# Licence de Mathématiques 2005. Calcul Différentiel. Théorèmes et définitions principaux.

A.Pajitnov

# Table des matières

Dans ce cours "espace vectoriel" signifie "espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension *finie*". Chaque tel espace $E$ est isomorphe à l'espace $\mathbf{R}^n$ pour certain $n$. Pour introduire une topologie dans $E$ on utilise une *norme*. Toutes normes dans un espace vectoriel $E$ de dimension finie sont équivalentes, et la topologie dans $E$ ne depend pas du choix particulier de la norme. Voici les normes dans $\mathbf{R}^n$ les plus utilisées :

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2};$$

$$||x||_{sup} = \max\Big(|x_1|, \ldots, |x_n|\Big),$$

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

CHAPITRE 1

# APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES : NOTIONS DE BASE

## 1. Définitions, exemples

DÉFINITION 1.1. Soit $E, F$ des espaces vectoriels, $U \subset E$ un ouvert, $a \in U$. Une application $f : E \to F$ est dite *différentiable* (ou *dérivable*) au point $a \in E$ s'il existe une application linéaire $L : E \to F$ t.q.

$$\lim_{h \to 0} \frac{||f(a+h) - f(a) - L(h)||}{||h||} = 0.$$

L'application $L$ est dite *différentielle*, ou *dérivée* de $f$ en $a$, notée $f'(a)$ ou $Df(a)$ ou encore $d_a(f)$.

THÉORÈME 1.2. *Soit $E, F, G$ trois espaces vectoriels, $U \subset E, V \subset F$ des ouverts, $f : U \to V, g : V \to G$ des applications. Supposons que $f$ soit différentiable en $a$, $g$ soit différentiable en $b = f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en $a$ et $(g \circ f)'(a) = g'(b) \circ f'(a)$.*

Exemples des applications différentiables :

1. Applications linéaires
2. Applications bilinéaires

## 2. Dérivées partielles

PROPOSITION 2.1. *Une application $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ est différentiable si et seulement si ses coordonnées $f_i : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ sont différentiables.*

DÉFINITION 2.2. Soit $U$ un ouvert dans un $\mathbf{R}^m$, $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application et $a = (a_1, \dots a_m) \in U$. Si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_m)}{h}$$

existe, elle est appelée *la dérivée partielle* de $f$ en $a$ par rapport à la variable $x_i$ et notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbf{R}^n$.

PROPOSITION 2.3. *Si $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ est différentiable, alors toutes les dérivées partielles existent et*

$$f'(a)(h) = \sum_i h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

DÉFINITION 2.4. Soit $U$ un ouvert dans un $\mathbf{R}^m$, $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application et $a \in U$. Soit $h \in \mathbf{R}^m$. Si la limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

existe, elle est appelée *la dérivée* de $f$ en $a$ selon $h$ et notée $D_h f(a)$,.

REMARQUE 2.5. L'existence des dérivées partielles ou même des dérivées selon tous vecteurs n'implique pas encore la différentiabilité de la fonction.

DÉFINITION 2.6. Soit $U$ un ouvert dans un $\mathbf{R}^m$, $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application et $a \in U$. La matrice de l'application linéaire $f'(a)$ par rapport aux bases canoniques

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$$

est appelée *matrice de Jacobi* de $f$ en $a$, et notée $J_a(f)$.

PROPOSITION 2.7. *La matrice de Jacobi de l'application composée $g \circ f$ est le produit des matrices de Jacobi des applications $g$ et $f$ :*

$$J_a(g \circ f) = J_b(g) \cdot J_a(f) \quad \textit{où} \quad b = f(a).$$

On peut définir les dérivées partielles par rapport aux variables vectorielles :

DÉFINITION 2.8. Soit $E, F, G$ des espaces vectoriels, $U \subset E \times F$ un ouvert, $f : U \to G$ un application. Soit $(a, b) \in U$. La formule $x \mapsto f(x, b)$ définit une application $f^{(1)} : U_1 \to G$ d'un voisinage $U_1 \subset E$ de $a$ dans $G$. Si cette application est différentiable en $a$, sa dérivée $\left(f^{(1)}\right)'(a)$ est appelée *la dérivée partielle* de $f$ par rapport à la première variable et notée

