \dots j_k$ et où $\langle T_I, \omega_J \rangle$ est l'évaluation de la distribution T_I sur la fonction ω_J .

4.1.3 Exemple

Dans \mathbb{R}^2 , avec les coordonnées (x, y) , l'axe des y avec son orientation usuelle, est un courant de dimension 1 qui s'écrit

$$T = (\delta_x \otimes 1_y) dx .$$

Ici δ_x est la distribution de Dirac à l'origine sur l'axe des x : $\langle \delta_x, f(x) \rangle = f(0)$; 1_y est la distribution sur l'axe des y donnée par : $\langle 1_y, g(y) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy$. Par construction du produit \otimes (et ceci en est une définition si on ne la connaît pas), on a :

$$\langle \delta_x \otimes 1_y, f(x)g(y) \rangle = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy$$

formule qui s'étend aux fonctions non décomposées par :

$$\langle \delta_x \otimes 1_y, h(x, y) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(0, y) dy .$$

On a fait l'abus de notation consistant à mettre le nom des variables dans la fonction : $h(x, y)$ signifie $(x, y) \mapsto h(x, y)$.

Si maintenant on considère la forme de degré 1 $\omega = a(x, y) dx + b(x, y) dy$, où a et b sont des fonctions C^∞ à support compact, on a :

$$\langle T, \omega \rangle = \langle (\delta_x \otimes 1_y) dx, b(x, y) dy \rangle = \langle \delta_x \otimes 1_y, b(x, y) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} b(0, y) dy$$

qui est bien l'intégrale de ω sur l'axe orienté des y .

4.1.4 Remarque importante

Selon la première définition, les courants de *dimension* 0 sont les distributions ordinaires ; mais si on veut les voir comme formes différentielles généralisées il faut leur attribuer le *degré* n et les écrire localement $T dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Sur \mathbb{R}^n , on est habitué à confondre les deux : la mesure de Lebesgue donne une bijection canonique entre les fonctions et les densités.

4.1.5 Image directe d'un courant

Soit $f : M \rightarrow N$ une application C^∞ propre d'une variété vers une autre. Si T est un courant de dimension k à la source, on définit son *image directe* f_*T par la formule suivante :

$$\langle f_*T, \omega \rangle = \langle T, f^*\omega \rangle$$

pour toute forme différentielle ω de degré k à support compact dans N . Comme f est propre, $f^*\omega$ est à support compact.

Si T est un courant régulier, son image directe n'est pas en général un courant régulier. Cependant, comme le montre la proposition suivante, *l'intégration le long des fibres* donne une image directe régulière.

Proposition. Soit $f : M^m \rightarrow N^n$ une submersion propre C^∞ entre deux variétés orientées de dimension respectives m et n (donc $m \geq n$). Soit T un courant régulier de dimension $k \leq n$ sur M donné par une forme différentielle α de degré $m - k$. Alors f_*T est un courant régulier donné par la forme différentielle β de degré $n - k$ suivante :

$$\beta(z) = \int_{f^{-1}(z)} \alpha.$$

Explication et preuve. Comme f est une submersion propre, il résulte d'un théorème de C. Ehresmann que f est une fibration localement triviale, c.-à-d. : pour tout $b \in N$, il existe un voisinage ouvert V de b dans N tel que $f^{-1}(V) \cong V \times f^{-1}(b)$. Mais nous n'avons pas besoin de ce théorème. Il nous suffit de l'information, locale à la source, donnée par le théorème des fonctions implicites : pour tout $a \in M$, il existe un voisinage ouvert U de a dans M muni de coordonnées $(x_1, \dots, x_{m-n}, y_1, \dots, y_n)$ centrées en a et un voisinage ouvert V de b muni de coordonnées (z_1, \dots, z_n) centrées en b , tels que f soit donnée par la projection :

$$(x_1, \dots, x_{m-n}, y_1, \dots, y_n) \mapsto (z_1 = y_1, \dots, z_n = y_n).$$

En particulier, $f^{-1}(b) \cap U$ est la sous-variété d'équations $y_1 = 0, \dots, y_n = 0$; elle est donc de dimension $m - n$. On a choisi l'ordre des coordonnées pour qu'il donne l'orientation respectivement de M et de N ; il s'ensuit donc une orientation de la fibre $f^{-1}(b)$.

Quitte à fractionner α par une partition de l'unité, il suffit de traiter le cas où α est à support dans U . Dans ce cas elle s'écrit $\alpha(x, y) = \sum \alpha_{IJ}(x, y) dx_I \wedge dy_J$, où α_{IJ} est une fonction réelle et I, J sont deux multi-indices de longueur totale $m - k$, $I \subset \{1, \dots, m - n\}$, $J \subset \{1, \dots, n\}$. Notons T_{IJ} le courant régulier donné par la forme différentielle $\alpha_{IJ}(x, y) dx_I \wedge dy_J$. Il s'agit donc de comprendre l'image directe f_*T_{IJ} . On voit facilement que si I n'est pas de longueur $m - n$ (ou de façon équivalente, si J n'est pas de longueur $n - k$), $f_*T_{IJ} = 0$. On ne garde donc de la somme que le I égal à $I_0 := (1, \dots, m - n)$ et les J de longueur $n - k$. Soit $\beta_J(z)$ la fonction

$$\beta_J(z) = \int_{f^{-1}(z)} \alpha_{I_0 J}(x, z) dx,$$

où l'intégrale est prise par rapport à la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^{m-n} . La forme différentielle β est alors

$$\beta(z) = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} \beta_J dz_J.$$

Ainsi on a donné un sens à l'intégrale de α le long des fibres. Grâce à la formule de Fubini appliquée dans le produit $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$, on vérifie facilement que pour toute forme différentielle ω de degré k à support compact dans V ,

$$\int_V \beta \wedge \omega = \int_U \alpha \wedge f^* \omega.$$

Cette formule dit bien que l'image directe du courant régulier donné par α est le courant régulier donné par β . \square

Par exemple, si f est un difféomorphisme préservant l'orientation et si T est régulier, donné par une forme α , alors f_*T est régulier et donné par $(f^{-1})^*\alpha$.

4.2 Le complexe des courants

Dans la suite, la variété M est donnée; elle est supposée orientée et de dimension n .

4.2.1 L'opérateur bord

On note C_k l'espace vectoriel des courants de dimension k . On a un opérateur *bord*, noté ∂ , obtenu par transposition de l'opérateur cobord :

$$\langle \partial T, \omega \rangle = \langle T, d\omega \rangle ;$$

cette formule est une formule de Stokes formelle. L'opérateur bord baisse la dimension d'une unité.

Exemple 1 : courants d'intégration.

Si S est une sous-variété orientée et si T_S est le courant d'intégration sur S , alors, d'après cette définition et la formule de Stokes, on a :

$$\langle \partial(T_S), \omega \rangle = \langle T_S, d\omega \rangle = \int_S d\omega \stackrel{(Stokes)}{=} \int_{\partial S} \omega = \langle T_{\partial S}, \omega \rangle$$

où ∂S est le bord orienté de S et $T_{\partial S}$ est le courant d'intégration sur ∂S . Autrement dit :

$$\partial T_S = T_{\partial S}.$$

Exemple 2 : courants réguliers.

Si T est une forme différentielle α de degré $n - k$, on a, pour toute forme ω de degré $k - 1$ à support compact dans l'intérieur de M ,

$$\int_M d(\alpha \wedge \omega) = 0.$$

Cela résulte de la formule de Stokes appliquée à une sous-variété D compacte à bord contenant le support de ω en son intérieur. Donc on a :

$$0 = \int_M d\alpha \wedge \omega + (-1)^{\deg \alpha} \int_M \alpha \wedge d\omega.$$

Donc :

$$\partial \alpha = (-1)^{\deg \alpha + 1} d\alpha.$$

Attention. Le signe adopté ici, qui privilégie les sous-variétés par rapport aux courants réguliers, n'est pas le signe adopté par les analystes pour dériver les distributions. Regardons-le sur \mathbb{R} . Un courant T de dimension 1 se calcule sur les formes différentielle de degré 1 à support compact et l'application $f \mapsto \langle T, f(x)dx \rangle$ est une distribution $T_0 : \langle T_0, f \rangle = \langle T, f(x)dx \rangle$. Le courant ∂T de dimension 0 s'évalue sur une fonction g à support compact :

$$\langle \partial T, g \rangle = \langle T, dg \rangle = \langle T, g'(x)dx \rangle = \langle T_0, g' \rangle = - \langle T'_0, g \rangle .$$

Finalement $\partial T = -T'_0$. Quant au bord d'une distribution (courant de dimension 0), il est nul.

Propriété. La restriction de ∂T à un ouvert U est le bord (calculé dans la variété U) de la restriction de T à U .

Cela traduit le fait que l'opérateur cobord diminue le support des formes différentielles.

Exercice. Si $f : M \rightarrow N$ est une application C^∞ propre et si T est un courant sur M , alors

$$\partial f_* T = f_*(\partial T) .$$

4.2.2 Le complexe des courants

On a la formule fondamentale :

$$\partial \circ \partial = 0$$

qui est la transposée de $d \circ d = 0$ sur les formes différentielles. On dit que

$$C_* = \left(C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0 \right)$$

est un *complexe homologique*. Le morphisme bord diminue la graduation. Il donne lieu à une *homologie* : C_k contient le sous-espace vectoriel $Z_k = \ker(\partial : C_k \rightarrow C_{k-1})$, qui lui-même contient l'image B_k de l'opérateur bord $\partial : C_{k+1} \rightarrow C_k$. Le k -ème groupe d'homologie de C_* (en fait, c'est un espace vectoriel) est le quotient

$$H_k(C_*) = \frac{Z_k}{B_k} .$$

Les éléments de Z_k sont appelés des *cycles* de dimension k (ou k -cycles). Si $T \in Z_k$ et $\omega = d\alpha$ est un cobord de degré k , on a $\langle T, \omega \rangle = 0$. Les éléments de B_k sont appelés des *bords* de dimension k . Si $T \in B_k$ et si ω est une forme différentielle *fermée* de degré k , on a $\langle T, \omega \rangle = 0$.

Le complexe des formes différentielles à support compact

$$\Omega_c^* = \left(\Omega_c^0 \xrightarrow{d} \Omega_c^1 \xrightarrow{d} \Omega_c^2 \dots \xrightarrow{d} \Omega_c^n \right)$$

est un complexe où le morphisme d augmente les degrés. Il donne lieu à une *cohomologie* (voir 2.3.1). Le complexe des courants est construit comme le dual topologique de Ω_c^* . Inversement, si on munit C_* de la topologie faible donnée par la dualité ci-dessus, alors on a la propriété de réflexivité suivante :

Proposition. *Le dual topologique de C_* muni de la topologie faible est Ω_c^* .*

Démonstration. C'est un phénomène tout à fait général concernant la topologie faible. Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace de son dual algébrique. La topologie faible sur F est une topologie d'espace vectoriel construite comme suit :

Soit x_1, x_2, \dots, x_m un nombre fini de vecteurs de E et soit $\epsilon > 0$; soit

$$V = \{y \in F \mid |\langle y, x_k \rangle| < \epsilon \text{ pour } k = 1, 2, \dots, m\}.$$

Les parties de ce type forment une base de voisinages de l'origine pour la topologie faible sur F . Par construction même, les vecteurs de E sont des formes linéaires continues sur F muni de cette topologie. L'affirmation est qu'il n'y en a pas d'autres.

En effet, soit $\lambda : F \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue pour la topologie faible. Pour des choix convenables de vecteurs x_1, x_2, \dots, x_m de E et pour un certain $\epsilon > 0$, on a :

$$V \subset \lambda^{-1}(]-\epsilon, \epsilon[).$$

Par homogénéité, le noyau de λ contient l'intersection des noyaux des formes linéaires définies sur F par x_1, x_2, \dots, x_m . Un lemme d'algèbre bien connu dit qu'alors λ est combinaison linéaire de x_1, x_2, \dots, x_m ; autrement dit, λ est un élément de E , ce que l'on voulait établir. \square

4.2.3 Intérêt du complexe des courants

Pour l'instant, le complexe des courants apparaît comme une vaste abstraction. Son intérêt réside dans le fait qu'il contient beaucoup de sous-complexes très concrets :

- le complexe des courants réguliers, à savoir au signe près le complexe des formes différentielles lui-même ;
- le complexe associé à une triangulation ;
- le complexe associé à une fonction de Morse.

Dans le cadre de ce cours, on ne parlera pas des triangulations des variétés; en revanche, le complexe de courants associé à une fonction de Morse sera présenté au chapitre 6.

Le fait de pouvoir placer chacun de ces complexes, en particulier le premier et le dernier, dans le complexe des courants permet de les comparer entre eux et chacune de ces comparaisons débouche sur des théorèmes fondamentaux concernant la structure globale des variétés. L'outil de ces comparaisons est l'opérateur de *régularisation*, dont l'étude fait du prochain paragraphe.

4.3 Régularisation des courants

On rappelle qu'une variété M orientée de dimension n est fixée. On considère le complexe C_* des courants et son sous-complexe Ω^{n-*} des courants réguliers. C'est bien un sous-complexe puisque, en vertu de la formule donnée dans l'exemple 2 de 4.2.1, le bord d'un courant régulier est, au signe près, le cobord de la forme différentielle considérée.

4.3.1 Le théorème de régularisation.

Théorème. *Il existe un opérateur $R : C_k \rightarrow \Omega^{n-k} \subset C_k$ et un opérateur $A : C_k \rightarrow C_{k+1}$ tel que*

$$R - \text{Id} = \partial \circ A + A \circ \partial.$$

De plus, si $T \in \Omega^{n-k}$, on a $A(T) \in \Omega^{n-k-1}$.

Avant de donner la démonstration, donnons la signification de cet énoncé ainsi qu'une application directe. L'opérateur R , à image dans les courants réguliers, est un *opérateur de régularisation*. La formule implique que R commute avec ∂ , qui au signe près induit d sur Ω^{n-*} . Donc *le régularisé d'un cycle est une forme fermée et le régularisé d'un bord est une forme exacte*.

Plus précisément, R induit l'identité en homologie (voir 4.3.7) : si T est un cycle, $R(T)$ est un cycle régulier dont la différence avec T est un bord, à savoir le bord de $A(T)$. Dans le langage de la topologie algébrique l'opérateur A est appelé *opérateur d'homotopie*.

Corollaire. *Si T est un cycle de dimension k et ω une forme différentielle fermée de degré k , on a*

$$\langle T, \omega \rangle = \int_M R(T) \wedge \omega.$$

Preuve du corollaire. Comme $\partial T = 0$, $R(T) - T$ est un bord. Comme $d\omega = 0$, la formule de Stokes formelle donne $\langle R(T) - T, \omega \rangle = 0$. \square

Classiquement, pour régulariser, on utilise la convolution. Mais il n'y a pas de convolution sur une variété. De Rham a trouvé un moyen très astucieux pour contourner cette difficulté. La démonstration du théorème occupe les paragraphes suivants jusqu'en 4.3.4.

4.3.2 Régularisation d'une distribution dans une boule

Soit D la boule unité fermée de \mathbb{R}^n . On considère le difféomorphisme $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{int } D$ qui est donné en coordonnées polaires par

$$(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbf{S}^{n-1} \longmapsto (h(r), \theta),$$

où $h(r) = r$ pour r petit et $h(r) = \text{th } r$ pour r voisin de $+\infty$.

Si $X_i = H_*(\frac{\partial}{\partial x_i})$, il est facile de prolonger X_i à \mathbb{R}^n en un champ de vecteurs C^∞ , identiquement nul sur $\mathbb{R}^n \subset \text{int } D$. On vérifie que $[X_i, X_j] = 0$. C'est vrai dans l'intérieur de D par transport, puisqu'à la source de H les champs de coordonnées commutent. C'est vrai sur le complémentaire de D parce que les champs de vecteurs sont nuls. Finalement si des champs de vecteurs commutent sur un ouvert dense, ils commutent partout. D'autre part les champs X_i étant à support compact sont complets. On a donc une action du groupe additif $G = \mathbb{R}^n$ sur \mathbb{R}^n (voir Exercice 3.1.7); précisément pour chaque $g \in G$ on a un difféomorphisme, noté $t(g)$ et dont l'inverse est $t(-g)$, qui agit par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} t(g)(x) &= x && \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \text{int } D, \\ t(g)(x) &= H(g + H^{-1}(x)) && \text{si } x \in \text{int } D. \end{aligned}$$

On introduit sur G une fonction ρ , C^∞ , à support dans la boule de rayon ϵ centrée à l'origine, et telle que $\int_G \rho(g) dg = 1$. Pour une distribution T définie sur un ouvert U contenant D , on peut considérer son image directe par $t(g)$ qui est encore une distribution sur U . Si ϕ est une fonction C^∞ à support compact dans U , on a :

$$\langle t(g)_*T, \phi \rangle = \langle T, \phi \circ t(g) \rangle .$$

Puis on peut faire la moyenne :

$$R_D(T) = \int_G (t(g)_*T) \rho(g) dg .$$

Le sens qu'il convient de donner à cette intégrale est le sens faible :

$$\langle R_D(T), \phi \rangle = \langle T, \int_G (\phi \circ t(g)) \rho(g) dg \rangle$$

et là, il est très facile de voir dans le membre de droite que la moyenne de fonctions C^∞ à support compact est elle-même C^∞ à support compact, contenu dans $\text{supp } \phi \cup D$. De plus, si une suite de fonctions ϕ_k tend vers 0 pour la topologie C^∞ avec supports dans un compact fixe, il en est de même des moyennes. Donc $R_D T$ est bien une distribution sur U .

Proposition. 1) $R_D(T)$ est C^∞ sur l'intérieur de D .

2) Si T est C^∞ sur un ouvert V , $R_D(T)$ reste C^∞ sur cet ouvert.

Autrement dit, $R_D(T)$ est régularisant dans $\text{int } D$ et ne dérégularise nulle part ailleurs.

Démonstration. 1) Pour savoir si $R_D(T)$ est C^∞ sur $\text{int } D$, on teste sur des fonctions C^∞ à support dans cet ouvert. Mais, sur $\text{int } D$, on peut se transporter par H^{-1} sur \mathbb{R}^n tout entier et R_D devient la convolution usuelle par ρ , dont on sait qu'elle régularise.

2) Au voisinage des points du complémentaire de D , R_D ne fait rien, et n'est pas dérégularisant. Soit donc $a \in \partial D \cap V$; on considère l'application $(x, g) \mapsto t(-g)x$. Par continuité, la préimage de V est un voisinage de $\{a\} \times \text{supp } \rho$ dans $\mathbb{R}^n \times G$; comme $\text{supp } \rho$ est compact, elle contient un produit $W \times \text{supp } \rho$, où W est un voisinage de a . Ainsi W est contenu dans tous les $t(g)(V)$, $g \in$

G . Si T est donnée sur V par une fonction f , C^∞ – en fait, il faut dire : par une forme différentielle de degré maximum $f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ –, alors $R_D(T)$ coïncide sur W avec une forme différentielle de degré n donnée par la moyenne suivante :

$$\int_G t(-g)^* \left(f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \right) \rho(g) dg,$$

dont le coefficient fonction est C^∞ en x . Donc $R_D(T)$ est C^∞ au voisinage de a . \square

4.3.3 Régularisation d'un courant dans une boule

Ce qui vient d'être dit pour une distribution vue comme courant de dimension 0 vaut en général. Si T est un courant de dimension k sur un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant D et si ω est une forme différentielle de degré k à support compact dans U , on définit le courant $R_D(T)$ par

$$\langle R_D T, \omega \rangle = \langle T, R_D^* \omega \rangle$$

où $R_D^* \omega$ est une moyenne de formes différentielles :

$$R_D^* \omega = \int_G t(g)^* \omega \rho(g) dg.$$

Il faut prendre garde au fait que $R_D(T)$ n'est pas le courant obtenu en régularisant chacun de ses coefficients distribution car le groupe G n'agit pas sur U par translation.

Proposition. *Il existe un opérateur $A_D : C_* \rightarrow C_{*+1}$ préservant l'ensemble des courants réguliers et tel que*

$$R_D T - T = (\partial \circ A_D + A_D \circ \partial) T.$$

En particulier R_D commute avec ∂ .

Démonstration. Il suffit de transposer une formule analogue pour R_D^* sur $\Omega_c^*(U)$:

$$R_D^* - \text{Id} = d \circ A_D^* + A_D^* \circ d.$$

Or $t(g)$ est un difféomorphisme qui peut être relié à l'identité de U par une homotopie ; notant $s \in [0, 1]$ le paramètre de l'homotopie, on fait par exemple la combinaison barycentrique $s t(g)(x) - (1-s)x$. Cette homotopie dépend de g de façon C^∞ et est stationnaire (indépendante de s) si $x \in U \setminus D$. On a vu (formule d'homotopie 2.5.3) qu'il existe un opérateur d'homotopie $a^*(g) : \Omega_c^*(U) \rightarrow \Omega_c^{*-1}(U)$ tel que :

$$t(g)^* \omega - \omega = \left(d \circ a^*(g) + a^*(g) \circ d \right) \omega.$$

On prend alors pour $A_D^* \omega$ la moyenne suivante :

$$A_D^* \omega = \int_G a^*(g)(\omega) \rho(g) dg.$$

On vérifie que c'est bien un opérateur d'homotopie pour R_D^* car l'intégration sur le groupe G et l'opérateur d sur M commutent : au niveau des coefficients, c'est la dérivation sous le signe somme. \square

A ce point, on a une régularisation partielle sur l'intérieur d'une boule D (qu'on pense maintenant dans la variété M), contenue dans un domaine de cartes.

4.3.4 Régularisation dans la variété

On peut trouver des boules ouvertes B_1, \dots, B_i, \dots formant une famille localement finie d'ouverts de cartes, contenant chacune une boule fermée D_i de sorte que $M = \cup \text{int } D_i$ (voir partition de l'unité et rétrécissement 1.5.1). On pose

$$R = \lim_k (R_{D_k} \circ \dots \circ R_{D_1}) .$$

L'opérateur limite existe car la famille des boules est localement finie. D'après la proposition 4.3.3, le courant $(R_{D_k} \circ \dots \circ R_{D_1})(T)$ est régulier dans $\text{int } D_1 \cup \dots \cup \text{int } D_k$. Comme, pour chaque R_{D_k} , on a un opérateur d'homotopie et qu'en particulier R_{D_k} commute avec ∂ , on a :

$$R_{D_k} \circ \dots \circ R_{D_1} - R_{D_{k-1}} \circ \dots \circ R_{D_1} = \partial \circ A_{D_k} \circ R_{D_{k-1}} \circ \dots \circ R_{D_1} + A_{D_k} \circ R_{D_{k-1}} \circ \dots \circ R_{D_1} \circ \partial$$

et, en additionnant les formules antérieures, on trouve un opérateur d'homotopie pour $R_{D_k} \circ \dots \circ R_{D_1}$. Au voisinage de chaque point cet opérateur finit par être indépendant de k , ce qui achève de démontrer le théorème 4.3.1. \square

On dira que R est un *opérateur de régularisation* de De Rham.

