Université de Nantes Année 2010-2011
L3 Math-Eco

TD n°3
Lois de Probabilités, Variables aléatoires

Exercice 1 On lance une pièce avec la probabilité p d'obtenir pile et on répète l'expérience de manière indépendante jusqu'à avoir obtenu 10 piles. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers nécéssaires pour obtenir dix fois pile. Donner la loi de X.

Exercice 2 Soit F une fonction de répartition. On appelle fonction fonction quantile la fonction $F^{\leftarrow}$ définie par

$$F^{\leftarrow}(u) := \inf\{x : F(x) \geqslant u\}, \qquad \forall u \in]0,1[$$

Supposons que U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$.

1. Montrer que $F^{\leftarrow}$ est bien définie.
2. Soit t un réel. Montrer que $[F^{\leftarrow}(U) \leqslant t] \subset [F(t) \geqslant U]$ et que $[F(t) > U] \subset [F^{\leftarrow}(U) \leqslant t]$.
3. Expliquer pourquoi $P([U \leqslant F(t)]) = F(t)$ et en déduire que

$$P([F^{\leftarrow}(U) < t]) \leqslant F(t) \leqslant P([F^{\leftarrow}(U) \leqslant t])$$

4. Montrer que

$$F(t) = P([F^{\leftarrow}(U) \leqslant t])$$

   Conclure en reconnaissant une des proprietés énoncées dans le cours.

Exercice 3 (Paradoxe de Bertrand). Soit $\mathcal{C}$ le centre de centre $(0,0)$ et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$. On cherche à déterminer que la probabilté qu'une corde AB de ce cercle "choisie au hasard" soit plus grande que le coté du triangle inscrit dans le cercle. Faire le calcul dans les différents cas suivants :

1. On fixe un point I sur le cercle. On choisit un point M sur le segment $[OI]$ selon la loi de probabilité uniforme et on lui associe la corde AB du cercle perpendiculaire à $[OI]$.
2. On fixe un point A sur le cercle et on choisit B sur le cercle selon la probabilité uniforme sur le cercle.
3. On choisit M dans le disque selon la loi de probabilité uniforme. AB est alors la corde passant par M qui est perpendiculaire à $[OM]$.

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$P([X = k]) = \frac{e^{-2}2^k}{4k!}(1 + \alpha k) \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

1. Déterminer la valeur de α.
2. Calculer l'espérance et la variance de X en remarquant que pour tout entier k

$$P([X = k]) = \frac{1}{4}P([Y = k]) + \frac{3}{4}P([T = k])$$

   où $T = Z + 1$, Y et Z étant deux variables aléatoires de loi de Poisson de paramètre 2.

Exercice 5 1. Soit X une variable al'éatoire de densité f donnée par :

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } -3 < x < 8 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la probabilité de l'évènement $[X^2 - 3X + 2 > 0]$?

2. Soit Y une variable aléatoire de densité g donnée par :

$$g(y) := \begin{cases} e^{-y} & \text{si } y < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la probabilité de l'évènement $[\sin Y < 0]$?

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire de densité f donnée par :

$$f(x) := \frac{1}{2}e^{-|x|} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

1. Vérifier que f est bien une densité. Donner son espérance et sa variance.
2. Quelle est la probabilité que l'équation $a^2 + Xa + 1$ possède :
   (a) Deux racines réelles distinctes ?
   (b) Une racine double ?
   (c) Deux racines complexes non réelles ?

Exercice 7 Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y la variable aléatoire définie par $Y := X^2$. Donner une densité de Y.

Exercice 8 On choisit de manière aléatoire, selon la loi uniforme, un point du disque $\mathcal{D}$ de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. ($D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$).

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. Quelles sont les densité des lois marginales de X et X ?

Exercice 9 Un arrêt de bus est desservi tous les quarts d'heure à partir de 7h du matin (inclus). Un passager arrive à un arrêt à un instant aléatoire de loi uniforme sur $[7h; 7h30]$. Quelle est la probabilité qu'il attende moins de 5 minutes pour un bus ? Plus de 10 min ?

Exercice 10 Soit θ un réel et X une variable aléatoire de densité f donnée par :

$$f(x) := \begin{cases} 2x/\theta^2 & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer $E(X)$, $E(X^2)$ et $V(X)$ en fonction de θ.
2. Calculer $P([X \leqslant \frac{\theta}{4}])$.

Exercice 11 Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1 et notons φ^X sa fonction caractéristique. Montrer que pour tout réel t :

$$\varphi^X(t) = \frac{1}{1 - it}$$

Exercice 12 (Loi de Pareto) Soient α et a deux réels strictement positifs, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\alpha}{a}\left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{si } x \geqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X de densité f.
2. Sous quelles conditions X admet-elle une espérance ? Une variance ?