Introduction à la K-théorie algébrique

Salim Rivière

28 novembre 2011

1 Définition ad-hoc de K_0, K_1, K_2.[Mil66][Lod98][Wei]

Les K_i, $i = 0, 1, 2$, sont des foncteurs covariants de la catégorie des anneaux dans celle des groupes abéliens.

1.1 Le K_0

1.2 Le K_1 et le K_2 :

Soit A un anneau. Considérons le système inductif de groupes $(GL_n(A), f_n)_{n\geq 1}$ donné par les injections :

$$GL_n(A) \xrightarrow{f_n} GL_{n+1}(A)$$

$$M \longmapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et définissons le groupe linéaire infini $GL_\infty(A)$ comme étant la limite inductive de ce système. Notons $E_\infty(A)$ le sous-groupe de $GL_\infty(A)$ constitué des éléments ayant pour représentant une matrice élémentaire, c'est à dire égale à la matrice identité sauf, événtuellement, en un élément situé hors de la diagonale.

Proposition 1.2.1. *Le sous-groupe $E_\infty(A)$ est égal au sous-groupe (normal) de $GL_\infty(A)$ engendré par les commutateurs, i.e :*

$$E_\infty(A) = [GL_\infty(A), GL_\infty(A)]$$

Définition 1.2.2. *Le groupe $K_1(A)$ est le groupe quotient défini par :*

$$K_1(A) := GL_\infty(A)/E_\infty(A)$$

Le fait que $K_1(A)$ est soit abélien est une conséquence de la proposition 1.2.1.

Soit $L(E(A))$ le groupe libre engendré par l'ensemble sous-jacent au groupe $E(A)$. Un générateur élémentaire $e^a_{p,q}(e_{i,j})_{i,j}$, dont le seul coefficient hors diagonale non nul est situé à la p-ième ligne et la k-ième colonne et vaut $a \in A$, sera noté $\beta^\lambda_{p,q}$ vu comme élément de $L(E(A))$. Le groupe de Steinberg de A, noté $St(A)$ est le quotient du groupe libre par les relations

$$[\beta^a_{p,q}\beta^b_{r,s}] = \begin{cases} 1 & \text{si } p \neq s \text{ et } q \neq r \\ \beta^{ab}_{p,s} & \text{si } p \neq s \text{ et } q = r \\ \beta^{-ba}_{r,q} & \text{si } p = s \text{ et } q \neq r \end{cases} \tag{1}$$

et

$$\beta^a_{p,q}\beta^b_{p,q} = \beta^{a+b}_{p,q} \tag{2}$$

La classe dans $St(A)$ d'un générateur $\beta^a_{p,q}$ sera notée $\lambda^a_{p,q}$ et appelée **symbole**. Les relations étant vérifiées également par les matrices élémentaires $e^a_{p,q}$, l'épimorphisme naturel $L(E(A)) \to E(A)$ induit par passage au quotient un morphisme surjectif $p_A : St(A) \to E(A)$ qui envoie $\lambda^a_{p,q}$ sur $e^a_{p,q}$.

Définition 1.2.3. *Le groupe $K_2(A)$ est le noyau du morphisme $p_A : St(A) \to E(A)$.*

Remarquons la suite exacte de groupes :

$$0 \longrightarrow K_2(A) \longrightarrow St(A) \longrightarrow GL(A) \longrightarrow K_1(A) \longrightarrow 0$$

Théorème 1.2.4. *Le groupe $K_2(A)$ est abélien. Plus précisément, c'est le centre de $St(A)$.*

Théorème 1.2.5. *[Wei] $St(A)$ est l'extension centrale universelle de $E(A)$*

Nous avons une interprétation du K_2 en terme d'homologie :

Corollaire 1.2.6 (Steinberg)**.**

$$K_2(A) = H_2(E(A); \mathbb{Z})$$

Démonstration. $E(A)$ étant parfait, l'extension centrale universelle est donnée par

$$H_2(E(A); \mathbb{Z}) \longrightarrow [L(E(A)), L(E(A))]/_{[R, L(E(A))]} \longrightarrow E(A)$$

où R est le noyau du morphisme surjectif $L(E(A)) \to E(A)$. Par unicité de l'extension centrale universelle à isomorphisme près, $K_2(A) = H_2(E(A); \mathbb{Z})$. □

2 Les K_i pour $i \geq 3$ et la construction + de Quillen. [Wei] [Hat02]

Cette section a pour objectif de donner une définition des K_i pour tout $i \geq 0$ qui coincide avec celles de la section précédente dans le cas ou $i = 0, 1, 2$.

2.1 La construction plus de Quillen

Soit X un CW-complexe connexe.

Proposition 2.1.1. *Si $H_1(X) = 0$, alors il existe un CW-compexe X^+, simplement connexe, et une application $f : X \to X^+$ qui induit un isomorphisme en homologie.*

Démonstration. On considère une famille (e_i^1) de générateurs de $\pi_1(X)$. On ajoute des 2-cellules e_i^2 recollées sur chaque e_i^1. L'espace obtenu est clairement simplement connexe. De plus, la suite exacte longue d'homologie

$$0 = H_3(X, X') \longrightarrow H_2(X) \longrightarrow H_2(X') \longrightarrow H_2(X', X) \longrightarrow H_1(X) = 0$$

est scindée (vu que $H_2(X, X')$ a pour base les classes des e_i^2) ce qui fournit un isomorphisme $H_2(X') \simeq H_2(X', X) \oplus H_2(X)$. Comme X' est simplement connexe, le morphisme d'Hurewicz est un isomorphisme $\pi_2(X') \simeq H_2(X')$, ce qui permet de choisir une base du facteur direct $H_2(X', X)$ constituée d'applications $\varphi_j : S^2 \to X'$ que l'on peut utiliser pour attacher des 3-cellules e_j^3 à X'. L'espace ainsi obtenu, noté X^+, a bien les proprietés demandées. En effet, si l'on considère la suite exacte longue du triplet $X \subset X' \subset X^+$:

$$0 = H_3(X', X) \longrightarrow H_3(X^+, X) \longrightarrow H_3(X^+, X') \xrightarrow{\partial} H_2(X', X) \longrightarrow H_2(X^+, X) = 0$$