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \in L(E, G).$$

De la même façon on définit la *la dérivée partielle* de $f$ par rapport à la deuxième variable, et on la note

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \in L(F, G).$$

CHAPITRE 2

# THÉORÈMES DES ACCROISSEMENTS FINIS

## 1. Théorèmes

THÉORÈME 1.1 (TAF1). *Soient $E, F$ des espaces vectoriels, $U \subset E$ un ouvert, $f : U \to F$ une application. Soit $a, b \in U$ ; on suppose que $[a, b] \subset U$ et que $f$ est différentiable en tout point de $[a, b]$. Alors*

$$||f(b) - f(a)|| \leqslant ||b - a|| \cdot \sup_{x \in [a,b]} ||f'(x)||$$

COROLLAIRE 1.2 (TAFconvexe). *Soit $U \subset E$ un ouvert convexe, $f : U \to F$ une application différentiable dans $U$. Soit $k \in \mathbf{R}$ t.q. $||f'(u)|| \leqslant k$ pour tout $u \in U$. Alors*

$$||f(b) - f(a)|| \leqslant k||b - a||$$

*for all $a, b \in U$.*

THÉORÈME 1.3 (TAF2). *Soit $A \in L(E, F)$. Dans les hypothèses du TAF1 on a*

$$||f(b) - f(a) - A(b - a)|| \leqslant \left( \sup_{x \in [a,b]} ||f'(x) - A|| \right) ||b - a||.$$

## 2. Applications

PROPOSITION 2.1. *Une application différentiable $f$ définie sur un ouvert connexe et telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x$ est constante.*

DÉFINITION 2.2. Soit $U$ un ouvert dans un espace vectoriel $E$. Soit $f : U \to F$ une application différentiable en tout point de $U$. On dit que $f$ est de classe $C^1$ dans $U$ si l'application

$$x \mapsto f'(x); \quad U \to L(E, F)$$

est continue.

PROPOSITION 2.3. *Soit $U \subset \mathbf{R}^m$ un ouvert et $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$f$ est de classe $C^1$ dans $U$.*

2. *Les dérivées partielles existent en tout point de* $U$ *et toutes les fonctions*
$$x \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) : U \to \mathbf{R}$$
*sont continues.*

CHAPITRE 3

# THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES ET THÉORÈME D'INVERSION LOCALE

## 1. Théorème des fonctions implicites

THÉORÈME 1.1. *Soit $E, F, G$ des espace vectoriels, $U \subset E, V \subset F$ des ouverts $f : U \times V \to G$ une application de classe $C^1$ dans $U \times V$. Soit $(a, b) \in U \times V$ et $f(a, b) = c$. Supposons que*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) : F \to G$$

*est un isomorphisme. Alors il existe des voisinages ouverts $A \subset U, B \subset V$ des points $a$, resp. $b$ et une fonction $g : A \to B$, tels que pour $(x, y) \in A \times B$ on a*

$$\big(f(x, y) = c\big) \Leftrightarrow \big(y = g(x)\big).$$

*La fonction $g$ est de classe $C^1$ dans $A$ et*

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \circ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))\right).$$

## 2. Théorème d'inversion locale. Difféomorphismes.

Soit $E, F$ des espace vectoriels, $U \subset E$ un ouvert.

**Définitions.** Soit $V \subset F$ un ouvert et $f : U \to V$ une application $C^1$. On dit que $f$ est $C^1$-difféomorphisme si $f$ est bijective, et son application réciproque $f^{-1} : V \to U$ est de classe $C^1$ dans $V$.

On dit que $f : U \to F$ est un difféomorphisme local en $a \in U$, s'il existe un voisinage $A$ de $a$, et un voisinage $B$ de $b$, tels que $f|A : A \to B$ est un difféomorphisme.