4.3.5 Compléments

Dans l'opérateur de régularisation, on a caché un paramètre ϵ qui est le diamètre du support de la mesure $\rho(g) dg$. Si ϵ tend vers 0, la mesure $\rho(g) dg$ tend vers la mesure de Dirac à l'origine. Pour la convolution ordinaire, on sait que l'opérateur de convolution par ρ tend vers l'identité, par exemple au sens de la topologie faible sur les distributions. Il en est de même ici pour R_D .

Pour toute forme ω , si ϵ tend vers 0, alors $\langle R_D(T), \omega \rangle$ tend vers $\langle T, \omega \rangle$.

Ceci prouve une densité faible des formes différentielles, vues comme courants réguliers, dans tous les courants. On peut aussi apporter une précision concernant le *support*. Comme pour les distributions, on dit qu'un courant T est nul sur un ouvert U si $\langle T, \omega \rangle = 0$ pour toute forme différentielle à support compact dans U . Le support de T est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel T est nul ; une technique de partition de l'unité montre que ce

“plus grand ouvert” existe bien. On a alors la proposition suivante.

Proposition. *Soit R_ϵ un opérateur de régularisation de De Rham. Si T est un courant à support compact, et si V est un voisinage du support de T , alors, pour ϵ assez petit, $R_\epsilon(T)$ est une forme différentielle à support dans V . Il en est de même pour l’opérateur d’homotopie A_ϵ .*

Démonstration. En effet, si ϵ est petit, pour tout $g \in \text{supp } \rho$, le difféomorphisme $t(g)$ est proche de l’identité et envoie $M \setminus V$ dans $M \setminus \text{supp } T$. D’après la formule intégrale 4.3.3, la conclusion de la proposition est valable pour chaque composant $R_{D_i, \epsilon}$ de R_ϵ . Quitte à rétrécir V , on peut supposer que V est compact et seulement un nombre fini des boules D_i rencontrent V . La conclusion est alors claire. \square

Remarque. Il y a d’autres types de régularisation sur une variété, par exemple la diffusion de la chaleur. Un avantage de la régularisation à la de Rham est justement de contrôler le support.

4.3.6 Régularisation d’une sous-variété vue comme courant

Proposition. *Soit $N \subset M$ une sous-variété compacte orientée de dimension $n-k$ (éventuellement à bord non vide); on note T_N le courant d’intégration sur N . Soit Δ un disque de dimension k tel que $\Delta \cap N = \text{int } \Delta \cap \text{int } N$, que l’intersection contienne un seul point a et quelle y soit transversale; Δ est orienté par l’orientation transversale de N (voir 2.3.3). Alors pour toute régularisation de De Rham R_ϵ il existe $\epsilon > 0$ assez petit tel que :*

$$\int_{\Delta} R_\epsilon(T_N) = 1.$$

Démonstration. Il y a deux étapes; on commence par établir ce résultat pour une régularisation de De Rham particulière, puis un argument formel fournit la généralisation.

PREMIÈRE ÉTAPE. Soit $D \subset N$ une boule centrée en a et contenue dans une carte linéarisante de N . On a

$$T_N = T_{N-D} + T_D.$$

Quelle que soit la régularisation, si ϵ est assez petit, le support de $R_\epsilon(T_{N-D})$ évite Δ . Il suffit donc de connaître la régularisée de la restriction de T_N à un voisinage de a . Dans des coordonnées locales autour de a , N a pour équation $x_1 = \dots = x_k = 0$ et Δ est l’espace linéaire des k premières coordonnées. Localement T_N s’écrit

$$T_N = (\delta(x_1, \dots, x_k) \otimes 1(x_{k+1}, \dots, x_n)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

L’opérateur de régularisation choisi au voisinage de a ($a = 0$ dans ces coordonnées) est la convolution usuelle $*$ par $\rho_\epsilon(x_1, \dots, x_n)$, fonction à support dans la boule centrée en 0 d’intégrale 1; autrement dit, les champs de vecteurs utilisés pour construire l’intégrale en 4.3.3 sont, au

voisinage de 0, les champs de coordonnées $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Ils ont la propriété de laisser invariante la forme de base $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$. Donc pour ce choix on a :

$$\begin{aligned} R_\epsilon(T_N) &= \left[(\delta(x_1, \dots, x_k) 1(x_{k+1}, \dots, x_n)) * \rho_\epsilon \right] dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \rho_\epsilon(x_1, \dots, x_k, x_{k+1} - t_{k+1}, \dots, x_n - t_n) dt_{k+1} \dots dt_n \right] dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k, \end{aligned}$$

(ici $dt_{k+1} \dots dt_n$ désigne la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^{n-k} et $\delta(x_1, \dots, x_k)$ désigne la mesure de Dirac à l'origine de \mathbb{R}^k). La forme induite par $R_\epsilon(T_N)$ sur Δ est

$$\left[\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \rho_\epsilon(x_1, \dots, x_k, -t_{k+1}, \dots, -t_n) dt_{k+1} \dots dt_n \right] dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Si Δ est orienté par $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$, on a :

$$\int_{\Delta} R_\epsilon(T_N) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon = 1.$$

DEUXIÈME ÉTAPE. Soit R_ϵ et R'_ϵ deux régularisations de De Rham. Le théorème 4.3.1 donne :

$$R_\epsilon(T_N) - R'_\epsilon(T_N) = (A_\epsilon - A'_\epsilon)(\partial T_N) + \partial(A_\epsilon - A'_\epsilon)(T_N).$$

Si ϵ est assez petit, les supports du membre de gauche et de $(A_\epsilon - A'_\epsilon)(T_N)$ sont localisés au voisinage de N et le support de $(A_\epsilon - A'_\epsilon)(T_{\partial N})$ évite Δ . Donc, en restriction à un petit voisinage ouvert U de Δ , on a

$$\omega - \omega' = \partial S,$$

où ω , ω' et S sont les restrictions à U respectivement de $R_\epsilon(T_N)$, $R'_\epsilon(T_N)$ et $(A_\epsilon - A'_\epsilon)(T_N)$ (on utilise ici que "bord" et "restriction à un ouvert" commutent - voir 4.2.1); en particulier $d(\omega - \omega') = 0$ et le support de S évite $\partial\Delta$. Si S était régulier on pourrait alors appliquer la formule de Stokes et on aurait $\int_{\Delta} \omega - \omega' = \int_{\partial\Delta} S = 0$. Pour pallier cette difficulté, on applique à S une régularisation auxiliaire R''_ϵ . Il vient

$$R''_\epsilon(\omega - \omega') = \pm dR''_\epsilon(S);$$

ce qui par le théorème 4.3.1 donne :

$$\omega - \omega' = \pm dA''_\epsilon(\omega - \omega') \pm dR''_\epsilon(S).$$

Cette fois-ci on a écrit $\omega - \omega'$ comme un cobord, c.-à-d. comme le bord d'un courant régulier S' . De plus si ϵ est assez petit, le support de S' évite $\partial\Delta$ et on conclut par la formule de Stokes que $\int_{\Delta} R_\epsilon(T_N) - R'_\epsilon(T_N) = 0$. \square

Remarque. Lorsque N est une sous-variété compacte sans bord, la forme différentielle $R_\epsilon(T_N)$ est un cocycle. Une utilisation de la formule d'homotopie, analogue à ce qui vient d'être fait, prouve que la classe de cohomologie de $R_\epsilon(T_N)$ est bien définie indépendamment de la régularisation utilisée. Son image réciproque par l'inclusion de N dans M ne dépend que du fibré normal à N (dire pourquoi) et la classe de cohomologie ainsi trouvée sur M est connue sous le nom de *classe d'Euler* du fibré normal.

4.3.7 Bilan provisoire

Il est assez maigre, car on compare un objet important Ω^* à une abstraction C_* . On a tout de même un premier résultat :

Proposition. *L'inclusion $\Omega^{n-k} \hookrightarrow C_k$ induit un isomorphisme*

$$H^{n-k}(\Omega^*) \cong H_k(C_*).$$

L'isomorphisme inverse est induit par n'importe quel opérateur de régularisation de De Rham R . En particulier, si R et R' sont deux opérateurs de régularisation et si T est un cycle, $R(T)$ et $R'(T)$ sont des formes cohomologues.

Démonstration. On étudie le morphisme induit par l'inclusion ; on veut voir qu'en cohomologie il est injectif et surjectif.

INJECTIVITÉ : soit $\alpha \in \Omega^{n-k}$, une forme fermée qui est un bord quand on la regarde comme courant de dimension k ; c'est-à-dire qu'il existe un courant T de dimension $k+1$ qui vérifie

$$\langle \partial T, \omega \rangle = \int_M \alpha \wedge \omega$$

pour toute forme ω de degré k à support compact. Il s'agit de voir que α est une forme exacte, c'est-à-dire qu'elle s'écrit $\alpha = d\beta$. Prenons un régularisé $R(T)$; on a :

$$(-1)^{n-k+1} dR(T) = \partial(R(T)) = R(\partial T) = R(\alpha).$$

D'après le théorème 4.3.1, on sait que si on régularise une forme fermée, on a $R(\alpha) - \alpha = (-1)^{n-k} dA(\alpha)$ et donc α est un cobord :

$$\alpha = (-1)^{n-k+1} d(R(T) + A(\alpha)).$$

SURJECTIVITÉ : soit $T \in C_k$ un cycle de dimension k . Il s'agit de trouver une forme différentielle fermée $\alpha \in \Omega^{n-k}$ et un courant S de dimension $k+1$ tels que, pour toute forme différentielle ω à support compact, on ait :

$$\langle T, \omega \rangle = \int_M \alpha \wedge \omega + \langle \partial S, \omega \rangle.$$

Une solution est $\alpha = R(T)$ et $S = A(T)$. □

Chapitre 5

Transversalité

5.1 Le théorème de Sard

5.1.1 Définitions

On rappelle d'abord la définition de la transversalité donnée en 1.3.3. Si $f : M \rightarrow N$ est une application différentiable entre variétés et si $P \subset N$ est une sous-variété propre, on dit que f est *transversale* sur P si, pour tout point x de $f^{-1}(P)$, on a l'égalité suivante entre les espaces tangents :

$$T_{f(x)}N = T_{f(x)}P + Tf(T_xM).$$

Si l'égalité ne vaut que pour $x \in f^{-1}(P) \cap K$, où K est une partie de M , on dit que f est *transversale sur P le long de K* . Dans ce cas il existe un voisinage ouvert U de K le long duquel f est transversale sur P car, si la transversalité est vraie en un point x_0 , elle est vraie le long de tout un voisinage de x_0 (voir 1.3.3).

Si P est un point, $P = \{y\}$, la transversalité sur $\{y\}$ signifie que ou bien la préimage $f^{-1}(y)$ est vide ou bien en tout point de la préimage le rang de f est égal à la dimension du but. On dira aussi que y est une *valeur régulière* de f , même si $\{y\}$ n'est pas dans l'image de f . Justement, si $\dim M < \dim N$, une valeur régulière n'est pas une valeur !

L'intérêt de cette définition réside dans les deux propriétés suivantes :

- (a) En situation transversale, la préimage est une sous-variété. De plus pour tout $x \in f^{-1}(P)$, Tf induit un isomorphisme des espaces *normaux*

$$T_xM / T_x(f^{-1}(P)) \rightarrow T_{f(x)}N / T_{f(x)}P,$$

ou encore : si E_x est un supplémentaire de $T_x(f^{-1}(P))$ dans T_xM , son image par Tf est un supplémentaire de $T_{f(x)}P$ dans $T_{f(x)}N$. Par exemple, l'intersection transversale de deux sous-variétés est une sous-variété.

- (b) Si M est compacte, la propriété de transversalité sur P persiste sous une petite perturbation dans la topologie C^1 ; autrement dit, cette propriété est *ouverte* en topologie C^1

(voir 3.5).

La propriété (b), M étant compacte, implique que la paire $(M, f^{-1}(P))$ est *stable*, c'est-à-dire qu'elle ne varie pas à difféomorphisme près lorsqu'on perturbe f en topologie C^1 . Ce fait connu sous le nom de "lemme d'isotopie de Thom" [44] est proposé en exercice.

On conçoit assez facilement que l'on puisse construire des applications transversales ; en fait, la transversalité est une propriété *générique*, c'est-à-dire satisfaite par presque toutes les applications en un sens qui sera précisé plus loin. L'objet du théorème de Sard [37] est d'établir ce résultat dans le cas de la transversalité sur un point. Il étend à toutes les dimensions un résultat de A.P. Morse [30] concernant les fonctions réelles.

5.1.2 Théorème de Sard

Soit $f : M \rightarrow N$ une application C^∞ . Alors "presque tout" point de N est une valeur régulière de f . En particulier, l'ensemble des valeurs régulières est dense.

Signification. Le "presque tout" est au sens habituel de la mesure. Mais aucune mesure n'est spécifiée ! Cependant chaque carte porte sa mesure de Lebesgue et les changements de cartes, s'ils ne préservent pas la mesure de Lebesgue, envoient ensemble de mesure de Lebesgue nulle sur ensemble de mesure de Lebesgue nulle, comme le montre la formule de changement de variables dans les intégrales multiples. Donc on a une notion intrinsèque d'*ensemble de mesure nulle sur une variété* en spécifiant que sa trace dans chaque carte est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue de celle-ci.

Une réunion *dénombrable* d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle, puisque cela est vrai dans chaque carte par l'axiome d'additivité dénombrable en théorie de la mesure. Noter qu'un ensemble de mesure nulle est d'intérieur vide ; la réciproque est bien sûr fautive comme le montre les ensembles de Cantor "gras".

On dit que *presque tout point d'une variété vérifie une propriété P si l'ensemble des points qui ne la vérifie pas est de mesure nulle.*

Remarque. Si $\dim M = m$ et $\dim N = n$, le théorème vaut dès que f est C^k avec $k \geq \max(m - n + 1, 1)$. On en trouve une démonstration dans [22].

Par exemple, si f est une fonction numérique de deux variables, le résultat vaut si $k = 2$. H. Whitney [49] a montré que le résultat est optimal : il existe une fonction C^1 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et un arc (non différentiable, pour ne pas choquer la dérivation des fonctions composées), contenu dans le lieu critique de f et aux extrémités duquel f prend deux valeurs distinctes ; en particulier, il y a un intervalle de valeurs non régulières.

En C^0 , la courbe de Peano ou l'un de ses avatars est là pour nous rappeler que f peut être surjective même si la dimension de la source est strictement plus petite que celle du but.

5.1.3 Démonstration du théorème de Sard

Nous suivons de près la rédaction de J. Milnor dans [27]. Il s'agit de montrer que l'image du lieu critique $C = \{x \in M \mid \text{rang } Tf_x < n\}$ est de mesure nulle. Par récurrence sur m , on suppose que le théorème de Sard est établi pour les sources de dimension $\leq m-1$; pour $m=0$ le résultat est évident. Enfin, par additivité dénombrable, on peut se limiter à un énoncé local : *Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage V de x , tel que $f(V \cap C)$ soit de mesure nulle.* En particulier, on peut prendre $N = \mathbb{R}^n$ et $M = [0, 1]^m \subset \mathbb{R}^m$. On considère alors l'ensemble C_k où toutes les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre k sont nulles. On écrit :

$$f(C) = f(C \setminus C_1) \cup f(C_1 \setminus C_2) \cup \dots \cup f(C_k),$$

où k est le premier entier $\geq \frac{m}{n}$. Les trois lemmes ci-dessous prouvent que chacun des termes de cette réunion est de mesure nulle.

Lemme 1 : $f(C \setminus C_1)$ est de mesure nulle.

Preuve. Encore une fois, par additivité dénombrable, il suffit de le vérifier au voisinage de chaque point de C . Soit $a \in C \setminus C_1$; une des dérivées partielles premières est non nulle, disons que $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \neq 0$. Alors, par le théorème des fonctions implicites, il existe un difféomorphisme h , défini sur un voisinage de a , tel que $f_1 \circ h^{-1}(x_1, \dots, x_m) = x_1$. Soit $W = h(V)$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par $g = f \circ h^{-1}$. Soit C' le lieu critique de g ; par transport, les valeurs critiques de f sont les mêmes que celles de g et on a $g(C') = f(C \cap V)$.

Comme $g_1(x_1, \dots, x_n) = x_1$, l'ensemble défini par $C'_t = C' \cap \{x_1 = t\}$ est le lieu critique de la restriction de g à l'hypersurface $\{x_1 = t\}$. Donc, par l'hypothèse de récurrence, $g(C'_t)$ est de mesure nulle dans $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$, pour la mesure de Lebesgue $(n-1)$ -dimensionnelle. Par le théorème de Fubini

$$\text{mesure}(g(C')) = \int (\text{mesure } g(C'_t)) dt = 0.$$

□

Lemme 2. $f(C_i \setminus C_{i+1})$ est de mesure nulle.

Preuve. Soit $a \in C_i \setminus C_{i+1}$; au voisinage de ce point une dérivée partielle d'ordre $i+1$ est non nulle, disons $\frac{\partial^{i+1} f_1}{\partial x_1 \partial x_I}$, où I est un multi-indice de longueur i . Donc pour un certain voisinage V de a , $(C_i - C_{i+1}) \cap V$ est contenu dans une hypersurface H , disons $\frac{\partial^i f_1}{\partial x_I} = 0$, et $(C_i - C_{i+1}) \cap V$ est contenu dans le lieu critique de $f|_H$. Son image est de mesure nulle dans \mathbb{R}^n par hypothèse de récurrence. □

Lemme 3. Si $k \geq \frac{m}{n}$, $f(C_k)$ est de mesure nulle.

Preuve. Comme f est de classe C^k au moins, on peut écrire la formule de Taylor à l'ordre k avec une majoration uniforme du reste sur le compact C_k . Il existe un *module de continuité* α tel que, pour tout $x \in C_k$,

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \alpha(h)|h|^k.$$

Donc si Q est un cube de \mathbb{R}^m de côté ϵ rencontrant C_k , le diamètre de $f(Q)$ est majoré par $\alpha(\sqrt{m}\epsilon)m^{k/2}\epsilon^k$. Donc mesure $f(Q) = \alpha'(\epsilon)\epsilon^{kn}$, avec un autre module de continuité α' . Comme C_k est recouvert par au plus ϵ^{-m} cubes de ce genre, on a

$$\text{mesure } f(C_k) \leq \alpha'(\epsilon)\epsilon^{kn-m}.$$

Ce majorant tend vers 0 avec ϵ . □

5.2 Existence de fonctions de Morse

Il est question ici de Marston Morse (voir l'analyse de son œuvre par R. Bott [Bott 80] et son ouvrage avec S. Cairns [Morse 69]). Il y a plusieurs façons d'établir l'existence des fonctions de Morse; la plus conceptuelle, mais un peu savante, consiste à appliquer le théorème de Thom dans les espaces de jets, qui est un cas particulier du théorème de transversalité sous contraintes qui sera établi au §4; d'ailleurs cette méthode donne non seulement l'existence mais aussi la densité des fonctions de Morse dans l'ensemble de toutes les fonctions différentiables (voir §6). Ici on propose une approche plus élémentaire reposant sur le fait que toute variété est difféomorphe à une sous-variété de \mathbb{R}^N pour un certain N .

5.2.1 Définition.

Une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de Morse si en tout point critique le hessien de f est non dégénéré.

Cette définition est d'abord à comprendre dans chaque carte; mais le lemme suivant, bien connu, sur les développements limités à l'ordre 2, montre que le hessien de f en un point critique x_0 est une forme bilinéaire définie de façon intrinsèque sur l'espace tangent $T_{x_0}M$.

Lemme. *Soit $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ un germe de fonction admettant en 0 un développement limité à l'ordre 2 :*

$$f(x) = f(0) + q(x) + o(|x|^2).$$

où q est une forme quadratique. Soit g un germe en 0 de difféomorphisme de \mathbb{R}^n . Alors :

$$f \circ g(x) = f(0) + q(g'(0)x) + o(|x|^2).$$

Remarque. En un point *non-critique*, la partie quadratique de $f \circ g$ fait intervenir les dérivées secondes de g .

5.2.2 Le théorème d'existence

Pour simplifier, on suppose que M est une variété compacte, sous-variété de \mathbb{R}^N . Pour $a \in \mathbb{R}^N$, on note $f_a : M \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_a(x) = |x - a|^2$.

Théorème. *Presque tout $a \in \mathbb{R}^N$, f_a est une fonction de Morse.*

Démonstration (Voir [Mil 63]). On introduit le fibré normal $E = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^N \mid v \perp T_x M\}$ et l'application exponentielle $e : E \rightarrow \mathbb{R}^N$, $e(x, v) = x + v$. La source est une variété de dimension N , sous-variété de \mathbb{R}^{2N} (voir 6.1 et 6.2 chap.1) et e est une application différentiable. Les points du but qui sont des valeurs critiques de e sont appelés les *points focaux*. Pour $(x, v) \in E$, la droite affine $t \mapsto x + tv$ est une normale à M et un point focal voit une grande concentration de normales, c'est-à-dire une grande concentration de lumière si les normales sont lumineuses. D'après Sard, (dans le cas facile où la source et le but sont de même dimension et dont la démonstration directe est une variante du lemme 3 de 1.4), *l'ensemble des points focaux est de mesure nulle*. Le théorème découle de la proposition suivante :

Proposition. *Si a n'est pas un point focal de M , alors f_a est une fonction de Morse.*

Démonstration. Le point $x_0 \in M$ est point critique de f_a si et seulement si a appartient à une normale à M en x_0 , d'après la formule

$$df_a(x_0)h = 2 \langle x - a, h \rangle .$$

Pour estimer le hessien de f_a , on fait un calcul en coordonnées orthonormales (X, y, Z) , où l'origine est en x_0 , où $X = (x_1, \dots, x_n)$ parcourt $T_{x_0}M$, où y parcourt la normale en x_0 passant par a et où Z complète le système de coordonnées; disons que $a = (0, 1, 0)$. Ainsi au voisinage de l'origine, M est décrit par les équations :

$$\begin{cases} y = h(X) \\ Z = k(X) \end{cases}$$

où h et k sont des germes C^∞ de fonctions,

$$\begin{cases} h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0) \\ k : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{N-n-1}, 0), \end{cases}$$

avec $h'(0) = 0$ et $k'(0) = 0$. Ecrivant $h(X) = q(X) + o(|X|^2)$, il vient :

$$f_a(X, h(X), k(X)) = 1 + |X|^2 - 2q(X) + o(|X|^2) .$$

Il s'agit donc de comprendre que la forme quadratique $|X|^2 - 2q(X)$ est non dégénérée. En un point $(X, h(X), k(X))$ de M , une base de l'espace vectoriel normal est donnée par les vecteurs

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} - \text{grad } h(X) \\ \frac{\partial}{\partial z_i} - \text{grad } k_i(X), \quad \text{pour } i = 1, \dots, N - n - 1, \end{cases}$$

où k_i est la i -ème composante de k et où $Z = (z_1, \dots, z_{N-n-1})$. On a donc une écriture en coordonnées pour l'application exponentielle e :

$$(u, t, s_1, \dots, s_{N-n-1}) \mapsto \begin{cases} X &= u - t \operatorname{grad} h(u) - \sum_i s_i \operatorname{grad} k_i(u) \\ y &= h(u) + t \\ z_i &= k_i(u) + s_i \end{cases}$$

où $u \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $s_1 \in \mathbb{R} \dots$. Comme a n'est pas point focal, e est non singulière en $(0, 1, 0, \dots, 0)$. Or le développement limité à l'ordre 1 de e en ce point est

$$(u - \operatorname{grad} q(u), t, s_1, \dots)$$

L'hypothèse se traduit donc par le fait que l'application linéaire $u \mapsto u - \operatorname{grad} q(u)$ est inversible, ce qui signifie exactement que la forme quadratique $|X|^2 - 2q(X)$ est non dégénérée. \square

5.3 De Sard à Thom

5.3.1 Transversalité dans une famille

Comme application directe du théorème de Sard, on obtient le théorème de transversalité dans une famille, qui concerne la situation suivante : M, N, S sont trois variétés, P est une sous-variété propre de N . On se donne une application C^∞

$$F : M \times S \longrightarrow N .$$

Pour $s \in S$, on note $F_s = F|_{M \times \{s\}}$; on dit que F est une famille C^∞ d'applications $M \rightarrow N$ paramétrée par S .