Il apparaitque ∂ est un isomorphisme car par définition, $\partial e_j^3 = \varphi_j$ et les e_j^3 forment une base de $H_3(X^+, X')$. Il s'ensuit que $H_3(X^+, X) = 0$ et par suite $H_3(X) = H_3(X^+)$. L'égalité des H_i pour $i \geq 4$ est claire. □

On note BG le classifiant d'un groupe G (Joint infini de G quotienté par l'action de G). Alors, en notant $BGL(A)^+$ l'espace obtenu en appliquant la construction + au sous groupe parfait $E(A)$ de $\pi_1(BGL(A)) = GL(A)$:

Théorème 2.1.2. *Pour $i = 1$ et $i = 2$, les groupes $K_i(A)$ et $\pi_i(BGL(A)^+)$ sont isomorphes.*

Démonstration. Clair pour $i = 1$ par construction. Pour le cas $i = 2$, en admettant la première égalité

$$\pi_2(BGL(A)^+) = H_2(BE(A)^+) = H_2(BE(A)) = H_2(E(A); \mathbb{Z}) = K_2(A)$$

□

3 La torsion de Whitehead et ses applications. [Mil66]

3.1 Torsion d'un complexe de chaînes

Commencons par définir la torsion d'un complexe de chaines fini de A-modules libres $C := (C_*, d_*)$, habitant dans le $K_1(A)$ réduit :

$$\bar{K}_1(A) := K_1(A)/_{< Id, -Id >}$$

Pour ce faire, supposons que pour tout i, $B_i := imd_{i+1}$ (resp. $H_i(C)$, C_i) est muni d'une base préférée b_i (resp. h_i, c_i). La suite exacte

$$0 \to B_i \to Z_i \to H_i(C) \to 0$$

fournit une base notée $b_i h_i$ de Z_i, et la suite exacte

$$0 \to Z_i \to C_i \to B_{i-1} \to 0$$

permet ainsi d'obtenir une nouvelle base de C_i notée $b_i h_i b_{i-1}$. La classe de la matrice de passage de c_i à $b_i h_i b_{i-1}$ dans $\bar{K}_1(A)$ est notée $[c_i/b_i h_i b_{i-1}]$.

Définition 3.1.1. *La torsion de C, notée $\tau(C)$, est l'élément de $\bar{K}_1(A)$ défini par :*

$$\tau(C) := \sum_i (-1)^i [c_i/b_i h_i b_{i-1}]$$

La $\tau(C)$ ne dépend pas des choix de bases effectués. Une des applications de la torsion est le théorème de s-cobordisme.

3.2 Torsion d'une paire de CW-complexes

Soit (K, L) une paire de CW-complexes où L est un rétract par déformation de K. Notons $\hat{K}$ et $\hat{L}$ leurs revetements universels respectifs. Définissons le complexe $C_*(K, L)$ par

$$C_i(K, L) := H_i(\hat{K}^i \cup \hat{L}, \hat{K}^{i-1} \cup \hat{L})$$

Chaque $C_i(K, L)$ est un $\mathbb{Z}\pi_1(K)$-module à gauche via l'action par deck transformations. Donnons nous une base préférée de $C_i(K, L)$ en choisissant une base (e^i_α) de i-cellules $K - L$ et la liftant en une base $(\hat{e}^i_\alpha)$ du $\mathbb{Z}\pi_1(K)$-module $C_i(K, L)$.

Définition 3.2.1. *La torsion de la paire (K, l), notée $\tau(K, L)$, est la classe dans $Wh(\pi_1(K)) := \bar{K}_1(\mathbb{Z}\pi_1(K))/\pi_1(K)$ de la torsion du complexe $C_*(K, L)$.*

3.3 Le théorème de s-cobordisme [Mil66]

Définition 3.3.1. *Un h-cobordisme est un triplet (M, W, M') de varietés différentiables, avec W compacte connexe, tel que $\partial W = M \coprod \bar{M}'$ et tel que M et M' soient des rétracts par déformation de W.*

Soit (M, W, M') un h-cobordisme. La torsion de la paire (W, M) est par définition égale à torsion $\tau(K, L) \in Wh(\pi_1(W))$, où (K, L) est n'importe quelle C^1-triangulation de $W, M)$. Elle ne dépend pas du choix de la triangulation.

Théorème 3.3.2 (s-cobordisme)**.** *Le h-cobordisme (M, W, M') est difféomorphe (au dessus de M en identiviant M et $M \times \{0\}$) au h-cobordisme trivial $M \times [0, 1]$ si et seulement si $\tau(W, M) = 0$. De plus, toute classe τ_0 de $Wh(\pi_1(W))$ est la torsion d'un h-cobordisme.*

Références

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Lod98] Jean-Louis Loday. *Cyclic homology*, volume 301 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998. Appendix E by María O. Ronco, Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili.

[Mil66] J. Milnor. Whitehead torsion. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 :358–426, 1966.

[Wei] Charles Weibel. *The K-book : An introduction to algebraic K-theory.* http ://www.math.rutgers.edu/ weibel/Kbook.html.