### Le théorème et ses corollaires.

THÉORÈME 2.1. *Soit $\phi : U \to F$ une application de classe $C^1$ dans $U$. Soit $a \in U$ et supposons que $\phi'(a) : E \to F$ soit un isomorphisme. Alors $\phi$ est un difféomorphisme local en $a$.*

COROLLAIRE 2.2. *Soit $f : U \to F$ une application de classe $C^1$ dans $U$ telle que $f'(a)$ est un isomorphisme pour tout $a \in U$. Alors $f(U)$ est ouvert.*

COROLLAIRE 2.3. *Une application injective $f : U \to F$ telle que $f'(a)$ est un isomorphisme pour tout $a \in U$ est un difféomorphisme sur son image.*

PROPOSITION 2.4. *Une application propre $f : U \to V$ de classe $C^1$ qui est un difféomorphisme local, est surjective, si $V$ est connexe.*

PROPOSITION 2.5. *Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une application de classe $C^1$, telle que pour chaque $x \in \mathbf{R}^n$ on ait $||f'(x)|| \leqslant k < 1$. Alors l'application $x \mapsto x + f(x)$ est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n$.*

**Application : Polynômes et leur racines.** Pour $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ on note $P_a(x)$ le polynôme $x^n - a_1 x + a_2 x + ... + (-1)^n a_n$. Soit

$U = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n) | \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n\}$;

$V = \{(a_1, ..., a_n)|$ le polynôme $P_a(x)$ a $n$ racines réelles distinctes $\}$

Soit $\Phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'application qui à chaque $\lambda \in \mathbf{R}^n$ associe le $n$-uplet $a \in \mathbf{R}^n$, tel que $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont les racines de $P_a(x)$.

THÉORÈME 2.6. *L'image $\Phi(U)$ est ouvert, et la restriction $\Phi|U : U \to \Phi(U)$ est un difféomorphisme sur son image. Pour le déterminant de la matrice jacobienne de $\Phi$ en point $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in U$ on a la formule suivante :*

$$\det J_\lambda(\Phi) = \pm \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j).$$

CHAPITRE 4

# DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR

## 1. Dérivée seconde

Soient $E, F$ des espace vectoriels, $U \subset E$ est un ouvert, $f : U \to F$ un application.

DÉFINITION 1.1. Soit $a \in F$. Supposons que $f$ soit différentiable au voisinage $U_0$ de $a$ ; soit $f' : U_0 \to \mathcal{L}(E, F)$ son application dérivée. On dit que $f$ est deux fois différentiable en $a$ si $f'$ est différentiable en $a$. La différentielle $(f')'(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ est appelée *differentielle* ou *dérivée seconde* de $f$ en $a$ et notée $f''(a)$.

LEMME 1.2. *Soit $E, F, G$ des espace vectoriels. Il y a un isomorphisme naturel entre $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$ et $\mathcal{L}(E, F; G)$.*

Vu ce Lemma on peut considérer la différentielle seconde d'une application $f : E \to F$ comme une application bilinéaire $E \times E \to F$.

THÉORÈME 1.3 (Schwartz). *La différentielle seconde est une application bilinéaire symétrique.*

LEMME 1.4. *Soit $f : E \to F$ une fonction deux fois différentiable en $a \in E$. Soit $k \in E$. On pose : $g(x) = f'(x)(k)$. Alors $g$ est différentiable en $a$ et $g'(a)h = f''(a)hk$.*

DÉFINITION 1.5. Soit $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application, et $a \in U$. Supposons que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe dans un voisinage de $a$. Si la dérivée partielle de la fonction

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

par rapport à la coordonnée $x_j$ existe en $a$ elle est appelée *la dérivée partielle de deuxième ordre* de $f$ (selon les coordonnées $x_i, x_j$).

PROPOSITION 1.6. *Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert ,$a \in U$ et $f : U \to \mathbf{R}^m$ une fonction. Si $f$ est deux fois différentiable en $a$ alors toutes les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ existent et*

$$f''(a)hk = \sum_{i,j} h_j k_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Corollaire 1.7. *Si $f$ est deux fois différentiable en $a$, alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Définition 1.8. On dit que $f : U \to F$ est de classe $C^2$ si elle est 2 fois dérivable dans $U$ et la fonction

$$x \mapsto f''(x)$$

est continue dans $U$.