Théorème. *Considérant une famille F comme ci-dessus, on suppose que F est transversale sur P . Alors, pour presque tout $s \in S$, F_s est transversale sur P .*

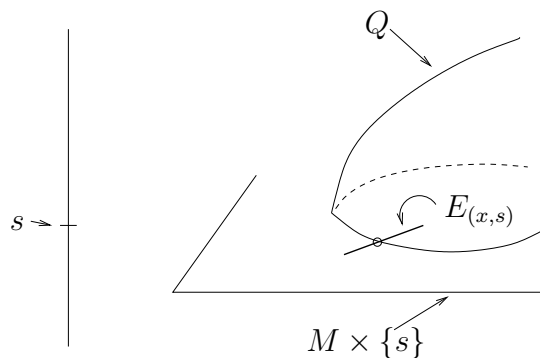
Démonstration. L'hypothèse implique que $Q = F^{-1}(P)$ est une sous-variété de $M \times S$. On considère alors l'application $\pi : Q \rightarrow S$ donnée par la projection sur le second facteur. D'après Sard, presque tout $s \in S$ est une valeur régulière de π . Or on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} s \text{ est valeur régulière de } \pi &\Leftrightarrow \\ M \times \{s\} \text{ et } Q \text{ sont transverses} &\Leftrightarrow \\ F_s \text{ est transversale sur } P. & \end{aligned}$$

Les deux équivalences se démontrent de façon analogue. Pour la seconde équivalence, on traduit la transversalité de $M \times \{s\}$ et de Q en disant que $T_x M = T_{(x,s)}(M \times \{s\})$ contient un supplémentaire $E_{(x,s)}$ de $T_{(x,s)} Q$ dans $T_{(x,s)} M \times S$. Comme, par hypothèse sur F , TF induit un isomorphisme

$$E_{(x,s)} \rightarrow T_{F(x,s)} N / T_{F(x,s)} P$$

TF_s fait de même lorsque $E_{(x,s)}$ est contenu dans $T_x M$. \square



Complément. Si K est un compact de M et si F est transversale sur P le long de $K \times S$ alors, pour presque tout $s \in S$, F_s est transversale sur P le long de K .

Commentaires.

L'intérêt de cet énoncé tient au fait qu'il est d'autant plus facile de construire une famille transversale sur P que l'espace des paramètres est de grande dimension, puisque l'espace tangent de la source a des chances de pouvoir être envoyé surjectivement sur l'espace tangent du but, ce qui est plus qu'il n'en faut pour garantir la transversalité.

Ce théorème est l'outil de base pour produire des théorèmes de transversalité même lorsque des contraintes supplémentaires sont imposées aux applications. Il revient à René Thom d'avoir mis à jour la portée du théorème de Sard en établissant son théorème de transversalité dans les espaces de jets [45] (la terminologie des jets n'apparaît pas dans cet article); dans cette situation la contrainte (condition d'intégrabilité) paraît tellement forte que le résultat tient du miracle. Tout au moins, tel était le sentiment à l'époque de la publication. Depuis, M. Gromov est allé beaucoup plus loin dans les questions du type *intégration d'inéquations différentielles* [15].

On expliquera au paragraphe suivant quels types de contraintes gardent suffisamment de *flexibilité* pour permettre encore la mise en œuvre d'un théorème de transversalité. Mais avant d'aller plus loin, il convient de préciser la topologie sur les espaces d'applications C^∞ .

5.3.2 Topologie de $C^\infty(M, N)$

Si M est un ouvert de \mathbb{R}^m et si N est un ouvert de \mathbb{R}^n , il s'agit de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts des dérivées de tous ordres. Cette topologie est métrisable définie par les semi-métriques suivantes

$$d_K^r(f, g) = \sup_{x \in K} |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)|$$

où K est un compact de la source et où r est un multi-indice de dérivation; en fait, il suffit de prendre K dans une famille dénombrable de compacts recouvrant M .

Si M et N sont des variétés, et si $f \in C^\infty(M, N)$, on considère un compact K contenu dans un domaine U de carte de M , tel que $f(K)$ soit dans un domaine de carte V de N ; grâce aux

cartes, on peut parler de $d_K^r(f, g)$ si $g : M \rightarrow N$ envoie K dans V . On note alors :

$$W_{K,r,\epsilon}(f) = \{g : M \rightarrow N \mid g(K) \subset V, d_K^r(f, g) < \epsilon\}$$

Il existe une unique topologie pour laquelle les intersections finies de $W_{K,r,\epsilon}(f)$ forment une base de voisinages de f . C'est la topologie C^∞ .

On peut établir que cette topologie est métrisable et complète. Elle a donc la propriété de Baire, à savoir que *toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense*.

En fait, on obtient déjà beaucoup d'applications importantes de la transversalité sans invoquer la propriété de Baire; c'est ce point de vue que nous retiendrons pour la suite, en mettant des hypothèses adhoc de compacité.

5.3.3 Le théorème de transversalité (version locale)

Théorème. *Soit $f : M \rightarrow N$ une application différentiable. Soit $P \subset N$ une sous-variété propre et soit $a \in M$. Alors il existe un voisinage compact K de a (contenu dans un voisinage arbitraire de a) et un voisinage ouvert W de f dans $C^\infty(M, N)$ avec la propriété suivante : l'ensemble des éléments de W qui sont des applications transversales sur P en tout point de K est un ouvert dense dans W .*

Dans cet énoncé on peut remplacer C^∞ par C^1 . Attention, les deux versions ne sont pas comparables : la densité C^∞ est plus forte que la densité C^1 alors que l'ouverture C^∞ est plus faible que l'ouverture C^1 .

Démonstration.

CAS 1. - Si $f(a) \notin P$, il existe K voisinage compact de a tel que $f(K) \cap P = \emptyset$. Là, on utilise que P est une sous-variété propre. Soit $W = \{g : M \rightarrow N \mid g(K) \cap P = \emptyset\}$; c'est un voisinage ouvert de f (déjà pour la topologie C^0) dont tous les éléments sont transversaux sur P le long de K .

CAS 2. - $f(a) \in P$. On note V une carte de N au voisinage de $f(a)$ linéarisante pour P : il existe une submersion $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ (où $p = \text{codim } P$) telle que $P \cap V = \pi^{-1}(0)$. La carte V a une structure produit $B \times D$, où D est un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^p , π étant la projection sur le deuxième facteur. Pour $t \in \mathbb{R}^p$, on note $T_t : B \times D \rightarrow B \times \mathbb{R}^p$ la translation par t sur la deuxième coordonnée :

$$\pi \circ T_t(y) = \pi(y) + t.$$

Soit V' un rétrécissement de V contenant $f(a) : \overline{V'} \subset V$. On choisit U , un voisinage de a tel que $f(\overline{U}) \subset V'$, et K un voisinage compact de a contenu dans U . On prend $W = \{g \mid g(\overline{U}) \subset V'\}$, qui est un ouvert pour la topologie C^0 , et donc C^∞ . Ce W et ce K conviennent; montrons-le.

Si A est un compact dans l'intérieur de $B \times D$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $T_t(A) \subset B \times D$ pour tout t avec $|t| < \epsilon$. Ainsi, pour $g \in W$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $T_t(g(\overline{U})) \subset V$ pour tout $|t| < \epsilon$.

On bâtit alors une famille $G : M \times S \rightarrow N$ contenant g de la façon suivante. L'espace des paramètres S est la boule de \mathbb{R}^p de rayon ϵ . On choisit une fonction cloche α à support dans U et valant 1 sur K . On pose :

$$\begin{aligned} G(x, t) &= g(x) \quad \text{si } x \notin U \\ G(x, t) &= T_{\alpha(x)t} \circ g(x) \quad \text{si } x \in U . \end{aligned}$$

De toute évidence l'application G est transversale sur P le long de $K \times S$ à cause du second facteur : si $(x, t) \in K \times S$, on a $\pi \circ G(x, t) = \pi \circ g(x) + t$, qui montre que $\pi \circ G$ est de rang maximum. D'après le théorème de transversalité dans une famille 5.3.1, pour presque $t \in S$, G_t est transversale sur P le long de K . Enfin pour $t \rightarrow 0$, G_t tend vers g dans $C^\infty(M, N)$. La densité cherchée est ainsi établie.

Enfin K étant fixé, montrons que la partie de W formée des applications transversales sur P le long de K un ouvert en topologie C^1 . Pour faire bref, c'est essentiellement que les matrices de rang maximum forment un ouvert dans l'espace des matrices de taille donnée. Pour un peu plus de détails, on considère $g_0 \in W$ transversale sur P le long de K . Il existe un voisinage U_0 de $g_0^{-1}(P) \cap K$ dans K avec les propriétés suivantes :

- 1) le compact $g_0(K - U_0)$ est disjoint de P ,
- 2) la différentielle de $\pi \circ g_0$ est de rang maximum en tout point de U_0 .

Or la condition 1) est préservée par perturbation C^0 et la condition 2) est préservée par perturbation C^1 . \square

5.3.4 Le théorème de transversalité (version globale)

Théorème. *Soit K un compact de M . Alors l'ensemble des applications $M \rightarrow N$ transversales sur P le long de K est un ouvert dense dans $C^\infty(M, N)$.*

Démonstration. On se préoccupe d'abord de la densité. Soit $f \in C^\infty(M, N)$; pour tout $a \in K$, le théorème local fournit un voisinage K_a de a et un voisinage ouvert W_a de f : l'ensemble W'_a des éléments de W_a qui sont des applications transversales sur P le long de K_a est un ouvert dense de W_a . On recouvre K par un nombre fini de K_{a_i} et on pose $W = \cap W_{a_i}$. Pour tout i , l'ensemble $T_i \subset W$ formé des applications transversales sur P le long de K_{a_i} est un ouvert dense dans W ; en effet on a $T_i = W \cap W'_{a_i}$. On rappelle le lemme suivant :

Lemme. *Dans un espace topologique E une intersection finie d'ouverts denses est dense.*

Preuve. Disons que U_1 et U_2 sont deux ouverts denses dans E . Soit V un ouvert non vide de E . Par les deux hypothèses de densité, V rencontre U_1 et l'ouvert non vide $V \cap U_1$ rencontre U_2 . Finalement V rencontre $U_1 \cap U_2$. \square

Donc l'intersection finie des T_i est un ouvert dense dans W . Or si $g \in \cap T_i$, g est transversale sur P le long de $\cup K_{a_i}$, en particulier le long de K . Finalement, f lui-même est approchable par de telles applications. C'est la densité cherchée.

Établissons l'ouverture. Si f est transversale sur P le long de K , c'est encore vrai le long d'un voisinage K' de K . On choisit $K_a \subset K'$; alors $f \in W'_a$ pour tout a . L'intersection $\cap W'_{a_i}$ est un ouvert contenant f dont les éléments sont des applications transversales sur P le long de $\cup K_{a_i}$. \square

Corollaire. *L'ensemble des applications transversales sur P le long de M est dense, intersection dénombrable d'ouverts denses.*

Autrement dit, avec la terminologie de Baire, *cet ensemble est un G_δ dense.*

Preuve. C'est là que l'on applique le théorème de Baire (voir 5.3.2). \square

Définition. Une propriété satisfaite par tous les éléments d'un G_δ dense est dite *générique*. Par un regrettable abus de langage, on dit parfois que les éléments d'un tel ensemble sont eux-mêmes génériques.

5.4 Transversalité sous contraintes

On considère une famille $\mathcal{F} \subset C^\infty(M, N)$ d'applications satisfaisant à une certaine propriété supplémentaire. On verra plus loin des exemples de famille se présentant naturellement. Si \mathcal{F} est un ouvert de $C^\infty(M, N)$, le théorème de transversalité s'applique dans \mathcal{F} comme dans $C^\infty(M, N)$. Mais si \mathcal{F} est une partie d'intérieur vide, ce qui est le cas dans la pratique, l'intersection de \mathcal{F} avec un ouvert dense a toutes les chances d'être vide. On se propose donc de dégager sur \mathcal{F} des conditions qui permettent de faire fonctionner le théorème de transversalité dans \mathcal{F} .

L'idée qui suit me vient de V. Poénaru (communication orale 1973); elle consiste à énoncer sous forme de conditions le début de l'argument du théorème local. Chaque fois que l'on voudra prouver un théorème de transversalité, il faudra "seulement" vérifier cette condition, ce qui ne veut pas dire qu'il n'y a pas de travail à faire.

5.4.1 Transversalité locale d'une famille

Comme cette approche n'est pas présentée dans les livres, la terminologie que j'introduis n'a rien d'officiel et n'est pas parfaite.

On dira que la famille \mathcal{F} est *localement transversale* sur P si la condition suivante est satisfaite.

Pour tout $f \in \mathcal{F}$, pour tout $a \in M$, il existe un voisinage K de a dans M et un voisinage W de f dans \mathcal{F} (pour la topologie induite par $C^\infty(M, N)$), de sorte que, pour tout $g \in W$, il existe une famille $G : M \times S \rightarrow N$ satisfaisant aux conditions suivantes :

- a) *l'espace des paramètres S est un voisinage de 0 dans un espace numérique \mathbb{R}^q ,*
- b) *pour tout $s \in S$, $G_s \in \mathcal{F}$,*

- c) $G_0 = g$,
- d) G est transversale sur P le long de $K \times S$.

En mots simples, cela veut dire que par tout point du voisinage W il passe une famille à un nombre fini de paramètres qui a la propriété de transversalité au sens usuel (voir 5.3.1), au-moins si on restreint M à un voisinage de a . Par exemple, si \mathcal{F} est elle-même une famille à un nombre fini de paramètres, c'est la définition usuelle. Donc la définition proposée est une généralisation de l'idée de famille transversale, pour prendre en compte le cas de familles n'ayant pas de structure de variété, au moins en un sens classique.

Remarque. Comme l'espace des paramètres S peut être rétréci autour de l'origine et comme la transversalité est une propriété ouverte, on peut remplacer la condition d) par :

- d') G est transversale sur P le long de $K \times \{0\}$.

Théorème. Si \mathcal{F} est une famille localement transversale sur P , alors, pour tout compact K de M , l'ensemble des éléments de \mathcal{F} qui sont des applications transversales sur P le long de K est un ouvert dense de \mathcal{F} .

Démonstration. On suit mot à mot le même chemin que pour le théorème 5.3.4. Pour le théorème local, au lieu d'avoir à construire G , on l'a par hypothèse. L'utilisation du théorème de Sard et le passage du local au global sont identiques. \square

Complément. Si on veut avoir la densité des applications transversales le long de M tout entier, il convient, si M n'est pas compacte, de demander à \mathcal{F} d'avoir la propriété de Baire.

5.5 Théorèmes de H. Whitney

Il s'agit des théorèmes d'immersion et de plongement. La référence originale est [50]. Pour simplifier, on se limite ici au cas où le but est un espace numérique. D'autre part le théorème de plongement dans le cas d'une source non compacte nécessite de considérer une topologie assez délicate à manier qui est appelée la *topologie fine de Whitney*.

5.5.1 Théorème d'immersion

Soit M une variété de dimension m et K un compact de M . Si $n \geq 2m$, l'espace des applications $M \rightarrow \mathbb{R}^n$, immersives en tout point de K (c'est-à-dire que Tf_x est de rang m pour tout $x \in K$) est un ouvert dense de $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Comme précédemment pour le passage du local au global, il suffit de le prouver lorsque K est contenu dans un ouvert de carte U . Pour $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ et $x \in U$,

les coordonnées de U permettent d'associer la matrice jacobienne $Jf(x) \in M_{nm} = \{\text{matrices } n \times m\}$. Il s'agit de montrer que "génériquement", $Jf(x)$ est non singulière en tout point de K . Il est donc naturel d'introduire l'ensemble Σ des matrices singulières; malheureusement, ce n'est pas une sous-variété mais seulement une union finie de sous-variétés non fermées. De là quelques difficultés techniques; certaines autres viennent de ce que l'on veut éviter de recourir aux espaces de jets. On note Σ^i l'espace des matrices de rang $m - i$; évidemment $\Sigma = \Sigma^1 \cup \dots \cup \Sigma^m$.

Lemme 1.

- a) Σ^i est une sous-variété fermée dans l'ouvert M^i des matrices de rang $\geq m - i$.
 b) $\text{codim } \Sigma^1 = n - m + 1$ et, pour $i > 1$, $\text{codim } \Sigma^i > \text{codim } \Sigma^{i-1}$.

Preuve. Pour étudier Σ^i au voisinage d'une matrice $A \in \Sigma^i$, on utilise un *pivot*. La nullité des déterminants bordants sont des équations locales indépendantes. \square

La démonstration du théorème procède par étapes : *génériquement le rang de f est > 0 , $> 1, \dots, > m - 1$ en tout point de K* . Faisons la dernière étape. Soit

$$C_K = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \text{rang } Tf_x \geq m - 1 \text{ pour tout } x \in K\}.$$

Les étapes précédentes (admisses) donnent :

Pour tout compact K' , $C_{K'}$ est un ouvert dense de $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$.

Revenons au compact K contenu dans l'ouvert de carte U pour lequel on veut établir le théorème d'immersion. On introduit un voisinage compact K' de K dans U , puis dans $C^\infty(\text{int } K', M^1)$, on considère la famille

$$\mathcal{F} = \{g \mid \exists f \in C^\infty(\text{int } K', \mathbb{R}^n) \text{ tel que } g = Jf\}.$$

La condition d'appartenance à \mathcal{F} est une condition d'intégrabilité; si K' est contractile, d'après le lemme de Poincaré, elle s'exprime par : $dg_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, où g_k est la 1-forme différentielle donnée par la k -ième ligne de g . Cette remarque n'est d'ailleurs pas utilisée dans la suite.

Lemme 2. \mathcal{F} est une famille localement transversale sur Σ^1 .

Preuve. Soit $a \in \text{int } K'$ et α une fonction cloche à support compact dans $\text{int } K'$ et égale à 1 sur un voisinage compact K'' de a . Disons que $a = 0 \in \mathbb{R}^m$.

Soit A une matrice à coefficients constants $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$; si $g \in \mathcal{F}$, $g + A$ vérifie encore les conditions d'intégrabilité et, si A est suffisamment petit par rapport $\sup_{x \in \text{supp } \alpha} |g(x)|$, $x \mapsto g(x) + Ax$ appartient à \mathcal{F} . La famille cherchée $G : \text{int } K' \times S \rightarrow M^1$ est paramétrée par un voisinage S de 0 dans M_{nm} et est donnée

$$G(x, A) = g(x) + J(\alpha(x)Ax) .$$

En particulier, pour $x \in K''$, $G(x, A) = g(x) + A$. Comme $\frac{\partial G}{\partial A} = \text{Id}_{M_{nm}}$ si $x \in K''$, G est évidemment transversale sur n'importe quelle sous-variété de M^1 , en particulier sur Σ^1 , en tout

point de $K'' \times S$. □

L'idée d'utiliser le but (ou à peu près) comme espace de paramètres est bien celle de Thom. La fin de la démonstration du théorème consiste à établir que l'ensemble des applications $M \rightarrow \mathbb{R}^n$, immersives sur K , est un ouvert dense dans $C_{K'}$. Comme l'ouverture est claire, on établit seulement la densité.

Soit β une fonction cloche à support dans $\text{int } K'$, égale à 1 sur K . Soit $f \in C_{K'}$. Le théorème de transversalité appliqué à la famille \mathcal{F} affirme qu'il existe une suite d'applications $g_k : \text{int } K' \rightarrow M^1$, intégrables : $g_k = Jf_k$, $f_k : \text{int } K' \rightarrow \mathbb{R}^n$, convergeant vers $Jf|_{\text{int } K'}$ et transversales sur Σ^1 en tout point du support de β . Comme $\dim M < \text{codim } \Sigma^1$, la transversalité signifie que g_k évite Σ^1 en tout point du support de β . Si on choisit les primitives f_k telles que $f_k(a) = f(a)$ pour tout n , la suite f_k converge vers $f|_{\text{int } K'}$ dans $C^\infty(\text{int } K', \mathbb{R}^n)$.

Les fonctions $\bar{f}_k = (1 - \beta)f + \beta f_k$ sont globalement définies de M vers \mathbb{R}^n et la suite \bar{f}_k converge vers f dans $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$, donc dans l'ouvert $C_{K'}$ à partir d'un certain rang. Enfin $\bar{f}_k|_K = f_k|_K$ est une immersion. □

Exercice (M. Chaperon) On peut éviter de considérer la *stratification* de l'espace des matrices en introduisant le fibré unitaire tangent E^1 (ensemble des vecteurs tangents à M de norme 1 pour une métrique riemannienne auxiliaire). Montrer que génériquement $Tf : E^1 \rightarrow T\mathbb{R}^n$ est transversale sur la section nulle. Montrer que, si $2m \leq n$, cette transversalité signifie que f est une immersion.

5.5.2 Théorème de plongement.

Si M est une variété compacte de dimension m et si $n \geq 2m + 1$, l'espace des plongements $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un ouvert dense dans $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$.

Démonstration de l'ouverture. En fait l'ouverture est vraie en topologie C^1 et ne dépend pas de la dimension du but.

