Université de Nantes Année 2010-2011
L3 Math-Eco

TD n°1
Tribus et fonctions mesurables

Dans tous les exercices, Ω, Ω_1, Ω_2 et Ω_3 sont des ensembles.

Exercice 1 Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de parties de Ω. Montrer que

$$(\bigcap_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c \quad \text{et} \quad (\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$$

Exercice 2 Dans chacuns des exemples suivants, determiner les ensembles $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$:

- $An := [0, \frac{1}{n+1}]\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $An := [x, y - \frac{1}{n+1}]\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $An := [x, y - \frac{1}{n+1}[\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $An := [x + \frac{1}{n+1}, y]\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $A_n := B(O, \frac{1}{n+1}) \subset \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $A_n := n\mathbb{Z}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 3 Supposons que $\Omega = \{a, b, c\}$ est un ensemble à trois éléments. Donner les différentes tribus possibles sur Ω.

Exercice 4 Soit $S \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble dense dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'ensemble de parties de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathcal{C} := \{[a, +\infty[\,,\ a \in S\}$$

et $\sigma(\mathcal{C})$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Montrer que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 5 Si Ω est muni d'une partition, décrire la tribu engendrée par cette partition.

Exercice 6 Soit f une bijection de Ω dans lui même. Montrer que l'ensemble des parties A de Ω telles que

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ et } f^{-1}(x) \in A$$

est une tribu sur Ω

Exercice 7 Supposons que Ω est un ensemble infini et notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω qui sont finies ou de complementaire fini. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre mais pas une tribu.

Exercice 8 Soit $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille quelconque de tribus sur Ω. Montrer que $\mathcal{B} := \bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{F}_\alpha$ est aussi une tribu. Donner un contre exemple dans le cas où on remplace l'intersection par une union.

Exercice 9 Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

Exercice 10 Soient $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ et $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ deux applications, A une partie de Ω_3 et B une partie de Ω_1.

1. Comparer $g(g^{-1}(A))$ et A ansi que $f^{-1}(f(B))$ et B. Préciser les cas d'égalité.

2. Prouver que $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ et en déduire que la composée de deux fonctions mesurables est mesurable.

Exercice 11 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Montrer que les fonctions suivantes sont mesurables :

- $\max(f, g)$
- $\min(f, g)$
- $\lambda f + \mu g$ avec λ et μ dans $\mathbb{R}$.
- $f \cdot g$.

Expliquer pourquoi f^+ et f^- sont mesurables.