Proposition 1.9. *Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbf{R}^m$ une fonction. Alors $f$ est de classe $C^2$ dans $U$ si et seulement si toutes les dérivées partielles de premier et second ordre existent et sont continues dans $U$.*

## 2. Dérivées d'ordre $\geqslant 2$

Définition 2.1. La définition des dérivées supérieures est faite par récurrence : Soit $f : U \to F$ une fonction et $a \in U$. La dérivée de $n$ -ième ordre $f^{(n)}(a)$ est par définition la dérivée de le fonction

$$x \mapsto f^{(n-1)}(x)$$

en $a$.

Comme dans le cas des la dérivée seconde, on peut identifier la $n$-ième dérivée d'une fonction avec une forme $n$-linéaire symétrique

$$f^{(n)}(a) : E \times \cdots \times E \to F.$$

On note $f^{(n)}(a)(h, \ldots, h)$ par $f^{(n)}(a)(h)^k$.

Théorème 2.2 (Formule de Taylor avec reste intégral). *Soit $U \subset E$ un ouvert, $f : U \to F$ une fonction de classe $C^{k+1}$ dans $U$. Soit $a \in U$, on suppose que $[a, a+h] \subset U$. Alors*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)(h)^2 + \ldots \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(h)^k + \int_0^1 \frac{(1-\tau)^k}{k!} f^{(k+1)}(a+\tau h)(h)^{k+1} d\tau$$

Corollaire 2.3 (le reste selon Lagrange). *Dans les hypothéses du théorème précédent soit $M = \sup_{x \in U} ||f^{(k+1)}(x)||$. Alors le reste*

$$\mathcal{R}_k(f,h) = f(a+h) - \left( f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)(h)^2 + \ldots \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(h)^k \right)$$

*vérifie*

$$||\mathcal{R}_k(f,h)|| \leqslant \frac{M}{(k+1)!}||h||^{(k+1)}$$

## 3. Extrema des fonctions réelles

DÉFINITION 3.1. Soit $f : u \to \mathbf{R}$ une fonction, $a \in U$.

1. On dit que $f$ admet un *maximum* en $a$ si pour tout $x \in U$ on a $f(x) \leqslant f(a)$.
2. On dit que $f$ admet un *maximum local* en $a$ si pour tout $x$ dans un voisinage de $a$ on a $f(x) \leqslant f(a)$.
3. On dit que $f$ admet un *maximum strict* en $a$ si pour tout $x \in U,\ x \neq a$ on a $f(x) < f(a)$.
4. On dit que $f$ admet un *maximum local strict* en $a$ si pour tout $x \neq a$ dans un voisinage de $a$ on a $f(x) < f(a)$.

De même on définit les notions de minimum, minimum strict, minimum local, minimum local strict.

On dit que $f$ admet un *extremum* en $a$, si elle admet un maximum ou un minimum.

On dit que $f$ admet un *extremum local* en $a$, si elle admet un maximum local ou un minimum local.

**Une condition nécessaire d'extremum.**

PROPOSITION 3.2. *Soit $E$ un espace vectoriel, $U \subset E$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction. Supposons que $f$ admet un extremum local en $a$ et que $f$ est différentiable en $a$. Alors $f'(a) = 0$.*

**Une condition suffisante d'extremum.**

PROPOSITION 3.3. *Soit $E$ un espace vectoriel, $U \subset E$ un ouvert, $f : U \to \mathbf{R}$ une application de classe $C^3$. Supposons que $f'(a) = 0$ et que la différentielle seconde $f''(a)$ est positive non dégénérée. Alors $f$ admet un minimum local strict en $a$.*

**Extremas liés et multiplicateurs de Lagrange.** Ici $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction, $L \subset U$ un sous-ensemble, $a \in L$.