Soit f un plongement et $f_k : M \rightarrow \mathbb{R}^p$ une suite d'applications convergeant vers f . Supposons que, pour tout k , f_k ait un point double : $f_k(a_k) = f_k(b_k)$, $a_k \neq b_k \in M$. Quitte à prendre une suite extraite, on peut supposer que les suites a_k et b_k convergent ; comme $f(\lim a_k) = f(\lim b_k)$ et que f est un plongement, on a $\lim a_k = \lim b_k = x_0$. Utilisons une carte au voisinage de x_0 . Dans cette carte, $u_k = \frac{b_k - a_k}{|b_k - a_k|}$ est un vecteur unitaire tangent (en a_k) et, en prenant une autre suite extraite, $u_k \rightarrow u$ vecteur tangent non nul $\in T_{x_0}M$. On a :

$$f_k(b_k) - f_k(a_k) = df_k(a_k)(b_k - a_k) + o(|b_k - a_k|)$$

où le o est uniforme en k . Donc $df_k(a_k)u_k$ tend vers 0 avec k . D'où $df(x_0)u = 0$, ce qui contredit le fait que f soit une immersion. □

Démonstration de la densité. D'après le théorème sur les immersions, il suffit de prouver la densité de l'espace des plongements dans l'espace des immersions. Pour une immersion f , voici une façon d'envisager globalement ses points doubles : on construit $f \times f : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et on considère $(f \times f)^{-1}(\Delta)$, où Δ est la diagonale du but. Une paire $(a, b) \in (f \times f)^{-1}(\Delta) - \text{diag}(M \times M)$ correspond à une paire de points distincts dans M ayant même image. Pour une immersion, deux points proches et distincts n'ont pas même image, donc $(f \times f)^{-1}(\Delta) - \text{diag}(M \times M)$ est *isolé* de $\text{diag}(M \times M)$.

Lemme 1. *Si $f \times f$ est transversale sur Δ le long de $M \times M$ privé d'un petit voisinage de $\text{diag}(M \times M)$, alors $(f \times f)^{-1}(\Delta) - \text{diag}(M \times M)$ est vide ; autrement dit, f est un plongement.*

Preuve. La dimension de la source est strictement plus petite que la codimension de Δ . \square

Ainsi le théorème résultera du théorème de transversalité si on sait que les applications de la forme $f \times f$ constituent une famille localement transversale. Tel quel, ce n'est pas correct sur la diagonale de la source ; mais, si on se place sur le complémentaire d'un voisinage de la diagonale, cette transversalité "locale" devient satisfaite. De façon précise, on fixe deux voisinages ouverts de la diagonale de la source $V' \subset \overline{V'} \subset V$. On considère l'ouvert \mathcal{U} de l'espace des immersions caractérisé par :

$$f \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \forall (a, b) \in \overline{V'}, a \neq b : f(a) \neq f(b) .$$

Exercice : montrer que \mathcal{U} est un ouvert pour la topologie C^1 et que toute immersion admet un voisinage de cette forme.

On considère l'espace \mathcal{F} des applications $(M \times M - \overline{V'}) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de la forme $f \times f$, $f \in \mathcal{U}$.

Lemme 2. *\mathcal{F} est localement transversale sur Δ .*

Preuve. On se donne $(a, b) \in M \times M - \overline{V'}$ et $f \in \mathcal{U}$. On note B_a, B_b deux voisinages fermés, respectivement de a et de b , dont le produit dans $M \times M$ est disjoint de $\overline{V'}$. On prend une fonction cloche α valant 1 sur un voisinage de B_a et nulle sur B_b . Pour $g \in \mathcal{U}$, on introduit la famille G donnée par :

$$G(x, t) = g(x) + \alpha(x) t ,$$

paramétrée par \mathbb{R}^n . Il existe un voisinage S de 0 dans \mathbb{R}^n tel que, pour tout $t \in S$, G_t soit une immersion appartenant à \mathcal{U} . On vérifie alors que

$$\Gamma(x, y, t) = (G(x, t), G(y, t))$$

définit une application

$$\Gamma : (M \times M - \overline{V'}) \times S \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

transversale sur Δ le long de $B_a \times B_b \times S$; en effet, sa première composante y est une submersion. Enfin, pour $t = 0$, $\Gamma_0 = g \times g$. \square

La conséquence du théorème de transversalité est qu'il y a un ouvert dense dans \mathcal{F} formé d'applications transversales sur Δ le long du compact $M \times M - V$.

Par ailleurs, on vérifie facilement que si V' est choisi assez petit $f \mapsto f \times f$ est un homéomorphisme de \mathcal{U} sur \mathcal{F} . Soit en effet $a \neq b$ et p_2 la seconde projection $M \times M \rightarrow M$; on choisit V' de sorte que $p_2(\overline{V'} \cap (\{a\} \times M)) = B_a$ et $p_2(\overline{V'} \cap (\{b\} \times M)) = B_b$ soient des voisinages disjoints respectivement de a et b . Connaissant $f \times f|_{M \times M - \overline{V'}}$, on recupère f en prenant la restriction de $f \times f$ à $\{a\} \times (M - B_a)$ puis à $\{b\} \times (M - B_b)$. Les opérations de restriction sont continues pour les topologies C^∞ d'espaces d'applications; donc $f \times f|_{M \times M - \overline{V'}} \mapsto f$ est continue. D'où la conclusion. \square

5.6 La transversalité et les fonctions de Morse

On a vu en 5.2, comme conséquence du théorème de Sard, que toute variété compacte est la source d'une fonction de Morse. La transversalité donne beaucoup plus.

Théorème (R. Thom)[45]. *Sur une variété compacte sans bord, l'ensemble des fonctions de Morse est un ouvert dense de $C^\infty(M, \mathbb{R})$.*

Démonstration.

L'OUVERTURE EN TOPOLOGIE C^2 . Comme dans les exemples précédents, c'est la partie facile, mais qui utilise la compacité de M . Si on connaît le fibré cotangent, on observe qu'une fonction f est de Morse si et seulement si sa différentielle, vue comme section du cotangent, est transversale sur la section nulle, ce qui est évidemment une propriété ouverte en topologie C^2 .

On peut aussi invoquer simplement des arguments locaux. Soit x_0 un point critique de f . Il existe un voisinage compact $V(x_0)$ contenu dans un ouvert de carte tel que la matrice de $f''(x)$ soit inversible pour tout $x \in V(x_0)$. L'ensemble des g tels que $g''(x)$ soit inversible pour tout $x \in V(x_0)$ est un ouvert W_0 pour la topologie C^2 . On fait la même chose pour tous les points critiques x_i de f , $i = 0, \dots, k$. D'autre part, l'ensemble des g sans point critique sur $M - \cup_{i=0}^k V(x_i)$ est un ouvert W' (même en topologie C^1). Alors

$$W = W_0 \cap \dots \cap W_k \cap W'$$

est un voisinage de f constitué de fonctions de Morse.

LA DENSITÉ. Il suffit de démontrer le théorème local : *pour tout $a \in M$, il existe un voisinage compact K de a tel que l'ensemble des fonctions g qui sont de Morse le long de K (ce qui veut dire que les points critiques de g appartenant à K sont non dégénérés), est dense dans $C^\infty(M, \mathbb{R})$.*

Le voisinage K sera pris dans un ouvert de carte U , identifié à un ouvert de \mathbb{R}^n . On considère la famille \mathcal{F} des formes différentielles exactes de degré 1 sur U , considérée comme partie de $C^\infty(U, \mathbb{R}^{n*})$.

Lemme. \mathcal{F} est localement transversale sur 0.

Preuve. Soit $a \in U$; disons que $a = 0 \in \mathbb{R}^n$. Soit α une fonction cloche, à support dans U et égale à 1 sur un voisinage K de $a = 0$. Soit A une forme linéaire sur \mathbb{R}^n , $A \in \mathbb{R}^{n*}$, et $\gamma \in \mathcal{F}$, $\gamma = dg$. On considère la fonction numérique

$$G(x, A) = g(x) + \alpha(x)Ax$$

et sa différentielle par rapport à la première variable

$$\Gamma(x, A) = dg(x) + \alpha(x)A + (Ax)d\alpha(x).$$

Cette dernière formule donne une famille Γ de formes différentielles de degré 1 sur U , paramétrée par $(\mathbb{R}^n)^*$. Si $x \in K$, $\Gamma(x, A) = dg(x) + A$ et Γ est une submersion de $K \times (\mathbb{R}^n)^*$ vers $(\mathbb{R}^n)^*$. En particulier, Γ est transversale sur 0 le long de $K \times (\mathbb{R}^n)^*$. Enfin, pour $A = 0$, $\Gamma(\cdot, 0) = \gamma$. Ainsi, toutes les conditions d'une famille localement transversale sont satisfaites. \square

Concluons sans invoquer d'autre théorème général que la transversalité dans une famille 5.3.1 : pour presque tout A , la fonction $x \mapsto G(x, A)$ est une fonction de Morse le long de K et si, $A \rightarrow 0$, $G(x, A) \rightarrow g(x)$ au sens de la topologie C^∞ . \square

Chapitre 6

Théorie de Morse

La structure d'une variété différentiable est complètement déterminée par son anneau de fonctions différentiables. Une telle affirmation est plus ou moins tautologique. A l'opposé, une seule fonction f , même si elle est de Morse, ne permet pas de reconstituer toute la structure de la variété M^n sur laquelle elle est donnée. Par exemple, si une fonction de Morse $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ a seulement un minimum et un maximum, on prouve facilement que M est la réunion de deux boules de dimension n recollées le long de leurs bords, ce qui est suffisant pour conclure que M est homéomorphe à la sphère de dimension n . En revanche, M peut ne pas être difféomorphe à la sphère. Précisément, S. Smale a montré avec son théorème du h -cobordisme (voir [28]) que toutes les sphères exotiques découvertes par J. Milnor possèdent une fonction de Morse à deux points critiques seulement.

Dans la théorie de Morse, on cherche à comprendre la relation qui existe entre la structure globale d'une variété, disons compacte sans bord, et la "structure" d'une fonction de Morse. La relation fonctionne dans les deux sens, avec bien entendu la perte d'information évoquée à l'instant. Tout d'abord, généralisant ce qui vient d'être dit sur les fonctions à deux points critiques, la donnée d'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ permet de décrire M comme une réunion de pièces élémentaires (appelées *modèles de Morse*); cela ne permet pas d'identifier M , mais au moins de "calculer" sa cohomologie. Il y a des applications très importantes de ce point de vue en topologie différentielle, par exemple la résolution de la conjecture de Poincaré en grande dimension par S. Smale.

Dans l'autre sens, si on connaît la cohomologie de M et si elle diffère de celle de la sphère, c'est-à-dire s'il existe une forme fermée non exacte de degré $0 < k < n$, on peut affirmer qu'en plus d'un minimum et d'un maximum (obligatoires), f doit avoir d'autres points critiques et, en particulier, un point d'indice k . L'énoncé précis est fourni par les *inégalités de Morse*. Ce point de vue est le point de vue fondateur, celui de Morse lui-même. La recherche de points critiques pour une fonction sur une variété est l'analogue en dimension finie de la recherche de points critiques pour une *fonctionnelle* définie sur un certain espace fonctionnel et, par conséquent, relève du *calcul des variations*; par exemple, sur l'espace des lacets d'une variété riemannienne compacte sans bord les points critiques de la fonctionnelle d'énergie sont les géodésiques fermées et les arguments de Morse permettent de trouver des géodésiques fermées non minimisantes, c'est-à-dire qui ne sont pas plus courtes que toutes les courbes fermées

voisines. (Voir [4, 26, 38, 35]).

Les bases de la théorie sont présentées dans §§1-2-4. La méthode du *mini-max* (§3) peut être regardée comme un “procédé” pour trouver les points critiques. Ensuite, à partir d’une fonction de Morse et d’une métrique riemannienne convenable, on construit un sous-complexe de rang fini dans le complexe des courants de De Rham, appelé le complexe de Thom-Smale (§5). Il permet, non seulement d’établir les inégalités de Morse, mais aussi les grands théorèmes concernant la cohomologie des formes différentielles : dualité de Poincaré, théorème de De Rham (§7).

6.1 Fonctions de Morse, gradients adaptés

6.1.1 Rappels et définitions

Soit M une variété sans bord. On rappelle qu’une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de Morse si, en tout point critique a de f , le hessien (forme quadratique sur l’espace tangent $T_a M$ définie en coordonnées locales par la matrice des dérivées partielles secondes) est une forme quadratique non dégénérée.

Le lemme de Morse 3.2.8 énonce qu’il existe alors des coordonnées locales x_1, \dots, x_n de M au voisinage de a telles que

$$f(x) = f(a) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$$

où k est l’indice du hessien de f en a . Un tel système de coordonnées sera dit de *Morse*.

Sur une variété compacte sans bord, les fonctions de Morse forment un ouvert dense dans $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Sur une variété *ouverte* (= non compacte sans bord), pour éluder les difficultés inhérentes à cette situation, on se contentera de l’énoncé suivant qui n’est pas vide, comme le montre l’exercice.

Soit f_0 une fonction sans point critique et soit $C_{f_0, K}^\infty(M, \mathbb{R})$ l’ensemble des fonctions coïncidant avec f_0 hors d’un compact fixé K de M . Alors, dans $C_{f_0, K}^\infty(M, \mathbb{R})$ l’ensemble des fonctions de Morse est un ouvert dense pour la topologie induite par $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Exercice. Montrer que sur une variété ouverte il existe toujours une fonction sans point critique. [Indication : construire une fonction dont les points critiques sont isolés ; prendre une exhaustion de M par des compacts K_n dont aucune composante du complémentaire n’est bornée (on les appelle des compacts *pleins*), construire une suite de fonctions f_n telles que f_n soit sans point critique sur K_n et $f_{n+1}|_{K_n} = f_n|_{K_n}$.]

6.1.2 Gradient

Une métrique riemannienne μ étant fixée sur M , le gradient d’une fonction f est le champ de vecteurs, noté $\text{grad} f$, défini par

$$\langle \text{grad} f(x), \cdot \rangle = df(x)(\cdot).$$

Ici $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire défini par μ sur l'espace tangent $T_x M$. En particulier, on a

$$|\text{grad} f|^2 = df(\text{grad} f).$$

Si a est un point critique, $\text{grad} f(a)$ est le vecteur nul. Si a n'est pas un point critique, $\text{grad} f(a)$ est non nul; précisément, au voisinage de a , l'ensemble de niveau $\{x \in M \mid f(x) = f(a)\}$ est une hypersurface à laquelle $\text{grad} f(a)$ est orthogonal. Enfin, si $\gamma(t)$ est une courbe intégrale du champ de gradient, on a :

$$f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} |\text{grad} f(\gamma(t))|^2 dt.$$

6.1.3 Gradient adapté à une fonction de Morse

Soit f une fonction de Morse sur la variété M . Dans le souci d'avoir une dynamique très simple pour le champ de gradient au voisinage des points critiques, on impose à la métrique μ d'être *adaptée* à f , c'est-à-dire :

il existe des coordonnées de Morse pour f au voisinage de chaque point critique dans lesquelles μ est la métrique euclidienne.

Le champ de gradient d'une métrique adaptée est lui-même dit *adapté*.

Attention : cela ne veut pas dire que μ soit la métrique euclidienne pour tout autre système de coordonnées de Morse. Des métriques adaptées se construisent par partition de l'unité. La proposition suivante caractérise les champs de gradients adaptés.

Proposition. *Soit f une fonction de Morse et X un champ de vecteurs sur M . Il existe une métrique adaptée telle que $X = \text{grad} f$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- 1) $X.f > 0$ hors des points critiques ;
- 2) pour tout point critique, il existe des coordonnées de Morse dans lesquelles X est le gradient euclidien.

Démonstration. Les conditions sont nécessaires. Réciproquement, on construit la métrique en lui imposant d'être la métrique euclidienne dans les cartes de la condition 2). D'autre part, au voisinage d'un point a non critique il existe une métrique qui vérifie :

- X est orthogonal aux hypersurfaces de niveau ;
- $|X|^2 = X.f$.

Si μ_1 et μ_2 sont deux métriques riemanniennes locales vérifiant ces conditions et si α_1 et α_2 sont deux fonctions positives avec $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, alors $\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2$ est une métrique riemannienne qui vérifie encore ces conditions. Donc par partition de l'unité, on trouve une métrique globale, adaptée à f , telle que $X = \text{grad} f$. \square

6.2 Questions de complétude, condition de Palais - Smale

Certains problèmes du calcul des variations conduisent naturellement à considérer des variété ouvertes. Mais on bute sur le fait qu'un champ de gradient peut ne pas être complet. La condition de Palais-Smale, qui porte à la fois sur la fonction f et sur la métrique, impose des conditions à l'infini qui permettent un contrôle de la dynamique de gradient : on peut dire d'où vient et où va chaque ligne de gradient. Une référence pour ce paragraphe est [38]. sur une variété compacte sans bord, la condition est automatiquement satisfaite et les conclusions dynamiques sont donc toujours valables.

6.2.1 Métrique riemannienne complète

Une métrique riemannienne μ est dite complète si tout chemin $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, C^1 par morceaux et de longueur finie, a une image d'adhérence compacte.

Ce n'est pas la définition classique, mais c'est celle que l'on peut donner sans parler de géodésiques. Soit d la distance associée à la longueur : $d(a, b)$ est la borne inférieure des longueurs des chemins joignant a et b . On peut prouver que μ est complète si et seulement si d est complète au sens de Cauchy.

Par exemple, la métrique riemannienne sur le plan privé de l'origine, qui en chaque point coïncide avec la métrique euclidienne, n'est pas complète.

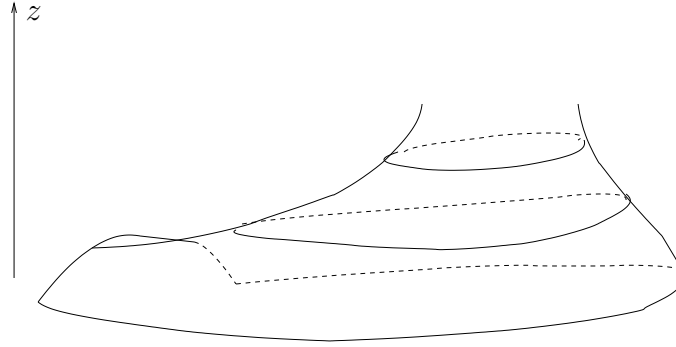
Exercice. Construire une métrique complète sur une variété ouverte.

6.2.2 La condition de Palais-Smale

Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et μ une métrique riemannienne complète. La condition de Palais-Smale (P.S.) s'énonce comme suit.

Pour toute suite $x_n \in M$, telle que la suite $|f(x_n)|$ soit bornée et que $|\text{grad}f(x_n)| \rightarrow 0$, il existe une sous-suite convergente; la limite est donc un point critique.

Exemple. La figure présente une surface dans \mathbb{R}^3 où la fonction hauteur ne vérifie pas la condition de Palais-Smale; en quelque sorte il y a un point critique à l'infini.



Exercice. La condition porte non seulement sur f mais aussi sur la métrique. Construire sur $(\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2)$ deux fonctions f et g sans points critiques, l'une vérifiant (P.S.) et l'autre pas, et qui, néanmoins, sont conjuguées : $f = g \circ \phi$, où ϕ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 . Alors, pour la métrique $\phi^*(dx^2 + dy^2)$, f ne vérifie pas (P.S.).

[Indication. On prend $f(x, y) = y$ et pour g une fonction ayant les propriétés suivantes :

- 1) $g(x, y) = y$ pour $x < 0$ et les niveaux de g sont connexes ;
- 2) il existe une ligne de gradient γ de g contenue dans $\{x > 0, y < 0\}$ et asymptote à l'axe des x ; en particulier g est majorée sur γ .

La première condition garantit que f et g sont conjuguées et la seconde condition implique que g ne satisfait pas (P.S.) pour la métrique euclidienne.]

6.2.3 Sous-niveaux d'une fonction

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $M^a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$. On dit que c'est le *sous-niveau* de la valeur a . S'il y a besoin de rappeler la fonction, on écrit $M^a(f)$. Si a est une valeur régulière, M^a est une variété à bord ; d'après Sard, c'est le cas pour presque tout a .

De façon analogue, pour $a < b$, on note $M_a^b = \{x \in M \mid a \leq f(x) \leq b\}$.

6.2.4 Contrôle de la dynamique

Dans tout ce paragraphe, (f, μ) est un couple d'une fonction réelle et d'une métrique riemannienne qui vérifient la condition de Palais-Smale ; ϕ désigne le flot local du champ de gradient. Pour $x \in M$, $t(x)$ désigne la borne supérieure de l'intervalle de temps où $\phi(x, t)$ est défini.

Lemme 1. *Si c n'est pas une valeur critique, il existe $\epsilon > 0$ tel que $M_{c-\epsilon}^{c+\epsilon}$ ne contienne pas de points critiques.*

Preuve. Sinon il existe une suite $x_n \in \text{crit} f$ telle que $f(x_n) \rightarrow c$. D'après (P.S.) il existe une sous-suite convergente et la limite est un point critique au niveau c . \square

Remarque. Ce lemme vaut aussi dans le cas où $f^{-1}(c)$ est vide.

Lemme 2. *Soit $x \in M$. Si $f(\phi(x, t)) \rightarrow b < +\infty$ pour $t \rightarrow t(x)$, alors $t(x) = +\infty$ et b est une valeur critique. Plus précisément, il existe une suite $t_n \rightarrow \infty$ telle que $\phi(x, t_n)$ tende vers un point critique.*

Preuve. L'hypothèse est que $\int_0^{t(x)} |\text{grad} f(\phi(x, u))|^2 du < +\infty$. Supposons $t(x) < +\infty$. Dans ce cas, d'après Cauchy-Schwarz, $\int_0^{t(x)} |\text{grad} f(\phi(x, u))| du < +\infty$. Donc le chemin $u \in [0, t(x)] \rightarrow \phi(x, u)$ est de longueur finie. Il reste dans un compact, car la métrique est complète. Mais alors la solution $\phi(x, t)$ de l'équation différentielle associée au champ $\text{grad} f$ est prolongeable au-delà de $t(x)$. Contradiction.

Donc $t(x) = +\infty$. La convergence de l'intégrale impose alors qu'il existe une suite $t_n \rightarrow +\infty$ avec $\text{grad} f(\phi(x, t_n)) \rightarrow 0$. D'après (P.S.), quitte à prendre une sous-suite, $\phi(x, t_n)$ tend vers un point critique. \square

Corollaire. *Si f est bornée, le champ de gradient est complet.*

Lemme 3. *On suppose que f est une fonction de Morse. Soit $x \in M$ tel que $f(\phi(x, t)) \rightarrow b$ pour $t \rightarrow t(x)$. Alors $\phi(x, t)$ tend vers un point critique.*

Preuve. D'après le lemme 2, il existe une suite $t_n \rightarrow +\infty$ telle que $\phi(x, t_n)$ tende vers un point critique x_0 au niveau b . Dans une carte de Morse où la métrique est euclidienne, on connaît exactement les lignes de gradient qui tendent vers le point critique : ce sont les demi-droites du sous-espace linéaire E d'équations $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$.

La carte de Morse contient une boule de rayon r centrée à l'origine. Considérons le champ de gradient linéaire

$$2\left(\sum_{i \leq k} -x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i > k} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

Un calcul montre que, si $y \in \text{int}B(0, r)$ et $y \notin E$, alors $\phi(y, t)$ sort de $B(0, r)$ à un niveau $> b$. Comme $f(\phi(x, t)) \leq b$, on voit qu'à partir du moment où $\phi(x, t_n) \in \text{int}B(0, r)$, ce point appartient à E et, pour $t \geq t_n$, $\phi(x, t)$ décrit une demi-droite de E et tend vers le point critique. \square

Toujours sous l'hypothèse de Palais-Smale et en particulier pour les variétés compactes, on a le corollaire suivant.

