INTRODUCTION A LA RELATIVITE GENERALE

Notes d'exposé au séminaire des apprentis

(Nantes)

Salim RIVIERE

Juin 2012

1 Relativité restreinte

1.1 Quelques expériences fictives

Principe général dans la mécanique Newtonienne : Additivité des vitesses. Si l'on se place en une dimension et qu'on suppose qu'un observateur B se déplace à vitesse v par rapport à un observateur A, alors un photon qui se déplace à la vitesse c par rapport à A dans la même direction que B devrait se déplacer à la vitesse $c - v$ par rapport à B. Ceci est en contradicition avec l'expérience (Michelson Morley 1887) car les photons vont à la vitesse c dans n'importe quel référentiel.

Temps et distance n'ont de sens que par rapport aux observateurs (le temps mesuré par A n'est à priori pas le même que celui mesuré par B même avec des chronomètres identiques). De même la simultanéité est relative.

Détaillons un peu cela :

1. Photon vertical :

   Un train qui se déplace, un photon lancé d'un bout à l'autre du wagon, B est dans le wagon, A sur le quai. Absurdité si on suppose que le temps s'écoule pareil pour A et pour B. Cependant, par réciprocité, les directions orthogonales au mouvement ne sont pas affectées. Si l'on y voit une contradiction dans le sens du mouvement, par exemple en collant une regle sur le wagon au passage du train, il faut comprendre que si les deux extrémités de la règle sont collées simultanément pour A elles n'ont aucune raison de l'être pour B. Il n'y a pas réciprocité contrairement au sens orthogonal au mouvement (train + ou - large que les rails est absurde)

   Deux observateurs : A dans le train et B sur le quai, le photon fait un aller retour sol-plafond t_A, t_B = temps d'aller retour du photon pour A, B

   h= heauteur du wagon c_A = vitesse du photon pour A c_B = vitesse du photon pour B v = vitesse du train pour B On a

   $$c = c_A = \frac{2h}{t_A} \tag{1}$$

   et par Pythagore

   $$c = c_B = \frac{\sqrt{(2h)^2 + v^2 t_B^2}}{t_B}$$

   En mettant cette équation au carré et en substituant la valeur de h grace à l'équation (1)

   $$t_B^2 c^2 = 4h^2 + v^2 t_B^2 = c^2 t_A^2 + v^2 t_B^2$$

   d'où

   $$t_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, t_B \tag{2}$$

   Remarque 1.1.1. *Il est fondamental que les deux évenements (depart et retour du photon) se passent au même endroit pour A*

2. Photon horizontal : Cette fois ci le photon se déplace dans le sens du déplacement. On s'intéresse de nouveau à un aller retour. Ici, l_A (resp. l_B) est la longueur du wagon mesurée par A (resp. B) La vitesse mesurée par A est
$$c = \frac{2l_A}{t_A} \tag{3}$$
Pour l'observateur B, commençons par calculer la distance parcourue par le photon pendant un aller retour : A l'aller le photon parcourt la longueur du train plus la distance parcourue par le train $= l_B + vt'_B$ où t'_B est le temps de l'aller pour B. Pour le retour on trouve $l - vt''_B$ où t''_B est le temps de retour pour B. Or
$$c = \frac{l + vt'_B}{t'_B}$$
donc $t'_B = \frac{l_B}{c-v}$, et
$$c = \frac{l + vt''_B}{t''_B}$$
donc $t''_B = \frac{l_B}{c+v}$
Ainsi, en utilisant (2) on a
$$l_A = \frac{ct_A}{2} = \frac{c}{2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}t_B = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{2}(\frac{1}{c+v} + \frac{1}{c-v})l_B = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}l_B$$
d'où
$$l_A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}l_B \tag{4}$$
Remarque 1.1.2. *Ici il est important que le wagon soit fixe par rapport à A. On peut généraliser les équations (2) et (4) à des évènements qui ne se passent pas au même endroit où des longueurs non fixes. Ce sont les transformations de Lorentz.*

1.2 Quantité de mouvement

On considère un particule de masse m et de vitesse $\vec{v}$.