DÉFINITION 3.4. On dit, que $f$ admet un minimum local lié en $a \in L$ par rapport à $L$ s'il existe un voisinage $V \subset U$ de $a$, tel que $f|V \cap L : V \cap L \to \mathbf{R}$ admet un minimum en $a$.

PROPOSITION 3.5. *Supposons que $L = g^{-1}(0)$, où $g : U \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $C^1$, telle que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$. Supposons* *que $f$ admet un minimum local lié en $a$. Alors il existe un nombre réel $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que*

$$f'(a) = \lambda \cdot g'(a).$$

CHAPITRE 5

# SOUS-VARIÉTÉS DE $\mathbf{R}^n$

## 1. Sous-variétés et leurs espaces tangents

Définition 1.1. Soit $M \subset \mathbf{R}^n$, soit $k$ un entier, $0 \leqslant k \leqslant n$. On dit, que $M$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension $k$ si pour chaque $x \in M$ il existe un difféomorphisme $\phi : U \to V$ (où $U, V \subset \mathbf{R}^n$ des ouverts et $x \in U$) tels que $\phi(U \cap M) = V \cap \mathbf{R}^k$. Un tel difféomorphisme est appelé *difféomorphisme adapté* ou *carte adaptée* à $M$ en $x$.

Définition 1.2. Soit $K \subset \mathbf{R}^n, x \in K$. Soit $\gamma : ]a,b[ \to \mathbf{R}^n$ une $C^1$-application telle que $\gamma(c) = x$ et pour tout $t \in ]a,b[$ on a : $\gamma(t) \subset K$. On dit que $\frac{d\gamma}{dt}(c)$ est *vecteur tangent* à $K$ en $x$. L'ensemble de tous les vecteurs tangents à $K$ en $x$ est dit *espace tangent* à $K$ en $x$, noté $T_xK$.

Remarque 1.3. L'espace tangent n'est pas nécessairement un espace vectoriel.

Proposition 1.4. *Soit $M \subset \mathbf{R}^n$ une sous-variété de dimension $k$ et $x \in M$. Alors :*

1. *$T_xM$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension $k$.*
2. *Soit $\phi$ un difféomorphisme adapté à $M$ en $x$. Alors $T_xM = (\phi^{-1})'(\phi(x))(\mathbf{R}^k)$.*

Exemple 1.5. L'ensemble $Z = \{(x_1, x_2) | x_1x_2 = 0\} \subset \mathbf{R}^2$ n'est pas une sous-variété de $\mathbf{R}^2$.

## 2. Graphes comme sous-variétés

Soit $U \subset \mathbf{R}^k, V \subset \mathbf{R}^m$ des ouverts, $f : U \to V$ une application.

Proposition 2.1. *Si $f$ est de classe $C^1$, alors :*

1. *Le graphe de $f$*
$$\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^m \mid y = f(x)\}$$
*est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension $k$.*
2. *Soit $c = (a, f(a)) \in \Gamma_f$. Alors l'espace tangent $T_c\Gamma_f$ est le graphe de l'application linéaire $f'(a) : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^m$.*

### 3. Sous-variétés définies par équations

Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ une ensemble ouvert et $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application (où $p \leqslant n$ ). On va noter $f^{-1}(0)$ par $M$.

THÉORÈME 3.1. *Supposons que $f$ est de classe $C^1$ et que l'application linéaire $f'(z) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ est surjective pour chaque $z \in M$. Alors :*

1. *$M$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension $n - p$.*
2. *L'espace tangent $T_zM$ est égal à* Ker $(f'(z) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p)$.

EXEMPLE 3.2. La sphère $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^{n+1}$ de dimension $n$.

EXEMPLE 3.3. Soit $R > r > 0$. Posons

$$F(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 - r^2$$

La surface, donnée par l'équation $F(x, y, z) = 0$ est notée $\mathbf{T}^2$ et appelée *tore*. $\mathbf{T}^2$ est uns sous-variété de $\mathbf{R}^3$ de dimension 2.

PROPOSITION 3.4. *$\mathcal{T}$ est homéomorphe à $S^1 \times S^1$.*