Corollaire. *Si f est une fonction de Morse bornée, toute ligne de gradient "va" d'un point critique à un point critique.*

Cela veut dire que, pour tout $x \in M$, $\phi(x, t)$ tend vers un point critique si $t \rightarrow +\infty$ et vers un autre point critique si $t \rightarrow -\infty$.

Exercice. Décrire qualitativement les lignes de gradient de la fonction hauteur sur une chambre à air posée au sol en position de rouler. Que se passe-t-il si on l'incline légèrement ?

6.2.5 Fonction sans point critique

Théorème. *On suppose la condition de Palais-Smale et on suppose que l'intervalle $[a, b]$ est formé de valeurs régulières. Alors :*

- 1) toute ligne de gradient va de $f^{-1}(a)$ à $f^{-1}(b)$;
- 2) il existe un difféomorphisme

$$\Psi : f^{-1}(a) \times [0, b - a] \longrightarrow M_a^b$$

vérifiant

$$\Psi_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\text{grad} f}{|\text{grad} f|^2}.$$

Démonstration

- 1) Si une ligne de gradient parcourue dans le sens f croissant (resp. décroissant) n'atteint pas $f^{-1}(b)$ (resp. $f^{-1}(a)$), d'après le lemme 2 il y a un point critique dans M_a^b .
- 2) Soit Ψ le flot de $\frac{\text{grad} f}{|\text{grad} f|^2}$; les orbites sont les lignes de gradient parcourues à une autre vitesse. On observe que

$$f(\Psi(x, t_2)) - f(\Psi(x, t_1)) = t_2 - t_1.$$

Donc $\Psi|_{f^{-1}(a) \times [0, b - a]}$ a son image dans M_a^b et $\Psi_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\text{grad} f}{|\text{grad} f|^2}$. Par la théorie générale des équations différentielles, on sait que Ψ est un difféomorphisme local car $f^{-1}(a)$ est transverse aux orbites. Par 1), on sait que Ψ est surjective. D'autre part, deux lignes de gradient issues de deux points distincts de $f^{-1}(a)$ ne peuvent se rencontrer ; donc Ψ est injective. \square

6.3 Principe du mini-max

6.3.1 L'idée sur un exemple

Supposons que M soit une variété compacte sans bord munie d'une fonction différentiable non constante. La condition (P.S.) est satisfaite. On sait que f possède au moins deux points critiques, un minimum et un maximum. On veut trouver d'autres points critiques à l'aide d'informations topologiques sur M . Supposons par exemple, comme c'est le cas pour le tore, qu'il existe un lacet $\gamma_0 : S^1 \rightarrow M$ non homotope à une application constante. On envisage l'ensemble \mathcal{A} de tous les lacets γ homotopes à γ_0 . Pour chaque γ , on considère le nombre réel $\max(f \circ \gamma)$ et on pose

$$c = \inf_{\gamma \in \mathcal{A}} \max(f \circ \gamma).$$

On établit que c est une valeur critique, qui d'ailleurs n'est pas celle d'un extremum local. L'argument est le suivant. Supposons que c soit une valeur régulière. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $M_{c-\epsilon}^{c+\epsilon}$ soit un produit $f^{-1}(c-\epsilon) \times [0, 1]$. La rétraction de $M_{c-\epsilon}^{c+\epsilon}$ sur $f^{-1}(c-\epsilon)$ donne une homotopie de γ à un lacet γ' à valeurs dans $M^{c-\epsilon}$; autrement dit, $\gamma' \in \mathcal{A}$ et $\max f \circ \gamma' < c$. Contradiction.

On va maintenant suivre une démarche analogue avec les formes différentielles fermées. La terminologie de "mini-max" n'est plus directement lisible dans ce cas; mais le principe reste le même que dans l'exemple précédent.

6.3.2 Principe du mini-max sur les formes fermées

On suppose que M est une variété sans bord, munie d'une fonction différentiable f vérifiant la condition de Palais-Smale (pour une certaine métrique riemannienne complète). Soit ω une forme différentielle fermée non exacte; faute de mieux, il y a toujours les formes de degré 0 non nulles.

On définit la partie $A \subset \mathbb{R}$ formée des valeurs régulières a telles que $\omega|_{M^a}$ soit non exacte. On convient que si M^a est vide, $\omega|_{M^a}$ est exacte! On pose :

$$c(\omega, f) = c(\omega) = \inf(A).$$

Si A est vide, $c(\omega, f) = +\infty$.

Théorème. *Si $+\infty > c(\omega) > -\infty$, alors $c(\omega)$ est une valeur critique.*

Démonstration. Si $c(\omega)$ n'est pas une valeur critique, d'après le lemme 1 de 6.2.4, il existe $\epsilon > 0$ tel que f n'ait pas de point critique sur $M_{c(\omega)-\epsilon}^{c(\omega)+\epsilon}$ et, d'après le théorème 6.2.5, ce domaine est un produit $f^{-1}(c(\omega)-\epsilon) \times [0, 1]$. Comme $M^{c(\omega)+\epsilon}$ n'est pas vide, on déduit que $f^{-1}(c(\omega)-\epsilon)$ n'est pas vide.

En suivant les lignes de gradient qui traversent $M_{c(\omega)-\epsilon}^{c(\omega)+\epsilon}$, on construit une application différentiable

$$\rho : M^{c(\omega)+\epsilon} \rightarrow M^{c(\omega)-\epsilon} \subset M^{c(\omega)+\epsilon}$$

homotope à l'identité de $M^{c(\omega)+\epsilon}$. Soit $\omega_0 = \rho^*\omega$. Comme $\omega|_{M^{c(\omega)-\epsilon}} = d\alpha$, la forme ω_0 est exacte : $\omega_0 = d\rho^*\alpha$. D'autre part, la formule d'homotopie 2.5.3 donne

$$\omega|_{M^{c(\omega)+\epsilon}} - \omega_0 = d\beta.$$

Finalement $\omega|_{M^{c(\omega)+\epsilon}}$ est exacte contrairement à l'hypothèse. □

On verra plus loin un résultat plus précis pour les fonctions de Morse : si $\deg \omega = k$, $c(\omega)$ est la valeur d'un point critique d'indice k .

Remarque. Si on change ω en une forme ω' cohomologue, $\omega' = \omega + d\alpha$, alors $c(\omega') = c(\omega)$. Autrement dit, la valeur critique obtenue par mini-max ne dépend que de la classe de cohomologie $[\omega]$.

6.3.3 Mini-max sur les formes de degré 0

On suppose ici que M est compacte sans bord. La fonction constante, égale à 1 sur M est une forme fermée de degré 0. Elle est non exacte.

[Si on veut prolonger le complexe des formes différentielles en degré négatif, on ne peut le faire qu'en posant $\Omega^k(M) = 0$; ainsi la seule forme de degré 0 qui puisse être considérée comme exacte est 0].

On obtient alors

$$c(1, f) = \min f.$$

En effet, $1|M^{\min f + \epsilon}$ est non exacte et $1|\emptyset$ est exacte.

6.3.4 Mini-max sur les formes de degré maximal

On suppose ici que M est compacte sans bord de dimension n et *orientable*. On a vu qu'une forme ω de degré n est exacte sur M si et seulement si $\int_M \omega = 0$. Une forme volume est non exacte.

Proposition. *Si ω est une forme volume, on a :*

$$c(\omega, f) = \max f.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ tel que $\max f - \epsilon$ soit une valeur régulière; ϵ peut être choisi arbitrairement petit d'après Sard. $M^{\max f - \epsilon}$ est une variété à bord et son complémentaire contient une boule B . Il existe une forme ω' de degré n à support dans B telle que $\int_M \omega' = \int_M \omega$. Donc $\omega' - \omega$ est exacte et $c(\omega') = c(\omega)$. Mais $\omega'|M^{\max f - \epsilon} = 0$; donc $c(\omega') \geq \max f - \epsilon$ pour tout ϵ . \square

6.3.5 Continuité par rapport à un paramètre

Une des propriétés remarquables sur les valeurs critiques obtenues par mini-max est qu'elles peuvent être suivies continûment lorsque la fonction varie.

Proposition. *Soit f et g deux fonctions définies sur la variété M supposée compacte sans bord. Soit ω une forme différentielle fermée. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\max_{x \in M} |f(x) - g(x)| < \eta$ implique $|c(\omega, f) - c(\omega, g)| < \epsilon$.*

Démonstration. Notons $c(f)$ et $c(g)$ les deux valeurs critiques données par ω . Si g est assez proche de f en topologie C^0 , on a l'inclusion

$$g^{-1}(]-\infty, c(f) - \epsilon]) \subset f^{-1}(]-\infty, c(f)]).$$

Par conséquent ω est exacte sur $g^{-1}(]-\infty, c(f) - \epsilon])$ et $c(g) > c(f) - \epsilon$. En échangeant les rôles des deux fonctions on obtient $c(g) < c(f) + \epsilon$. \square

6.4 Le modèle de Morse et ses premières applications

On étudie d'un point de vue géométrique la fonction de Morse standard

$$f(x) = -x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$$

et son gradient pour la métrique euclidienne au voisinage de l'origine.

6.4.1 Description du modèle \mathcal{M} ($n = 2$, $k = 1$)

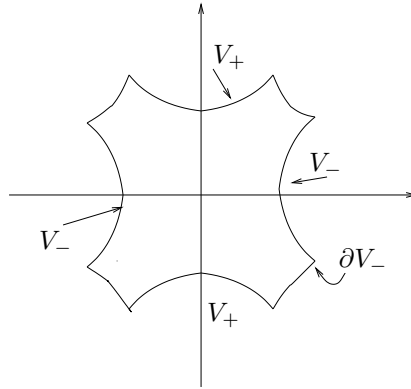
Le modèle de Morse dépend de deux paramètres positifs. Soit $\epsilon > \eta > 0$. On considère le domaine (non compact) du plan défini par $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -\epsilon \leq -x_1^2 + x_2^2 \leq \epsilon\}$. On considère, dans le niveau inférieur $f^{-1}(-\epsilon)$, la sous-variété à bord V_- et son bord ∂V_- :

$$\begin{aligned} V_- &= \{(x_1, x_2) \in f^{-1}(-\epsilon) \mid x_2^2 \leq \eta\} \\ \partial V_- &= \{(x_1, x_2) \in f^{-1}(-\epsilon) \mid x_2^2 = \eta\}. \end{aligned}$$

De même, on pose :

$$\begin{aligned} V_+ &= \{(x_1, x_2) \in f^{-1}(+\epsilon) \mid x_1^2 \leq \eta\} \\ \partial V_+ &= \{(x_1, x_2) \in f^{-1}(+\epsilon) \mid x_1^2 = \eta\}. \end{aligned}$$

Les lignes de gradients, trajectoires orthogonales des niveaux de f , sont les lignes $x_1 x_2 = \text{const.}$ Donc les lignes de gradient issues de ∂V_- coupent $f^{-1}(+\epsilon)$ selon ∂V_+ . Le modèle \mathcal{M} est le voisinage du plan limité par l'octogone dont chaque côté est un des arcs d'hyperbole que l'on vient de décrire. La frontière de \mathcal{M} est composée de trois sous-variétés à bord : V_- (niveau inférieur), V_+ (niveau supérieur) et une partie (face latérale) notée $\partial_\ell \mathcal{M}$. Le gradient rentre dans \mathcal{M} le long de V_- , sort de \mathcal{M} le long de V_+ et est tangent à la face latérale.



(Ici, V_{\pm} a deux composantes connexes.)

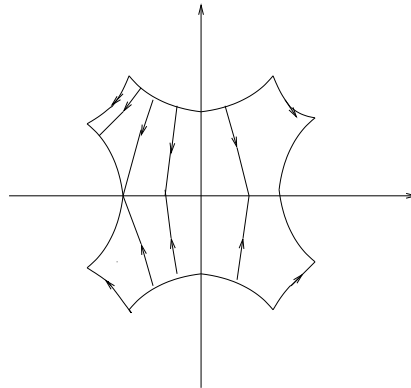
Remarques.

- 1) Pour tout point x de \mathcal{M} tel que $x_2 \neq 0$ la trajectoire de gradient issue de x et parcourue dans le sens du flot sort de \mathcal{M} . Si $x_2 = 0$, elle tend vers le point critique.
- 2) Le paramètre ϵ étant fixé, les $\mathcal{M}(\epsilon, \eta)$ forment un système fondamental de voisinages de $\{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\}$ dans \mathcal{M} .

Lemme homotopique. *Il existe une homotopie $h : \mathcal{M} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ telle que :*

- $h(x, 0) = x$,
- $h(x, t) = x$ pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in V_- \cup \{x_2 = 0\}$,
- $h(x, 1) \in V_- \cup \{x_2 = 0\}$,
- si $x \in \partial_{\ell} \mathcal{M}$, $h(x, t)$ se déplace sur la ligne de gradient de x .

Preuve.



(Ici, V_{\pm} a deux composantes connexes.)

Les lignes fléchées de la figure donnent la solution. On peut lire des formules explicites dans [Hirsch [18], chap. 6 §3]. □

On dit que l'on a une *rétraction par déformation* du modèle sur une de ses parties, ici la réunion du niveau inférieur et de $\{x_2 = 0\}$.

6.4.2 Description du modèle dans le cas général

D'abord, si $k = 0$ ou n , \mathcal{M} est une boule dont le bord est une sphère dans un niveau de f . Sinon, on écrit $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ et on utilise les coordonnées polaires de chacun des facteurs. Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs unité de \mathbb{R}^k et \mathbb{R}^{n-k} respectivement, et si $P(\vec{u}, \vec{v})$ est le plan qu'ils engendrent, on définit \mathcal{M} en demandant que son intersection avec $P(\vec{u}, \vec{v})$ soit le modèle planaire donné en 6.4.1, où les paramètres ϵ et η sont fixés indépendamment de \vec{u} et \vec{v} . Soit $V_{\pm} = \mathcal{M} \cap f^{-1}(\pm\epsilon)$. La projection orthogonale de V_- sur le cylindre $S^{k-1}(\sqrt{\eta}) \times \mathbb{R}^{n-k}$ est un difféomorphisme sur $S^{k-1}(\sqrt{\eta}) \times D^{n-k}(\sqrt{\eta})$; on a mis entre parenthèses les rayons des sphères et boules euclidiennes. De même, la projection orthogonale de V_+ sur le cylindre $\mathbb{R}^k \times S^{n-k-1}(\sqrt{\eta})$ est un difféomorphisme sur

$D^k(\sqrt{\eta}) \times S^{n-k-1}(\sqrt{\eta})$. Utilisant ces difféomorphismes pour paramétrer V_{\pm} , et regardant la figure dans $P(\vec{u}, \vec{v})$ on établit immédiatement :

lemme. *L'application $\partial V_- \rightarrow \partial V_+$, obtenue en suivant les lignes de gradient, est l'identité de $S^{k-1} \times S^{n-k-1}$.*

D'autre part, le lemme homotopique 6.4.1 reste valable pour le modèle général avec le même énoncé.

6.4.3 Globalisation du lemme homotopique

Lemme. *Soit M une variété compacte sans bord, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse et X un champ de gradient adapté. Soit a un point critique de f , unique à son niveau. Soit e^k une sous-variété de dimension k , contenant a , difféomorphe à la boule unité de \mathbb{R}^k et à laquelle X est tangent. Alors, pour ϵ assez petit, il existe une rétraction par déformation de $M^{f(a)+\epsilon}$ sur $M^{f(a)-\epsilon} \cup e^k$.*

Preuve. On choisit ϵ pour que a soit le seul point critique dans $M_{f(a)-\epsilon}^{f(a)+\epsilon}$. Quitte à diminuer ϵ , une carte de Morse linéarisant X contient le modèle $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\epsilon, \eta)$. Dans ce cas, la rétraction par déformation est donnée dans \mathcal{M} par le lemme homotopique 6.4.1 et elle est prolongée dans $M_{f(a)-\epsilon}^{f(a)+\epsilon} - \mathcal{M}$ en déplaçant chaque point sur sa ligne de gradient jusqu'à rencontrer le niveau régulier de valeur $f(a) - \epsilon$. Les deux formules se recollent à cause de la dernière condition imposée pour la rétraction dans le modèle. La boule e^k est celle de \mathcal{M} de rayon $\sqrt{\epsilon}$ d'équations $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$. \square

Exercice. Généraliser au cas où plusieurs points critiques sont au même niveau.

6.4.4 Application au mini-max

On précise le théorème 6.3.2, pour une variété compacte sans bord M , une fonction de Morse f et une forme fermée ω de degré k .

Proposition. *Le réel $c(\omega)$ est la valeur d'un point critique d'indice k .*

Démonstration. Supposons pour simplifier que $c(\omega)$ Soit la valeur d'un seul point critique a . On sait que $\omega|_{M^{f(a)-\epsilon/2}} = d\alpha$. Soit λ une fonction valant 1 au voisinage de $M^{f(a)-\epsilon}$. Quitte à remplacer ω par $\omega - d\lambda\alpha$, on peut supposer que ω est nulle au voisinage de $M^{f(a)-\epsilon}$.

Si l'indice du point critique a est différent de k , alors $\omega|_{\mathcal{M}} = d\beta$, où β est nulle au voisinage de V_- (voir 5.6 chap.2); on prolonge β par 0 sur un voisinage de $M^{f(a)-\epsilon}$. D'après 4.3, il existe une homotopie $h : M^{f(a)+\epsilon} \times [0, 1] \rightarrow M^{f(a)+\epsilon}$, telle que $h_0(x) = x$ et $h_1(x)$ appartienne à un voisinage de $M^{f(a)-\epsilon} \cup \text{int } \mathcal{M}$. Alors, d'une part $h_1^*\omega = d(h_1^*\beta)$ et d'autre part $h_1^*\omega - h_0^*\omega$ est exacte (formule d'homotopie 2.5.3). Finalement, $\omega|_{M^{f(a)+\epsilon}}$ est exacte, contrairement à la définition de $c(\omega)$. \square

6.4.5 L'inégalité de Ljusternik-Snirel'man

Les hypothèses sont les mêmes qu'en 6.4.4. On considère deux formes fermées ω_1 et ω_2 .

Proposition. *Si $\deg \omega_2 > 0$, alors $c(\omega_1 \wedge \omega_2) > c(\omega_1)$. En particulier, si ω est une forme et $\deg \omega > 0$, on a $c(\omega) > \min f = c(1)$.*

Démonstration. Le produit d'une forme fermée et d'une forme exacte est une forme exacte. Donc $\omega_1 \wedge \omega_2$ est exacte sur $M^{c(\omega_1)-\epsilon}$ pour tout ϵ et l'inégalité large est claire. Si f n'avait pas d'autre point critique au niveau $c(\omega_1)$, le résultat serait directement conséquence de 6.4.4. Soit donc K l'ensemble des points critiques de f au niveau $c(\omega_1)$; c'est un ensemble fini. Par le lemme de Poincaré, ω_2 est exacte au voisinage de K . Quitte à modifier ω_1 et ω_2 par addition de différentielles globales, on peut supposer que ω_1 est nulle au voisinage de $M^{c(\omega_1)-\epsilon}$ et que ω_2 est nulle sur un voisinage de K . Ainsi $\omega_1 \wedge \omega_2$ est nul sur un voisinage N de $M^{c(\omega_1)-\epsilon} \cup K$.

Mais, d'après 6.4.3, il existe une homotopie $h : M^{c(\omega_1)+\epsilon} \times [0, 1] \rightarrow M^{c(\omega_1)+\epsilon}$, telle que $h_0 = \text{Id}$ et que h_1 soit à valeurs dans N . Alors, $h_1^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = 0$ et la formule d'homotopie pour les formes différentielles (voir 2.5.3) donne l'exactitude de

$$\omega_1 \wedge \omega_2|_{M^{c(\omega_1)+\epsilon}} = h_0^*(\omega_1 \wedge \omega_2) - h_1^*(\omega_1 \wedge \omega_2).$$

\square

Corollaire. *Si la variété M possède r formes différentielles $\omega_1, \dots, \omega_r$ dont le degré est > 0 et dont le produit n'est pas exact, alors toute fonction de Morse sur M a au-moins $r + 1$ valeurs critiques distinctes.*

En effet : $+\infty > c(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r) > c(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{r-1}) > \dots$. En fait la théorie de Ljusternik-Snirel'man ne concerne pas spécialement les fonctions de Morse (ni les formes fermées). Dans le cadre de cette théorie ([38], th. 5.21), on établit le résultat suivant :

Si ω_1 et ω_2 sont deux formes fermées, $c(\omega_1 \wedge \omega_2) \geq c(\omega_2)$ et s'il y a égalité, ω_2 n'est pas exacte au voisinage du lieu critique de niveau $c(\omega_1)$.

D'un autre côté, pour les fonctions de Morse, les inégalités de Morse donnent un résultat plus fort que celui du corollaire précédent (voir 6.7.4).

6.5 Le complexe de Thom-Smale

Dans tout ce qui suit, M est une variété orientée de dimension n , compacte sans bord, f est une fonction de Morse et X est un champ de gradient adapté à f ; son flot est noté ϕ . On va construire un sous-complexe $C_*(f)$, de rang fini, du complexe C_* des courants de De Rham, où $C_k(f)$ sera muni d'une base en bijection canonique avec les points critiques d'indice k de f .

6.5.1 Variétés stables et instables des points critiques

Soit a un point critique de f . On appelle *variété stable* de a , noté $W^s(a)$, l'ensemble des points x de M tels que $\phi(x, t) \rightarrow a$ pour $t \rightarrow +\infty$. (La proposition justifiera la terminologie.) Si x appartient à la carte de Morse qui linéarise X , on a vu que $x \in W^s(a)$ si et seulement si x appartient à l'espace linéaire des k premières coordonnées, où k est l'indice du point a . Donc $W^s(a)$ contient une sous-variété D , qui est une boule euclidienne de \mathbb{R}^k . Par ailleurs, pour tout $x \in W^s(a)$, il existe un t_0 assez grand, tel que $\phi(x, t_0)$ appartienne à cette carte de Morse puisque $\phi(x, t) \rightarrow a$ pour $t \rightarrow +\infty$; on a : $\phi(x, t_0) \in D$. On a donc prouvé que $W(a)$ est la réunion $\bigcup_{t \in (-\infty, 0]} \phi(D, t)$.

Proposition. *La variété stable $W^s(a)$ est une sous-variété de dimension k , difféomorphe à \mathbb{R}^k .*

Démonstration. On construit $j : \mathbb{R}^k \rightarrow M$ en imposant que j soit l'“identité” sur D et que $j(e^{-t}y) = \phi(j(y), t)$ pour tout $t \geq 0$; cette relation est satisfaite sur D , d'après les formules donnant le flot d'un champ linéaire. Ces deux conditions déterminent complètement j . Puisque c'est le cas sur D , j est une immersion injective. Utilisons maintenant que X est un gradient pour prouver que l'image est une sous-variété.

La fonction $t \mapsto f(\phi(x, t))$ est strictement croissante. Donc si \mathcal{M} est un modèle de Morse contenant ∂D dans son niveau inférieur, on a : $\mathcal{M} \cap W^s(a) = D$. Cela prouve que $W^s(a)$ est une sous-variété au voisinage de chaque point de $\text{int}D$. Si x est un autre point de $W^s(a)$ et si $\phi(x, t) \in \text{int}D$, l'aspect local de $W^s(a)$ au voisinage de x est difféomorphe via ϕ_t à l'aspect local de $W^s(a)$ au voisinage de $\phi(x, t)$. C'est donc une sous-variété et $j : \mathbb{R}^k \rightarrow M$ est un plongement

(ou encore $j : \mathbb{R}^k \rightarrow W^s(a)$ est un difféomorphisme). \square

Comme la trajectoire de gradient de tout point tend dans le futur vers un point critique, M est la réunion des variétés stables de ses points critiques. Cette décomposition en “cellules” a été observée par Thom dans [43].

En faisant la même étude pour la fonction $-f$ et son gradient $-X$, on trouve la *variété instable* $W^u(a)$, formée des points $x \in M$ tels que $\phi(x, t) \rightarrow a$ pour $t \rightarrow -\infty$. C’est une sous-variété difféomorphe à \mathbb{R}^{n-k} . Bien noter que ni $W^s(a)$ ni $W^u(a)$ ne sont des sous-variétés propres. Par conséquent, le seul geste de les orienter, ce qui est toujours possible, ne suffit pas à en faire des courants : pour une forme différentielle ω de degré k , *a priori* l’intégrale $\int_{W^s(a)} \omega$ ne converge pas. Les sections 6.5.2 à 6.5.6 sont consacrées à montrer que “génériquement” sur X , les variétés stables sont des courants dont on connaît le bord. Les démonstrations un peu techniques sont reportées en appendice.

6.5.2 Transversalité des variétés stables et instables.

Soit X' un champ de vecteurs coïncidant avec X dans des cartes de Morse au voisinage de chaque point critique. Si X' est assez proche de X , on aura encore $X'.f > 0$ sur le compact complémentaire de ces cartes, donc aussi en tout point non critique. Ainsi X' est un champ de gradient adapté à f , pour une nouvelle métrique riemannienne qui est encore euclidienne dans des cartes de Morse des points critiques. Les approximations considérées dans la proposition seront de ce type.

Proposition. *Quitte à remplacer X par une approximation convenable, la propriété suivante est satisfaite : pour toute paire (x, y) de points critiques, $W^s(x)$ et $W^u(y)$ sont deux sous-variétés transverses.*

Cette proposition est un cas particulier d’un théorème de Kupka et Smale (voir [1]).

Hypothèse (T). Dorénavant on fait l’hypothèse (T), dite aussi de *Morse-Smale*, que les variétés stables et instables de tous les points critiques sont mutuellement transverses.

Remarque 1. On a $W^s(x) \cap W^u(x) = \{x\}$ et les plans tangents sont supplémentaires. Ce sont respectivement les espaces des k premières coordonnées et des $n - k$ dernières dans la carte de Morse de (f, X) .

Remarque 2. Si $W^s(x) \cap W^u(y)$ est non vide, c’est une réunion de lignes de gradient. Donc en un point d’intersection les espaces tangents ont une direction commune; ils ne sont pas supplémentaires. La transversalité implique alors

$$\text{ind } y < \text{ind } x.$$

Le cas des points critiques d'indice consécutifs est de première importance. Pour en parler et pour alléger le langage, on introduit la définition suivante.

Définition. Soit x et y deux points critiques. On dira qu'une ligne de gradient, paramétrée par $t \in \mathbb{R} \mapsto \phi(a, t) \in M$, va de y à x (ou connecte y à x) si x est la limite pour $t \rightarrow +\infty$ et si y est la limite pour $t \rightarrow -\infty$. (Voir aussi le corollaire 6.2.4).

6.5.3 Description de l'adhérence des variétés stables

On note $\overline{W^s(x)}$ l'adhérence de $W^s(x)$ et on appelle *frontière* de $W^s(x)$ l'ensemble $F^s(x) = \overline{W^s(x)} \setminus W^s(x)$; cette terminologie est un peu abusive car il ne s'agit pas de la frontière au sens de la topologie générale, laquelle est $\overline{W^s(x)}$ tout entier sauf si l'indice du point x est n . Sous l'hypothèse de transversalité (T), on a :

Proposition.

- 1) $F^s(x)$ est une réunion de $W^s(y)$ pour des points critiques y vérifiant $\text{ind } y < \text{ind } x$.
- 2) Si $W^s(y) \subset \overline{W^s(x)}$ avec $\text{ind } y = \text{ind } x - 1$, alors, pour tout $a \in W^s(y)$, il existe un voisinage V et un difféomorphisme (seulement C^1) $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec :

$$\begin{aligned}\Psi(V \cap W^s(y)) &= \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\} \\ \Psi(V \cap W^s(x)) &= P_1 \cup \dots \cup P_m,\end{aligned}$$

où chaque P_j est un demi-espace linéaire de dimension k contenant $\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$.

Commentaires. Si on applique ce résultat au point critique y lui-même, on trouve qu'au voisinage de y l'intersection de $\overline{W^s(x)}$ et de $W^u(y)$ est formée de m demi-droites (dans la carte linéarisante du 2) ci-dessus).

Autrement dit, le nombre m est le nombre de lignes de gradient allant de y à x ; en particulier ce nombre est fini, ce qui n'avait rien d'évident a priori. D'ailleurs ce nombre peut être infini en l'absence de l'hypothèse de transversalité (T) (exercice : donner un tel exemple). Si on choisit une orientation (arbitraire) sur $W^s(x)$ et sur $W^s(y)$, les demi-espaces P_j sont orientés, ainsi que $\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$. L'orientation de ce dernier est celle de bord orienté pour m_+ des P_j et l'orientation opposée pour m_- de P_j ; $m_+ + m_- = m$. Observer qu'il n'est pas fait appel à une orientation de la variété ambiante M .

6.5.4 Définition de $n(x, y)$.

Pour une paire de points critiques (x, y) , avec $\text{ind } y = \text{ind } x - 1$, on pose $n(x, y) = 0$ si $W^s(y) \not\subset \overline{W^s(x)}$. Sinon, on pose $n(x, y) = m_+ - m_-$ où m_{\pm} sont définis ci-dessus.

Dans une terminologie d'origine physique (voir [51, 5]), ce nombre est appelé *nombre d'instants*; paraphrasant Raoul Bott, une ligne de gradient qui va de y à x passe le plus clair de

son temps dans le voisinage d'un de ces deux points critiques et saute presque instantanément de l'un à l'autre.

6.5.5 Les variétés stables comme courant

Soit x un point critique d'indice k ; on choisit une orientation de la variété stable $W^s(x)$, ce qui est possible puisqu'elle est difféomorphe à \mathbb{R}^k . Dans l'appendice, on expliquera complètement la structure locale de $\overline{W^s(x)}$ au voisinage de chacun de ses points. Ici on n'en retient que ce qui importe pour l'intégration des formes différentielles.

On peut toujours intégrer sur $W^s(x)$ une forme différentielle de degré k dont le support intersecte $W^s(x)$ selon un compact. Pour une forme différentielle quelconque de degré k , l'intégrale $\int_{W^s(x)} \omega$ ne converge en général pas. La proposition suivante non seulement assure la convergence mais donne une évaluation du reste qui permettra de calculer le bord du courant $W^s(x)$.

On introduit la notation suivante :

$$\Sigma^s(x) = \bigcup W^s(y)$$

où la réunion est étendue à tous les points critiques d'indice $\leq k-2$ appartenant à $F^s(x)$. C'est la partie singulière de la frontière de $\overline{W^s(x)}$.

Proposition.

1) Soit V un ϵ -voisinage de $F^s(x)$ (au sens d'une métrique riemannienne auxiliaire). Alors :

$$\left| \int_{W^s(x) \cap V} \omega \right| \leq \text{const.} \cdot \epsilon |\omega|.$$

2) Soit V' un ϵ -voisinage de $\Sigma^s(x)$, alors :

$$\left| \int_{W^s(x) \cap V'} \omega \right| \leq \text{const.} \cdot \epsilon^2 |\omega|.$$

Corollaire. Une orientation de $W^s(x)$ étant choisie, $W^s(x)$ est un courant de dimension k que nous appellerons courant de Thom-Smale.

Bien entendu, les constantes ne dépendent que de x et de la métrique riemannienne utilisée comme auxiliaire. A une constante multiplicative près, $|\omega|$ est le sup. des coefficients dans les écritures de la forme ω en coordonnées locales pour un atlas fini de M .

6.5.6 La formule de Stokes, bord des variétés stables

Proposition. On a :

$$\int_{W^s(x)} d\omega = \sum n(x, y) \int_{W^s(y)} \omega,$$

la somme étant étendue à tous les points critiques vérifiant $\text{ind } y = \text{ind } x - 1$. Autrement dit, si x est un point critique d'indice k , le bord du courant $W^s(x)$ est donné par

$$\partial W^s(x) = \sum_{\substack{y \in \text{crit } f \\ \text{ind } y = k - 1}} n(x, y) W^s(y).$$

Démonstration. On fait appel à un lemme élémentaire pour contrôler le gradient d'une fonction cloche.

Lemme. Soit K une partie compacte de la variété M . Il existe une fonction cloche α valant 1 sur K , à support dans le ϵ -voisinage de K et dont le gradient vérifie

$$|\text{grad } \alpha| \leq \frac{4}{\epsilon}.$$

Preuve. On sait qu'il existe une fonction C^∞ positive ou nulle ϕ s'annulant exactement sur K . On considère le sous-niveau N d'une valeur régulière de ϕ assez proche de 0 pour que N soit contenu dans le $\epsilon/2$ -voisinage de K ; c'est possible d'après Sard. On trace les géodésiques normales au bord de N dont on garde un segment de longueur $\epsilon/2$ sortant de N . Cela construit un épaississement N' de N , contenu dans le ϵ -voisinage de K . La fonction α vaut 1 sur N , est à support dans N' et ne dépend que de la distance à N . Il ne reste qu'à trouver une fonction d'une variable sur $[0, \epsilon/2]$, nulle à une extrémité, valant 1 à l'autre et de gradient majoré par $4/\epsilon$, ce qui est bien simple. \square

On applique le lemme à $\Sigma^s(x)$. On note V' un ϵ -voisinage de $\Sigma^s(x)$; si $y \in \overline{W^s(x)}$, on a : $F^s(y) \subset \Sigma^s(x)$. Les estimations de la proposition 6.5.5 donnent alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_{W^s(x) \cap V'} d(\alpha\omega) \right| &\leq \text{const.} \frac{1}{\epsilon} \epsilon^2 |\omega| \\ \left| \int_{W^s(y) \cap V'} \alpha\omega \right| &\leq \text{const.} \epsilon |\omega|. \end{aligned}$$

Dans la formule à démontrer, si on remplace ω par $(1 - \alpha)\omega$, on modifie chaque terme d'une quantité qui tend vers 0 avec ϵ . Ainsi, on est ramené à établir la formule pour les formes dont le support évite $\Sigma^s(x)$.

On reprend alors la démonstration de la formule de Stokes. C'est une formule locale : si elle est vraie pour les formes à petit support, elle est vraie. Si ω est à support dans un petit voisinage d'un point de $W^s(x)$, le membre de gauche est nul par la formule de Stokes classique et le membre de droite est nul faute de combattants.

Si ω est à support dans un petit voisinage d'un point de $W^s(y)$, $\text{ind } y = k - 1$, $y \in F^s(x)$, on calcule dans la carte linéarisante donnée par la proposition 6.5.3. La formule revient alors à additionner les formules de Stokes pour chaque demi-espace linéaire P_j . \square

6.5.7 Le complexe de Thom-Smale algébrique

On fixe arbitrairement des orientations pour chaque variété stable $W^s(x)$ et on note de la même façon le courant qu'elle définit. Dans l'espace C_k des courants de dimension k , on considère le sous-espace engendré par les $W^s(x)$, où x parcourt l'ensemble des points critiques d'indice k de la fonction de Morse f . La formule de Stokes montre que $\partial(C_k(f)) \subset C_{k-1}(f)$. On a donc un sous-complexe

$$C_*(f) = \left(C_n(f) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(f) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0(f) \right)$$

du complexe C_* des courants de De Rham, que l'on appelle le *complexe de Thom-Smale*.¹

Il n'y a pas à démontrer $\partial \circ \partial$ pour le complexe de Thom-Smale. C'est un cadeau du ciel dont voici un corollaire amusant, qui ne saute pas directement aux yeux sans cela :

$$\sum_{\text{ind } y=k-1} n(x, y) \cdot n(y, z) = 0$$

où x est un point critique d'indice k et z un point critique d'indice $k-2$.

6.5.8 Inégalités de Morse pour le complexe de Thom-Smale

On considère l'homologie du complexe de Thom-Smale. On note $c_k = \dim C_k(f)$ le nombre de points critiques d'indice k de la fonction f et on pose

$$\beta_k = \dim H_k(C_*(f)).$$

Noter que, pour l'instant ce β_k dépend de la fonction de Morse f et même de son champ de gradient adapté.

Proposition.

- 1) $\beta_k < \infty$,
- 2) $c_k - c_{k-1} + c_{k-2} \dots \geq \beta_k - \beta_{k-1} + \beta_{k-2} \dots$
- 3) $\sum_0^n (-1)^k c_k = \sum_0^n (-1)^k \beta_k$.

Démonstration. On note b_k la dimension de $\text{im } \partial$ dans $C_k(f)$ et z_k la dimension de $\text{ker } \partial$ dans $C_k(f)$. Evidemment $\beta_k = z_k - b_k$ et $c_k = b_{k-1} + z_k$. Donc $c_k - \beta_k = b_k + b_{k-1}$. Ainsi,

$$(c_k - \beta_k) - (c_{k-1} - \beta_{k-1}) + \dots = b_k \geq 0.$$

Pour le 3), on applique l'inégalité ci-dessus pour $k = n$, en tenant compte du fait que $b_n = 0$, car il n'y a pas de point critique d'indice $n+1$ et donc $C_{n+1}(f) = 0$. \square

¹Depuis la première rédaction de ce cours, les habitudes ont changé : ce complexe s'est successivement appelé le complexe de Thom-Smale-Witten puis le complexe de Morse.

Cas particulier, dit lacunaire.

Si f a tous ses points critiques d'indice pair, ou plus généralement s'il n'y a pas d'occurrence de deux indices consécutifs, alors les morphismes *bords* du complexe de Thom-Smale sont nuls. Dans ce cas $\beta_k = c_k$.

Il y a une fonction très célèbre avec cette propriété : M est le projectif complexe $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, vu comme quotient de la sphère unité de \mathbf{C}^{n+1} ; si on note $[z_0 : \dots : z_n]$ la classe d'équivalence d'un $(n+1)$ -uplet (z_0, \dots, z_n) de norme 1 (à multiplication près de toutes les coordonnées par $e^{i\theta}$), la fonction est :

$$f([z_0 : \dots : z_n]) = |z_1|^2 + 2|z_2|^2 + \dots + n|z_n|^2.$$

6.5.9 Polynôme de Poincaré et polynôme de Morse

Il y a une jolie façon d'exprimer et de prouver les inégalités de Morse qui est d'introduire les deux polynômes suivants de la variable T . Le *polynôme de Poincaré* du complexe $C_*(f)$ est défini par

$$\mathcal{P}_f(T) = \sum_k \beta_k T^k.$$

Le *polynôme de Morse* de la fonction de Morse f est défini par

$$\mathcal{M}_f(T) = \sum_k c_k T^k.$$

On prouve l'identité polynomiale suivante :

$$\mathcal{M}_f(T) - \mathcal{P}_f(T) = (1 + T) Q(T)$$

où $Q(T)$ est un polynôme à coefficients positifs ou nuls.

Exercice. Montrer que cette identité est équivalente aux inégalités de Morse. On peut alors donner une variante de la preuve de ces dernières comme suit. On introduit les polynômes $\mathcal{Z}(T) = \sum_k z_k T^k$ et $\mathcal{B}(T) = \sum_k b_k T^k$. Prouver les identités $\mathcal{Z}(T) = \mathcal{P}_f(T) + \mathcal{B}(T)$ et $\mathcal{M}_f(T) = \mathcal{Z}(T) + T\mathcal{B}(T)$, et en déduire l'identité ci-dessus.

6.6 Homologie du complexe de Thom-Smale

Le but de ce paragraphe est d'établir que l'inclusion $C_*(f) \hookrightarrow C_*$ induit un isomorphisme en homologie. De ce résultat fondamental, on déduira ensuite les grands théorèmes de la topologie algébrique des variétés. On commence par quelques préliminaires pour lesquels la situation géométrique est la même qu'au paragraphe 6.5.

6.6.1 Un premier critère d'exactitude

Définition. On introduit la filtration de M par les q -squelettes $M^{[q]} = \cup W^s(y)$, où la réunion est prise sur tous les points critiques d'indice $\leq q$. Le 0-squelette $M^{[0]}$ est un ensemble fini de points, $M^{[q]}$ est un compact et $M^{[n]} = M$.

Proposition. Soit ω une forme différentielle fermée de degré k . Alors il existe une forme différentielle α de degré $k - 1$ telle que $\omega = d\alpha$ au voisinage de $M^{[k-1]}$. De plus, si $\int_{W^s(x)} \omega = 0$ pour tout point critique x d'indice k , alors ω est exacte globalement.

Un énoncé analogue est donné dans [39] pour les variétés triangulées.

Démonstration. On construit une primitive de ω sur un voisinage de $M^{[q]}$ par récurrence croissante sur q .

1) (Début de la récurrence). Au voisinage de $M^{[0]}$, ω est exacte d'après le lemme de Poincaré 2.5.4.

2) Supposons qu'il existe une forme différentielle α de degré $k - 1$ sur M telle que $\omega - d\alpha = 0$ sur un voisinage de $M^{[q-1]}$, avec $q < k$.

Pour $\text{ind } y = q$, les $W^s(y)$ sont des sous-variétés propres de la variété ouverte $M - M^{[q-1]}$. Donc il existe une forme β de degré $k - 1$ à support compact dans $M \setminus M^{[q-1]}$, telle que $\omega - d\alpha = d\beta$ au voisinage des $W^s(y)$ (voir proposition 2.5.6). Autrement dit, $\omega = d(\alpha + \beta)$ au voisinage de $M^{[q]}$. On poursuit ainsi jusqu'à $q = k - 1$ où il se passe quelque chose de spécial.

3) Si $\omega = d\alpha$ au voisinage de $M^{[k-1]}$, alors on peut choisir la primitive de sorte que $\int_{W^s(y)} \alpha = 0$ pour tout point critique d'indice $k - 1$.

En effet, soit α' une primitive quelconque de ω au voisinage de $M^{[k-1]}$. Il existe une forme différentielle β de degré $k - 1$, nulle au voisinage de $M^{[k-2]}$, fermée au voisinage de $M^{[k-1]}$, et dont l'intégrale vérifie :

$$\int_{W^s(y)} \beta = \int_{W^s(y)} \alpha',$$

pour tout point critique y d'indice $k - 1$.

CONSTRUCTION DE β : dans une carte de Morse V_y de (f, X) au voisinage de y , on construit une forme différentielle ne faisant intervenir que les coordonnées de la variété stable,

$$\beta_y = \rho_y(x_1, \dots, x_{k-1}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1},$$

où ρ_y est une fonction qui en restriction à $W^s(y)$ est à support compact dans la carte de la variété stable $W^s(y) \cap V_y$ et qui vérifie

$$\int \rho_y(x_1, \dots, x_{k-1}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} = \int_{W^s(y)} \alpha'.$$

On choisit alors des fonctions cloches λ_y avec $\text{supp } \lambda_y \subset V_y$ et λ_y valant 1 au voisinage de $\text{supp } \rho_y \cap W^s(y)$. On pose finalement :

$$\beta = \sum \lambda_y \beta_y.$$

On vérifie que β est bien fermée au voisinage de $M^{[k-1]}$. La primitive cherchée est $\alpha = \alpha' - \beta$.

4) EXACTITUDE AU VOISINAGE DE $M^{[k]}$. Prenons la primitive α construite en 3). D'après la formule du bord, on a pour tout point critique x d'indice k : $\int_{W^s(x)} d\alpha = 0$. Donc $\omega - d\alpha$ est d'intégrale nulle sur $W^s(x)$; elle vérifie alors les hypothèses de la proposition 2.5.6 qui permettent de procéder comme en 2).

5) La suite de la récurrence ne présente pas de particularités et on peut poursuivre comme dans la deuxième étape. \square

Bien entendu, la condition invoquée dans ce critère n'est pas nécessaire. Le bon critère sera donné par le théorème de De Rham 6.7.5.

6.6.2 Le complexe de Thom-Smale dual

Ici, on utilise explicitement l'orientation de M que nous avons supposée en 6.5; l'orientation de M est aussi utilisée lorsque l'on veut voir le complexe des formes différentielles comme un sous-complexe du complexe des courants. On construit le complexe $C_*(-f)$ engendré par les variétés stables de $-X$, c'est-à-dire par les variétés instables de X . Ce sont des courants dès qu'on en a fixé une orientation. On le fait par la règle suivante :

On convient qu'une base directe tangente à $W^s(x)$ en x , suivie d'une base directe tangente à $W^u(x)$ est une base directe de $T_x M$. Autrement dit, l'orientation de $W^s(x)$ est l'orientation transversale de $W^u(x)$ (voir 2.3.3).

On définit une forme bilinéaire

$$p_f = \langle \cdot, \cdot \rangle : C_{n-k}(-f) \times C_k(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

par $\langle W^u(y), W^s(x) \rangle = 0$ si x et y sont deux points critiques de f d'indice k distincts et $\langle W^u(x), W^s(x) \rangle = +1$. On vérifie immédiatement à l'aide de la formule du bord :

$$\langle \partial W^u(y), W^s(x) \rangle = (-1)^k \langle W^u(y), \partial W^s(x) \rangle.$$

Ici x est un point d'indice k de f et y un point d'indice $k-1$. Le signe est dû au fait que le coefficient $n(x, y)$ pour la fonction f et le coefficient $n(y, x)$ pour la fonction $-f$, qui sont égaux en valeur absolue, ne sont pas calculés avec les mêmes conventions de signe.

Cette forme bilinéaire identifie $C_{n-*}(-f)$ au dual de $C_*(f)$, le bord dans $C_*(-f)$ étant au signe près la transposée du bord dans $C_*(f)$.

Proposition. *La forme bilinéaire p_f induit un isomorphisme de $H_{n-k}(C_*(-f))$ sur le dual de $H_k(C_*(f))$.*

Démonstration. C'est un fait très général pour des complexes de dimension finie en dualité.

D'abord, l'application est bien définie : si $\bar{\sigma} \in C_{n-k}(-f)$ est un cycle, alors pour tout bord $\partial\alpha$ dans $C_k(f)$, on a

$$\langle \bar{\sigma}, \partial\alpha \rangle = \pm \langle \partial\bar{\sigma}, \alpha \rangle = 0.$$

De même si $\bar{\sigma}$ est un bord et σ un cycle, on a $\langle \bar{\sigma}, \sigma \rangle = 0$. Donc $\langle \bar{\sigma}, \sigma \rangle$ ne dépend que des classes d'homologie de $\bar{\sigma}$ et de σ .

Pour la surjectivité, soit ℓ une forme linéaire sur $H_k(C_*(f))$; on peut la voir comme une forme linéaire sur l'espace des k -cycles, nulle sur le sous-espace des bords. On étend ℓ à tout $C_k(f)$, qui est un espace vectoriel de dimension finie. Comme le dual de $C_k(f)$ est $C_{n-k}(-f)$, il existe $\bar{\sigma} \in C_{n-k}(-f)$ tel que $\ell(\cdot) = \langle \bar{\sigma}, \cdot \rangle$. Pour tout $\alpha \in C_{k+1}(f)$ on a : $\langle \bar{\sigma}, \partial\alpha \rangle = 0$, soit $\langle \partial\bar{\sigma}, \alpha \rangle = 0$. Donc $\partial\bar{\sigma} = 0$.

En échangeant les rôles de $C_*(f)$ et de $C_*(-f)$, on voit que p_f induit aussi une surjection $H_k(C_*(f)) \rightarrow \text{dual de } H_{n-k}(C_*(-f))$. Dualelement, p_f induit une injection de $H_{n-k}(C_*(-f))$ dans le dual de $H_k(C_*(f))$. \square

Cette proposition donne une image combinatoire de la dualité de Poincaré. C'est la raison pour laquelle la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a été nommée p_f .

6.6.3 Régularisation des variétés stables ou instables

Proposition. *Soit R_ϵ un opérateur de régularisation de De Rham (au sens 4.3.4). Si ϵ est assez petit, pour toute paire x et x' de points critiques d'indice k , on a :*

$$\begin{aligned} \int_{W^s(x')} R_\epsilon W^u(x) &= 1 \quad \text{si } x = x' \\ &= 0 \quad \text{si } x \neq x'. \end{aligned}$$

Il en est de même, au signe près (changer 1 en $(-1)^{k(n-k)}$), si on échange les rôles des variétés stables et instables.

Démonstration. D'après 4.3.5, $R_\epsilon W^u(x)$ est une forme différentielle de degré k dont le support est dans un voisinage arbitrairement petit de $\overline{W^u(x)}$. Donc, si x' est un point critique d'indice k distinct de x , on a : $\int_{W^s(x')} R_\epsilon W^u(x) = 0$.

D'autre part, d'après la proposition 4.3.6 appliquée à une $(n-k)$ -boule de $W^u(x)$ centrée en x , si ϵ est assez petit on a : $\int_{W^s(x)} R_\epsilon W^u(x) = 1$. \square

6.6.4 Des formes différentielles aux courants de Thom-Smale

Proposition. Soit α une forme différentielle fermée de degré $n - k$. On pose

$$\sigma(\alpha) = (-1)^{k(n-k)} \sum \left(\int_{W^u(x)} \alpha \right) W^s(x),$$

où la somme est étendue à tous les points critiques d'indice k , et soit R un opérateur de régularisation de De Rham. Alors :

- 1) $\partial\sigma(\alpha) = 0$;
- 2) $R\sigma(\alpha)$ est une forme différentielle cohomologue à α ;
- 3) $\sigma(\alpha)$ est un courant homologue au courant régulier α ; en particulier, pour toute forme différentielle fermée ω , on a :

$$\begin{aligned} \int_M \alpha \wedge \omega &= \int_{\sigma(\alpha)} \omega \\ \int_M \omega \wedge \alpha &= \sum \left(\int_{W^s(x)} \omega \right) \left(\int_{W^u(x)} \alpha \right). \end{aligned}$$

□

Démonstration. Prouvons d'abord : $\partial\sigma(\alpha) = 0$. La formule du bord donne

$$\begin{aligned} \partial\sigma(\alpha) &= \pm \sum_{\substack{\text{ind } x=k \\ \text{ind } y=k-1}} n(x, y) \left(\int_{W^u(x)} \alpha \right) W^s(y) \\ &= \pm \sum_y \left(\sum_x n(x, y) \int_{W^u(x)} \alpha \right) W^s(y). \end{aligned}$$

Comme $\sum_x n(x, y) W^u(x) = (-1)^k \partial W^u(y)$ (formule du bord dans le complexe de Thom-Smale dual), il vient :

$$\partial\sigma(\alpha) = \pm \sum_y \left(\int_{\partial W^u(y)} \alpha \right) W^s(y)$$

qui est nul car $\int_{\partial W^u(y)} \alpha = \int_{W^u(y)} d\alpha = 0$, ce qui prouve le 1). Soit R_ϵ un opérateur de régularisation de De Rham. D'après la proposition 6.6.3, pour ϵ assez petit et pour tout point critique d'indice k , on a

$$\int_{W^u(x)} R_\epsilon \sigma = \int_{W^u(x)} \alpha.$$

Le critère d'exactitude (proposition 6.6.1), appliqué aux variétés stables de $-f$, dit que $R_\epsilon \sigma(\alpha) - \alpha$ est une forme exacte. Comme $\sigma(\alpha)$ est un cycle, $R\sigma(\alpha) - R_\epsilon \sigma(\alpha)$ est une forme exacte (proposition 4.3.7) et le 2) est prouvé.

Par ailleurs $R\sigma(\alpha) - \sigma(\alpha)$ est un bord (théorème 4.3.1), donc $\sigma(\alpha)$ est homologue à α comme courant. On rappelle que l'“intégrale” d'une forme fermée sur un bord est nulle ; les formules de l'énoncé en découlent directement. □

6.6.5 Théorème fondamental

Soit M une variété orientée, compacte sans bord de dimension n , soit f une fonction de Morse et X un champ de gradient adapté vérifiant la condition de transversalité (T). Soit R un opérateur de régularisation de De Rham. Alors on a les conclusions suivantes :

1) L'inclusion

$$C_*(f) \hookrightarrow C_*,$$

du complexe de Thom-Smale dans le complexe des courants de De Rham, induit un isomorphisme en homologie.

2) R induit des isomorphismes

$$\begin{aligned} H_k(C_*) &\rightarrow H^{n-k}(\Omega^*) = H^{n-k}(M) \\ \text{et} \quad H_k(C_*(f)) &\rightarrow H^{n-k}(M). \end{aligned}$$

L'isomorphisme inverse de ce dernier est induit par

$$\alpha \mapsto (-1)^{k(n-k)} \sum \left(\int_{W^u(x)} \alpha \right) W^s(x),$$

où la somme est prise sur tous les points critiques d'indice k de f .

Démonstration.

1) INJECTIVITÉ. Soit $\sigma \in C_k(f)$ un cycle qui n'est pas dans $\partial C_{k+1}(f)$. D'après la proposition 6.6.2, il existe un cycle $\bar{\sigma} \in C_{n-k}(-f)$ tel que $\langle \bar{\sigma}, \sigma \rangle = 1$. Soit R_ϵ un opérateur de régularisation ayant la propriété de la proposition 6.6.3 ; $R_\epsilon(\bar{\sigma})$ est une forme différentielle $\bar{\omega}$ de degré k . On a :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum n_x W^s(x) \\ \bar{\sigma} &= \sum \bar{n}_{x'} W^u(x') \\ \int_\sigma \bar{\omega} &= \sum \bar{n}_{x'} n_x \int_{W^s(x)} R_\epsilon W^u(x') \\ &= \sum \bar{n}_x n_x = \langle \bar{\sigma}, \sigma \rangle = 1. \end{aligned}$$

D'après la formule de Stokes, l'intégrale d'une forme fermée sur un bord est nulle. Comme $\int_\sigma \bar{\omega} = 1$, σ n'est pas le bord d'un courant, ce qui établit l'injectivité cherchée.

SURJECTIVITÉ. On part d'un cycle dans C_k et on veut lui trouver un cycle homologue dans $C_k(f)$. On peut supposer par régularisation que le cycle initial est régulier, c'est-à-dire qu'il est donné par une forme fermée α de degré $n - k$. On pose

$$\sigma = (-1)^{k(n-k)} \sum \left(\int_{W^u(x)} \alpha \right) W^s(x).$$

D'après la proposition 6.6.4, ce courant est un cycle de $C_k(f)$ qui est homologue au courant régulier α , ce qui établit la surjectivité cherchée.

2) Le premier isomorphisme a été prouvé dans la proposition 4.3.7. Le deuxième résulte alors du 1) ci-dessus. La partie “surjectivité” est fondée précisément sur le fait que

$$\alpha \mapsto (-1)^{k(n-k)} \sum \left(\int_{W^u(x)} \alpha \right) W^s(x)$$

est une formule pour un inverse à droite de la régularisation. \square

Alternative.² On peut établir directement que *tout opérateur de régularisation de De Rham* R induit un isomorphisme $H_k(C_*(f)) \rightarrow H^{n-k}(M)$, sans invoquer C_* ni la dualité combinatoire (proposition 6.6.2).

La surjectivité est donnée par le 2) de la proposition 6.6.4. L’injectivité peut se démontrer de façon analogue. Puisque toutes les régularisations induisent le même morphisme (proposition 4.3.7), on peut prendre $R = R_\epsilon$ avec ϵ assez petit pour que 6.6.3 soit vrai. On vérifie alors que pour $\sigma \in C_k(f)$ on a $\sigma = (-1)^{k(n-k)} \sum \left(\int_{W^u(x)} R_\epsilon \sigma \right) W^s(x)$. On vérifie ensuite que si $R_\epsilon \sigma = d\beta$, $\beta \in \Omega^{n-k-1}$, on a $\sigma = \partial\tau$, $\tau \in C_{k+1}(f)$, avec

$$\tau = (-1)^{k(n-k+1)+1} \sum \left(\int_{W^u(y)} \beta \right) W^s(y),$$

où la somme est prise sur l’ensemble des points critiques d’indice $k+1$.

6.7 Éléments de topologie algébrique des variétés

Dans ce paragraphe M est une variété compacte sans bord orientable de dimension n . Après les résultats établis dans les §§ 6.5 et 6.6, on est en mesure d’établir les théorèmes de base concernant la cohomologie de M .

Il faut insister ici sur un point important. Chez les fondateurs de la topologie algébrique, en particulier chez Poincaré mais encore chez Morse, la cohomologie dont il était question n’était pas la cohomologie des formes différentielles mais une cohomologie *combinatoire*, associée à une triangulation. La cohomologie des formes différentielles a été introduite par De Rham, qui a montré qu’elle est isomorphe à la cohomologie combinatoire (à coefficients réels). Donc les anciens résultats de la cohomologie combinatoire s’appliquent à la cohomologie des formes différentielles. C’est ceux-là que nous établissons directement, tout en gardant les noms de baptême.

6.7.1 Finitude de la cohomologie de De Rham

Théorème. $H^*(M)$ est de dimension finie.

²Cette remarque m’a été proposée par Lê T.T.

Démonstration. On munit M d'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ et d'un champ de gradient adapté dont les variétés stables et instables se coupent transversalement. Le complexe de Thom-Smale associé est de dimension finie, donc son homologie l'est aussi. L'isomorphisme du théorème fondamental 6.6.5 donne la conclusion. \square

Commentaires. Le théorème de finitude vaut aussi pour les variétés non orientables. Si nous ne l'obtenons ici qu'avec l'hypothèse d'orientabilité, c'est que nous n'avons développé la théorie des courants que dans ce cadre.

On peut d'ailleurs, à titre d'exercice, essayer de déduire directement la finitude dans le cas non-orientable à partir du cas orientable, en utilisant que toute variété non-orientable est le quotient d'une variété orientable, dite *revêtement des orientations* par une action ad hoc du groupe à deux éléments.

6.7.2 Nombre de Betti

On appelle k -ème nombre de Betti l'entier

$$b_k = \dim H^k(M).$$

D'après 6.6.5, $b_k = \dim H_{n-k}(C_*(f))$, c'est-à-dire, avec les notations du §6.5, $b_k = \beta_{n-k}$.

6.7.3 La dualité de Poincaré

On choisit une orientation de M (variété compacte sans bord). L'intégrale du produit extérieur définit une forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \Omega^{n-k}(M) \times \Omega^k(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, \omega) &\longmapsto \int_M \alpha \wedge \omega \end{aligned}$$

que l'on restreint aux formes fermées $Z^{n-k}(M) \times Z^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$. Si α est fermée et ω est exacte, ou vice versa, $\alpha \wedge \omega$ est exacte et, d'après la formule de Stokes, $\int_M \alpha \wedge \omega = 0$. Donc la forme bilinéaire passe au quotient en

$$P : H^{n-k}(M) \times H^k(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Théorème. La forme bilinéaire P est non dégénérée. Elle induit un isomorphisme entre $H^{n-k}(M)$ et le dual de $H^k(M)$. En particulier les nombres de Betti symétriques sont égaux : $b_k = b_{n-k}$.

Commentaires. 1) Pour ce théorème, l'hypothèse que M soit orientable est nécessaire. Si M est connexe, $b_0 = 1$; on a vu que si M est orientable b_n est bien égal à 1, comme le prescrit la dualité de Poincaré ; en revanche, on peut prouver que si M n'est pas orientable, $b_n = 0$.

2) Une partie de l'énoncé peut se traduire comme suit : si α est une forme fermée de degré $n - k$ et si $\int \alpha \wedge \omega = 0$ pour toute forme fermée de degré k , alors α est une forme exacte.

Démonstration. On a établi 6.6.4 que pour toute forme fermée α de degré $n - k$ et toute forme fermée ω de degré k on a :

$$\int_M \omega \wedge \alpha = \sum \left(\int_{W^s(x)} \omega \right) \left(\int_{W^u(x)} \alpha \right),$$

où la somme est étendue à tous les points critiques d'indice k . Cette formule peut se relire, avec les notations de 6.6.2 :

$$P(\alpha, \omega) = \left\langle \sum \left(\int_{W^s(x)} \omega \right) W^u(x), \sum \left(\int_{W^u(x)} \alpha \right) W^s(x) \right\rangle .$$

Autrement dit, via l'isomorphisme $H^{n-k}(M) \rightarrow H_k(C_*(f))$ donné par $\alpha \mapsto (-1)^{k(n-k)} \sum \left(\int_{W^u(x)} \alpha \right) W^s(x)$ (et de même en degré complémentaire), la forme bilinéaire P est transportée sur la forme bilinéaire p_f , qui est non dégénérée. \square

6.7.4 Inégalités de Morse

On rappelle que c_k est le nombre de points critiques d'indice k de la fonction de Morse f . On connaissait déjà les inégalités de Morse dans le complexe de Thom-Smale (6.5.8). En tenant compte des derniers résultats sur les nombres de Betti :

$$b_k = b_{n-k} = \beta_k ,$$

on déduit

les inégalités de Morse pour la cohomologie des formes différentielles :

- 1) $c_k - c_{k-1} + c_{k-2} \dots \geq b_k - b_{k-1} + b_{k-2} \dots$
- 2) $\sum_0^n (-1)^k c_k = \sum_0^n (-1)^k b_k$.

6.7.5 Théorème de De Rham

Théorème. 1) La forme bilinéaire

$$H^k(\Omega^*) \times H_k(C_*) \rightarrow \mathbb{R} ,$$

induite par l'intégration des formes sur les courants (ou encore par l'évaluation des courants sur les formes différentielles) est non dégénérée.

2) Une forme différentielle fermée ω de degré k est exacte si et seulement si, pour tout cycle σ de $C_k(f)$, on a :

$$\int_{\sigma} \omega = 0 .$$

3) *L'image de d est fermée dans Ω^k .*

Remarques.

- 1) Dans le 1), on peut remplacer $H_k(C_*)$ par $H_k(C_*(f))$, qui lui est isomorphe.
- 2) On rappelle qu'une forme différentielle est fermée si et seulement si son intégrale est nulle sur tous les bords de courants (de dimension $k + 1$); donc un corollaire du 2) est qu'une forme différentielle (non supposée fermée) est exacte si et seulement si son intégrale est nulle sur tous les cycles-courants de dimension k . Bien sûr si on se limite à faire le test avec des cycles du complexe de Thom-Smale on doit remettre l'hypothèse que la forme différentielle considérée est fermée.
- 3) Classiquement pour les analystes la fermeture de l'image de d s'obtient comme corollaire de la théorie des formes harmoniques (voir [Warner]). Cette dernière coûte un peu de travail en EDP concernant les opérateurs elliptiques. Ici on en fait l'économie; en revanche, on a invoqué la transversalité qui est un autre outil puissant.

Démonstration.

- 1) On sait (4.3.7) que l'inclusion du sous-complexe des courants réguliers induit un isomorphisme $H^{n-k}(\Omega^*) \rightarrow H_k(C_*)$. Cet isomorphisme transporte la dualité de Poincaré sur la forme bilinéaire indiquée dans l'énoncé (au signe près). Cette dernière est donc non dégénérée.
- 2) La condition est nécessaire d'après la formule de Stokes. La réciproque est une réécriture du fait que $H^k(\Omega^*)$ s'injecte dans le dual de $H_k(C_*(f))$.
- 3) Soit $\sigma_1, \dots, \sigma_{b_k}$ des cycles dont les classes d'homologie forment une base de $H_k(C_*(f))$; l'image de d dans l'espace Z^k des cocycles de degré k est l'intersection des b_k hyperplans d'équations

$$\int_{\sigma_i} \omega = 0.$$

Comme Z^k , ainsi que tout noyau qui se respecte, est fermé dans Ω^k , on a la fermeture de l'image de d dans Ω^k . □

6.7.6 Formule de Künneth ou formule du produit

Soit M_1, M_2 deux variétés orientables compactes sans bord. La formule de Künneth calcule la cohomologie du produit :

$$H^*(M_1 \times M_2) = H^*(M_1) \otimes H^*(M_2),$$

c'est-à-dire :

$$H^k(M_1 \times M_2) = \sum_{p+q=k} H^p(M_1) \otimes H^q(M_2).$$

On propose cette formule comme exercice final, à partir de l'observation suivante : si $f_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de Morse, chacune équipée d'un champ de gradient adapté, X_1 et X_2 , alors

$$f = f_1 + f_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

est une fonction de Morse et admet $X_1 + X_2$ pour champ de gradient adapté (via l'isomorphisme des espaces tangents $T_{(x,y)}(M_1 \times M_2) = T_x M_1 \oplus T_y M_2$). On calculera son complexe de Thom-Smale.

Appendice

Adhérence générique des variétés stables

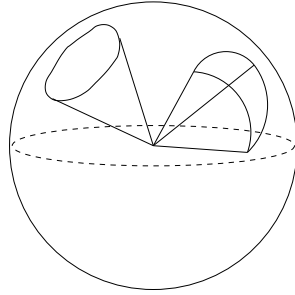
On considère une variété compacte M et une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ avec un gradient adapté X (voir §6.1). On se propose dans cet appendice de montrer *en même temps* qu'il existe une approximation de X satisfaisant à la condition de transversalité (T) des variétés stables et instables des points critiques de f et de décrire l'adhérence de ces variétés. C'est un travail un peu technique mais dont l'idée est simple à partir du moment où l'on devine quel type de singularités doit se présenter dans l'adhérence. Ainsi tout repose sur la définition A.1, où l'on dégage un modèle de singularité. Son interprétation en termes de courants est donnée en A.2. Après certains arguments de transversalité, on prouve que ce modèle de singularité est bien celui qui se présente dans $\overline{W^s(x)}$ sous l'hypothèse (T) .

A.1 Sous-variété à singularité conique

Soit N une variété de dimension p . On définit la notion de sous-variété de dimension k à singularité conique (en abrégé : *svsc*). On le fait par récurrence sur k . Si $k = 0$, il s'agit d'un ensemble discret de points.

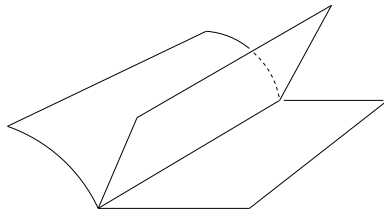
Un ensemble stratifié $\Sigma = (\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_k)$, où $\Sigma_k \subset \dots \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_0 \subset N$, est une *svsc* de dimension k si les conditions suivantes sont remplies :

- (1) Pour tout $i \leq k$, la strate $\Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}$ est une sous-variété de dimension $k - i$, propre dans $N \setminus \Sigma_{i+1}$; en particulier, $\Sigma_0 \setminus \Sigma_1$ est une sous-variété de dimension k . (On autorise $\Sigma_{i+1} = \emptyset$ ou Σ_i).
- (2) Pour tout $x \in \Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}$, il existe un voisinage V de x dans N , difféomorphe au produit de boules $D^{k-i} \times D^{p-k+i}$, et une *svsc* $T = (T_0, \dots, T_i)$ de dimension i dans D^{p-k+i} tels que $V \cap (\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_k) = D^{k-i} \times (T_0, \dots, T_i, \emptyset, \dots, \emptyset)$.
- (3) Si $x \in \Sigma_k$, il existe un plongement C^1 , $\phi : (D^p, 0) \rightarrow (N, x)$, tel que :
 - $\Sigma' = \phi^{-1}(\Sigma) \cap S^{p-1}$ soit une *svsc* de dimension $k - 1$ dans la sphère de dimension $p - 1$,
 - $(\phi^{-1}(\Sigma_0), \dots, \phi^{-1}(\Sigma_k)) = (c\Sigma'_0, \dots, c\Sigma'_{k-1}, 0)$, où $c\Sigma'_i$ désigne le cône sur Σ'_i , c'est-à-dire la réunion des rayons issus de l'origine et rencontrant Σ'_i .



On dira que Σ_1 est le *lieu singulier* de Σ . Cela rappelle seulement qu'en dehors de ce lieu, Σ_0 est une sous-variété; mais cela n'implique pas que les points du lieu singulier soient effectivement des singularités.

Exemples. 1) Une sous-variété à bord est une *susc*, dont le lieu singulier est le bord.
2) Au voisinage d'un point de $\Sigma_1 \searrow \Sigma_2$, Σ_1 apparaît comme le bord commun de plusieurs variétés à bord.



A.2 Diverses finitudes

Proposition. *Les strates d'une susc compacte sont de volume fini.*

Démonstration. On démontre cette propriété par récurrence sur la dimension. En fait, elle ne dépend pas de la métrique riemannienne choisie sur la variété ambiante. Enfin il suffit de la voir au voisinage de chaque point de Σ .

Dans une carte $D^{k-i} \times (T_0, \dots, T_i)$ où T est une *susc* de dimension i dans D^{p-k+i} , on a avec la métrique euclidienne :

$$\text{vol}(D^{k-i} \times (T_0 \searrow T_1)) = \text{vol}(D^{k-i}) \cdot \text{vol}(T_0 \searrow T_1).$$

Par hypothèse de récurrence, $\text{vol}(T_0 \searrow T_1) < \infty$ et donc le volume du produit est fini.

Dans une carte au voisinage d'un point de Σ_k , $\Sigma = (c\Sigma'_0, \dots, c\Sigma'_{k-1}, 0)$, où Σ' est une *susc* de S^{p-1} , on a avec la métrique euclidienne :

$$\text{vol}(c\Sigma'_0 \searrow c\Sigma'_1) = \int_0^1 \text{vol}(t(\Sigma'_0 \searrow \Sigma'_1)) dt = \left(\int_0^1 t^{k-1} dt \right) \cdot \text{vol}(\Sigma'_0 \searrow \Sigma'_1).$$

De nouveau par hypothèse de récurrence, ce volume est fini. \square

Corollaire. *Si $\Sigma_0 \setminus \Sigma_1$ est orienté, cette sous-variété est un courant.*

Preuve. En effet si ω est une forme différentielle de degré k , on a :

$$\left| \int_{\Sigma_0 \setminus \Sigma_1} \omega \right| \leq |\omega| \operatorname{vol}(\Sigma_0 \setminus \Sigma_1),$$

parce que cette inégalité est vraie localement en coordonnées. \square

A.3 Estimations au voisinage du lieu singulier

On fixe une fois pour toutes un recouvrement fini \mathcal{R} par des cartes de la *svsc* Σ , chacune étant munie de la métrique euclidienne. On fabrique le ϵ -voisinage de Σ_1 comme la réunion suivante : dans chaque carte $D^{k-i} \times D^{p-k+i}$ de l'atlas \mathcal{R} centrée en un point a d'une strate de dimension $k-i \leq k-1$, on prend le produit de boules $D^{k-i} \times D^{p-k+i}(\epsilon)$ dont le second facteur est de rayon ϵ . On fabrique de même le ϵ -voisinage de Σ_2 . Pour $\epsilon \rightarrow 0$, ce système de voisinages est équivalent au système des ϵ -voisinages de n'importe quelle métrique. Les inégalités suivantes découlent d'un calcul élémentaire d'intégrales :

1) *Soit V un ϵ -voisinage de Σ_1 ; alors $\operatorname{vol}((\Sigma_0 \setminus \Sigma_1) \cap V) = \operatorname{const} \cdot \epsilon$ et si ω est une forme différentielle de degré k , on a :*

$$\int_{(\Sigma_0 \setminus \Sigma_1) \cap V} \omega = \operatorname{const} \cdot \epsilon |\omega|.$$

2) *Soit V' un ϵ -voisinage de Σ_2 ; alors $\operatorname{vol}((\Sigma_0 \setminus \Sigma_1) \cap V') = \operatorname{const} \cdot \epsilon^2$ et si ω est une forme différentielle de degré k , on a :*

$$\int_{(\Sigma_0 \setminus \Sigma_1) \cap V'} \omega = \operatorname{const} \cdot \epsilon^2 |\omega|.$$

A.4 Transversalité à une sous-variété à singularité conique

Pour simplifier, on n'envisage que le cas où tous les objets sont compacts.

*Une sous-variété S de codimension q dans N^p est transversale à une *svsc* $\Sigma = (\Sigma_0, \dots, \Sigma_k)$ de dimension k , si S est transversale à chaque strate de $\Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}$ de Σ . En particulier si $i > k - q$, $S \cap S = \emptyset$. Dans cette situation on a le résultat suivant :*

Proposition

- 1) $(S \cap \Sigma_0, \dots, S \cap \Sigma_{k-q})$ est une *svsc* de dimension $k - q$.
- 2) *Supposons que S ait un voisinage tubulaire produit, $S \times D^q$ avec $S = S \times \{0\}$. Alors il existe un germe de difféomorphisme H de $S \times D^q$ le long de $S \times \{0\}$ avec les propriétés suivantes :*

- a) $H|_{S \times \{0\}} = \text{Id}$,
- b) $\pi \circ H = \pi$, où π est la projection $S \times D^q \rightarrow D^q$,
- c) comme espace stratifié, $H(\Sigma)$ coïncide avec $(\Sigma \cap S^k \times \{0\}) \times D^q$ au voisinage de $S \times \{0\}$.

Démonstration. 1) La question est d'abord locale. Regardons-la par exemple au voisinage d'un point $x \in S \cap \Sigma_{k-q}$. D'après la condition (2) de A.1, il existe une carte au voisinage de x dans laquelle $\Sigma = D^q \times (T_0, \dots, T_{k-q})$, où $T = (T_0, \dots, T_{k-q})$ est une *svsc* dans D^{p-q} . Dans cette carte Σ est transversale à $D^q \times \{0\}$ en $x = (0, 0)$. Donc au voisinage de x la seconde projection p_2 induit un difféomorphisme ϕ de S sur D^{p-q} qui envoie $S \cap \Sigma_i$ sur $\{0\} \times T_i$. C'est donc une carte de *svsc* pour $S \cap \Sigma$ au voisinage de x .

La condition de propreté des strates est facile à vérifier : Σ_i est fermé dans $N - \Sigma_{i+1}$ et donc $\Sigma_i \cap S$ est fermé dans $S - \Sigma_{i+1} \cap S$.

2) Regardons d'abord le cas où S est de codimension 1 ; dans ce cas π est une fonction numérique sans point critique telle que $S = \pi^{-1}(0)$. Appelons t la variable au but de π . Dans chaque carte de Σ au voisinage de S on trouve un champ de vecteurs X ayant les deux propriétés suivantes :

- (a) X est tangent à chaque strate de Σ ,
- (b) $\pi_*(X) = \frac{\partial}{\partial t}$.

Au voisinage d'un point de $N - \Sigma$, la première condition devient vide. On observe que ces conditions autorisent des recollements par partition de l'unité. On a donc un champ de vecteurs X , défini au voisinage de S et vérifiant (a) et (b). Soit $\Phi(x, t)$ son flot, défini pour $x \in S$, $|t| < \epsilon$. Parce que X n'est nulle part tangent à S , Φ est un germe de difféomorphisme le long de $S \times \{0\}$; c'est l'inverse du difféomorphisme cherché.

Pour obtenir le cas général, on procède par récurrence sur la codimension de S . On prend un voisinage de 0 dans D^q de la forme $D^{q-1} \times [-a, +a]$. On applique le cas précédent à Σ et à l'hypersurface $S \times D^{q-1} \times \{0\}$ qui lui est transversale. On en déduit une “projection stratifiée” $p' : N \rightarrow S \times D^{q-1}$, bien définie au voisinage de $S \times \{0\}$; “stratifié” veut dire que

$$p'(\Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}) = (\Sigma_i \setminus \Sigma_{i+1}) \cap (S \times D^{q-1} \times \{0\})$$

et

$$p'(N - \Sigma_0) = (S \times D^{q-1} \times \{0\}) - \Sigma_0 \cap (S \times D^{q-1} \times \{0\});$$

par “projection” veut dire une application C^1 telle que $p'(x) = x$ si $x \in S \times D^{q-1} \times \{0\}$.

D'autre part, l'hypothèse de récurrence donne une projection stratifiée $p'' : S \times D^{q-1} \rightarrow S$ bien définie au voisinage de $S \times \{0\}$. La composée $p = p'' \circ p'$ est une projection stratifiée $N \rightarrow S$ définie au voisinage de $S \times \{0\}$. Le couple (p, π) est de rang maximum en tout point de $S \times \{0\}$. C'est donc un germe de difféomorphisme de $S \times D^q$ au voisinage de $S \times \{0\}$. C'est le difféomorphisme cherché. \square

A.5 La transversalité est générique

Proposition. *Si S est une sous-variété compacte et $\Sigma = (\Sigma_0 \dots, \Sigma_k)$ une svsc compacte de la variété compacte N , l'ensemble des plongements $\phi : S \rightarrow N$ tels que $\phi(S)$ soit transversal à Σ est un ouvert dense.*

Démonstration. On suit la même démarche que pour le théorème de transversalité à une sous-variété. On observe que si $G : S \times A \rightarrow N$ est une famille, paramétrée par A , transversale à Σ c'est-à-dire transversale à chaque strate, alors $G^{-1}(\Sigma)$ est une svsc; ce résultat est analogue à A.4 et on peut d'ailleurs l'en déduire formellement en factorisant G par un plongement dans $N \times \mathbb{R}^\ell$ (ℓ grand). D'après Sard appliqué à chaque strate, presque tout $a \in A$ est une valeur régulière pour la restriction de la seconde projection p_2 à chaque strate de $G^{-1}(\Sigma)$ et, pour un tel a , $G_a : S \rightarrow N$ est transversale à Σ .

Une façon de s'assurer que G soit transversale à Σ est de demander la transversalité à chaque point y de N . On le fait facilement au voisinage de chaque point de S en utilisant pour A un voisinage de y . Ceci donne le théorème de transversalité local et on passe du local au global comme dans tous les théorèmes de transversalité. \square

A.6 Un lemme sur le modèle de Morse (1ère partie)

On considère le modèle de Morse \mathcal{M} d'indice i (voir 6.4) avec sa fonction canonique

$$f = -x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Le champ de gradient X est celui de la métrique euclidienne. Il y a deux paramètres métriques ϵ et η . On prend pour simplifier $\epsilon = 1$; quant à η , il mesure l'épaisseur du modèle autour des variétés stables et instables. On rappelle que son niveau inférieur V_- est canoniquement difféomorphe à $S^{i-1} \times D^{n-i}$, que son niveau supérieur V_+ est canoniquement difféomorphe à $D^i \times S^{n-i-1}$. On peut utiliser des "coordonnées polaires" pour paramétrer V_+ et $V_- : u \in S^{i-1}$, $v \in S^{n-i-1}$, $r \in [0, 1]$. On note $S_- = S^{i-1} \times \{0\}$; c'est la trace dans V_- de la variété stable. De même on note $S_+ = \{0\} \times S^{n-i-1}$; c'est la trace dans V_+ de la variété instable. En dehors des variétés stables et instables, toute ligne de gradient va de $V_- \setminus S_-$ à $V_+ \setminus S_+$, définissant un difféomorphisme $\Gamma : V_+ \setminus S_+ \rightarrow V_- \setminus S_-$, qui en coordonnées polaires est l'*identité*.

Lemme. Soit Σ une *svsc* contenue dans V_+ , transversale à S_+ . On note $K = \Sigma \cap S_+$ que l'on suppose non vide. Alors l'adhérence de $\Gamma(\Sigma - K)$ dans V_- est une *svsc* contenant S_- comme strate.

Preuve. Par A.4-1), K est une *svsc*. Supposons d'abord que Σ coïncide avec $D^i \times K$ comme sous-produit de $V_+ = D^i \times S^{n-i-1}$. Dans ce cas,

$$\Gamma(\Sigma - K) = \{u \in S^{i-1}, v \in K \subset S^{n-i-1}, 0 < r \leq 1\}.$$

Son adhérence dans $S^{i-1} \times D^{n-i}$ est alors $S^{i-1} \times cK$, où cK désigne le cône sur K . La conclusion du lemme est vérifiée dans ce cas.

Étudions le cas général; on le ramène au cas précédent par difféomorphisme. Tout ce qui importe se situe près des variétés stables et instables; donc, d'après A.4-2), quitte à diminuer le paramètre η , il existe un difféomorphisme C^1 , $H : D^i \times S^{n-i-1} \rightarrow D^i \times S^{n-i-1}$, avec les propriétés suivantes :

a) en coordonnées polaires, $H(u, v, r) = (u, \phi(u, v, r), r)$,

b) $\phi(u, v, 0) = v$,

c) $H(\Sigma) = D^i \times K$.

Comme Γ est l' "identité", $\Gamma(\Sigma - K) = H^{-1}(S^{i-1} \times K \times]0, 1])$. On aura donc la conclusion si on prouve que $H|_{S^{i-1} \times S^{n-i-1} \times]0, 1]}$ s'étend en un C^1 -difféomorphisme \tilde{H} de $S^{i-1} \times D^{n-i}$, avec $\tilde{H}|_{S^{i-1} \times \{0\}} = \text{Id}$.

Un développement limité en $r = 0$ donne

$$\tilde{H} = \text{Id} + o(r),$$

ce qui prouve que \tilde{H} est dérivable en tout point. Pour prouver que \tilde{H} est C^1 , on introduit les coordonnées cartésiennes (x_j) , $j \in \{i+1, \dots, n\}$ de D^{n-i} et on note X_j les coordonnées dans D^{n-i} du point image. On a

$$X_j = x_j + r g_j(u, v, r),$$

où g_j est une fonction C^1 et $g_j(u, v, 0) = 0$. Il s'agit de voir que $\frac{\partial(X_j - x_j)}{\partial x_k}$ tend vers 0 (au sens C^0) pour $r \rightarrow 0$. Il vient :

$$\frac{\partial(X_j - x_j)}{\partial x_k} = \frac{\partial r}{\partial x_k} g_j + r \frac{\partial g_j}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_k} + r \frac{\partial g_j}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x_k}.$$

Par hypothèse, $g_j = o(r)$ et $\frac{\partial g_j}{\partial v} = o(1)$. D'autre part, $\frac{\partial r}{\partial x_k} = o(1)$ et $\frac{\partial v}{\partial x_k} = o\left(\frac{1}{r}\right)$. Finalement, la somme des trois termes tend vers 0. □

A.7 Un lemme sur le modèle de Morse (2-ème partie)

On note $C(\Sigma)$ la fermeture dans \mathcal{M} de l'ensemble des lignes de gradient dont l'extrémité est dans Σ . Alors $C(\Sigma)$ est une *svsc* contenant la variété stable comme strate.

Preuve. Si $\Sigma = D^i \times K$, pour $u \in S^{i-1}$, $v \in K$, l'intersection de $C(\Sigma)$ avec le plan $P(u, v)$ engendré par u et v dans \mathbb{R}^n est formé de $P^+(u, v)$, à savoir le demi-plan des vecteurs dont le produit scalaire avec v est ≥ 0 . On voit alors qu'au voisinage de l'origine de \mathbb{R}^n on a $C(\Sigma) = D^i \times cK$.

Sinon, on considère comme en A.6 le difféomorphisme H qui redresse Σ : il se prolonge en un homéomorphisme \tilde{H} de \mathcal{M} par la règle suivante :

- \tilde{H} préserve le flot de gradient,
- $\tilde{H} = \text{Id}$ sur la variété stable et la variété instable.

Il s'agit de voir que \tilde{H} est C^1 , le seul point nouveau étant l'origine. Or \tilde{H} envoie en eux-mêmes les disques $\{\lambda u\} \times D^{n-i}$, $\lambda > 0$, et le difféomorphisme est donné en coordonnées polaires par $(v, r) \mapsto (\phi(u, v, \lambda r), r)$. Le même calcul qu'en A.6 dit que ce difféomorphisme tend vers l'identité en topologie C^1 pour $\lambda \rightarrow 0$. □

Remarque. Même si H est C^∞ , \tilde{H} ne peut pas être mieux que C^1 en général. C'est la raison pour laquelle les cartes des *svsc* sont seulement C^1 .

A.8 Proposition

Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur une variété compacte sans bord et X un champ de gradient adapté.

- 1) Par une petite modification C^1 , à support disjoint des points critiques, on peut obtenir la transversalité (T) des variétés stables et instables.
- 2) Sous l'hypothèse (T), pour tout point critique x d'indice k , $\overline{W^s(x)}$ est une *svsc* de dimension k dont le lieu singulier est une réunion de variétés stables de certains points critiques d'indice strictement inférieur.

Démonstration. Les deux parties se prouvent en même temps. Pour simplifier un peu, on suppose que les valeurs critiques sont à des niveaux distincts. On choisit des valeurs régulières

$a_0 = +\infty > a_1 > \dots > a_m = -\infty$ telles que $f^{-1}([a_{j+1}, a_j])$ contienne un seul point critique. On démontre la proposition dans $M_j = f^{-1}([a_j, +\infty])$ par récurrence sur j .

Pour $j = 1$, M_j contient seulement un maximum et coïncide avec sa variété stable. Il n'y a rien à prouver. Supposons la proposition démontrée pour M_j et établissons-la pour M_{j+1} . Notons x le point critique dans $M_j - M_{j+1}$; soit i son indice. La variété instable de x intersecte $f^{-1}(a_j)$ suivant une sphère S_+ de dimension $n - i - 1$. Soit y_1, \dots, y_r les points critiques dans M_j , $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ la trace dans $f^{-1}(a_j)$ de $\overline{W^s(y_1)}, \dots, \overline{W^s(y_r)}$; ce sont des *svsc* et, si Σ_k rencontre $\Sigma_{k'}$, l'une est incluse dans l'autre, selon l'ordre des indices des points critiques correspondants.

Dire que la condition (T) est satisfaite dans M_{j+1} équivaut à dire que S_+ est transversale à $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$. D'après A.5, il existe une sphère S'_+ , C^1 -voisine de S_+ , qui a cette propriété. On voit alors (exercice) qu'il existe un champ de gradient X' coïncidant avec X au voisinage de M_j et de x tel que la variété instable de x pour ce champ intersecte le niveau $f^{-1}(a_j)$ suivant S'_+ .

La transversalité étant réalisée, il reste à voir que $C(\Sigma_k)$ est une *svsc*, où $C(\Sigma_k)$ est l'adhérence dans $f^{-1}([a_{j+1}, a_j])$ de la réunion des lignes de gradient aboutissant dans Σ_k . Or il existe un modèle de Morse \mathcal{M} contenant les variétés stables et instables de x dans $f^{-1}([a_{j+1}, a_j])$. Dans \mathcal{M} , $C(\Sigma_k)$ est une *svsc* d'après A.7 et, hors de \mathcal{M} , la figure est un produit par $[0, 1]$, puisque dans $f^{-1}([a_{j+1}, a_j]) - \mathcal{M}$ toute ligne de gradient va de $f^{-1}(a_{j+1})$ à $f^{-1}(a_j)$. De plus, si Σ_k rencontre S_+ , $C(\Sigma_k)$ contient la variété stable comme strate. \square

Bibliographie

- [1] R. Abraham, J. Robbin, *Transversal Mappings and Flows*, Benjamin, 1967.
- [2] V. Arnold, *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, MIR Trad. française 1974.
- [3] A. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, GTM, Springer, 1983.
- [4] R. Bott, *Lectures on Morse theory, old and new*, Bull. Amer. Math. Soc. 3 (1980), 907-950.
- [5] R. Bott, *Morse theory indomitable*, Pub. Math. IHES 68 (1988), 99-114.
- [6] R. Bott, L. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, GTM Springer, 1982. *Differential forms in Algebraic Topology*, GTM, Springer 1982.
- [7] T. Bröcker, T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, GTM Springer, 1985.
- [8] S. Donaldson, *An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds*, J. Diff. Geom. 18 (1983), 269-316.
- [9] M. Freedman, Feng Luo, *Selected Applications of Geometry to Low-Dimensional Topology*, Univ. Lecture Series, AMS, 1989.
- [10] É. Ghys, *L'invariant de Godbillon-Vey*, Sémin. Bourbaki, Astérisque 177-178 (1989), 155-181.
- [11] C. Godbillon, *Géométrie Différentielle et Mécanique analytique*, Hermann, Paris 1969.
- [12] C. Godbillon, *Éléments de topologie Algébrique*, Hermann, Paris 1971.
- [13] C. Godbillon, *Feuilletages- Etudes géométriques*, Progress in Math. 98, Birkhäuser, 1991.
- [14] M. Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin, Inc. 1967.
- [15] M. Gromov, *Partial Differential Relations*, Springer, 1986.
- [16] V. Guillemin, S. Sternberg, *Geometric Asymptotics*, Math. Surveys 14, Amer. Math. Soc., 1977.
- [17] A. Hatcher
- [18] M. Hirsch, *Differential Topology*, GTM Springer, 1976.
- [19] J. Hocking, G. Young, *Topology*, Dover Publications, 1988.
- [20] R. Kirby, L. Siebenmann, *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings and Triangulations*, Annals of math. Studies 88, Princeton Univ. Press, 1977.
- [21] E. Lima, *Commuting vector fields on S^2* , Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 138-141.
- [22] B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions*, Oxford Univ. Press, 1966.

- [23] J. Martinet, *Singularities of smooth functions and maps*, London Math. Soc. Lect. Notes Series 58, Cambridge Univ. Press, 1982.
- [24] W. Massey, *Algebraic Topology, an Introduction*, Harcourt, Brace & World, Inc., 1967.
- [25] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. 64 (1956), 399-405.
- [26] J. Milnor, *Morse Theory*, Ann. of Math. Studies 51, Princeton Univ. Press, 1963.
- [27] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, first ed. : Univ. Press of Virginia, Charlottesville, 1964, revised ed. : Princeton Landmarks in Math., Princeton Univ. Press, 1997.
- [28] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton Univ. Press, 1965.
- [29] E. Moise, *Geometric Topology in Dimension 2 and 3*, GTM Springer, 1977.
- [30] A.P. Morse, *The behaviour of a function on its critical set*, Annals of Math. 40 (1939), 62-70.
- [31] M. Morse - S. Cairns, *Critical Point Theory in Global Analysis and Differential Topology*, Academic Press, 1969.
- [32] J. Moser, *On the volume elements on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. 120 (1965), 286-294.
- [33] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Adam Hilger, 1990.
- [34] H. Poincaré, *Théorie des groupes fuchsien*s, Acta Mathematica I(1882), 1-62.
- [35] P. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, Reg. Conf. Series in Math. 65, Amer. Math. Soc. 1986.
- [36] G. de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, 1960.
- [37] A. Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 883-890.
- [38] J.T. Schwartz, *Non-linear Functional Analysis*, Gordon and Breach, 1969.
- [39] I. Singer, J. Thorpe, *Lectures on Elementary Topology and Geometry*, UTM, Springer, 1967.
- [40] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, 1970.
- [41] J. Stallings, *The piecewise-linear structure of Euclidean space*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 58 (1962), 481-488.
- [42] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press, 1951.
- [43] R. Thom, *Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété*, C.R. Acad. Sci. Paris 228 (1949), 973-975.
- [44] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comm. Math. Helv. 28 (1954), 17-86.
- [45] R. Thom, *Les singularités des applications différentiables*, Ann. Inst. Fourier 6 (1956), 43-87.

- [46] W. Thurston, *Existence of codimension-one foliations*, Annals of Math. 104 (1976), 249-268.
- [47] A. Weil, *Sur les théorèmes de de Rham*, Comment. Math. Helv. 26 (1952), 119-145.
- [48] A. Weinstein, *Lectures on Symplectic Manifolds*, CBMS Reg. conf. ser. in Math. 29, Amer. Math. Soc., 1977.
- [49] H. Whitney, *A function not constant on a connected set of critical points*, Duke Math. J. 1 (1935), 514-517.
- [50] H. Whitney, *Differentiable manifolds*, Annals of Math. 37 (1936), 645-680.
- [51] E. Witten, *Supersymmetry and Morse Theory*, J. of Diff. Geom. 17 (1982), 661-692.