Définition 1.2.1. *Sa quantité de mouvement (ou impulsion), est le vecteur $\vec{p}$ défini par*
$$\vec{p} := m\vec{v}$$

La quantité de mouvement est constante avec le temps (si l'on considère toutes les particules du système évidemment). On peut en déduire (par le même genre de raisonnement que précédemment, en jetant des pierres du train) que si une particule q de masse m (au repos pour A) se déplace à vitesse $\vec{v}$ par rapport à un observateur A, alors la quantité de mouvement de q vue par A est
$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{||\vec{v}||}{c^2}}}$$

1.3 Modélisation de l'espace temps

1.3.1 En mécanique classique

En mécanique classique, l'espace temps est un espace affine [1] M de dimension 4, muni d'une forme quadratique T sur $E := \vec{M}$ de signature $(+, 0, 0, 0)$.

Remarque 1.3.1. *Le point de vue affine permet d'éviter les directions privilegiées.*

Comme $E - \text{Ker}T$ a deux composantes connexes, on en choisit une que l'on note E^+. Ce sont les directions positives. On note $b : E \times E \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire symétrique associée à T.

Définition 1.3.2.

1. ensemble M sur lequel un espace vectoriel $\vec{M}$ agit fidèlement et transitivement

1. *Un observateur est une courbe $c : I \to M$ de genre temps (i.e telle que $T(c'(t)) \neq 0$ pour tout t dans I).*
2. *Un observateur galiléen est une droite non isotrope.*

Choisissons un produit scalaire g sur $\mathrm{Ker}T := \{v \in E | b(x, v) = 0 \forall x \in E\}$ et notons $|| \; ||$ la norme associée.

Définition 1.3.3. *1. Soient A et B dans M. On dit qu'ils sont simultanés si $\vec{AB} \in KerT$. L'ensemble des simultanés à A donné est l'hyperplan affine $A + KerT$. C'est l'espace vu par un observateur en A.*

2. *Lorsque A et B sont simultanés, on peut calculer leur distance :*

$$d(A, B) := ||\vec{AB}||$$

3. *Le temps qui sépare deux évènements A et B de M est donné par*

$$\tau_{AB} = \sqrt{T(\vec{AB})}$$

On voit que deux évènements sont simultanés si et seulement si le temps qui les sépare est nul.

Considérons un observateur galiléen D dirigé par un vecteur unitaire ($T(i_D) = 1$) et orienté positivement. Si on fixe une origine A à D, on a un isomorphisme naturel

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{D,A} : M & \to & \mathrm{Ker}\, T \times \mathbb{R} \\ B & \mapsto & (\vec{v}, t) \end{array}$$

où $vecv$ et t sont déterminés par $\vec{AB} = \vec{v} + t i_D$. En fait, $t = \tau_{AB}$.

L'univers observable pour D_A à l'instant t est $\varphi^{-1}(\mathrm{Ker}T \times \{t\})$.

Paramétrisation par le temps propre : Soit D un observateur et $c : I \to M$ une paramétrisation de D (telle que $T(c'(t)) \neq 0$ pour tout t). quitte à échanger t par $-t$ on peut supposer que $c'(t)$ est dans E^+ pour tout t dans I. Posons

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} \sqrt{T(c'(u)} du$$

où t_0 est un point fixé de I. On voitr que s est un difféomorphisme de I sur $J := s(I)$. Posons $C := c \circ s^{-1} : J \to M$. Alors, pour totu t dans J

$$T(C'(t)) = 1 \quad \text{et} \quad C'(t) \in E^+$$

ûne telle paramétrisation est appelée paramétrisation normale positive de de l'observateur D. Elle existe toujours et est unique à translation près.

Vitesse : Soient D et $\tilde{D}$ deux observateurs dont on note α et $\tilde{\alpha}$ les paramétrisations normales positives respectives. Quitte à faire une translation en temps on peut supposer que que pour t fixé, $\alpha(t)$ et $\tilde{\alpha}(t)$ sont simultanés. Alors $\tilde{\alpha}'(t)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\tilde{\alpha}'(t) = \vec{k} + a\alpha'(t)$$

Comme $T(\tilde{\alpha}'(t)) = T(\alpha'(t)) = 1$, il est clair que $a = 1$.

Définition 1.3.4. *Le vecteur $\vec{k}$ défini précédemment est la vitesse de $\tilde{D}$ vue par D au temps t. Elle est notée $\vec{v}_{\tilde{D}/D}$.*

Remarque 1.3.5. *1. La vitesse définie dépend du temps t.*

2. *Si D et $\tilde{D}$ sont deux observateurs galiléens, alors le vecteur vitesse $\vec{v}_{\tilde{D}/D}$ est constant en fonction du temps.*
3. *$\vec{v}_{\tilde{D}/D} = -\vec{v}_{D/\tilde{D}}$.*
4. *On retrouve l'additivité des vitesses*

L'accélération de $\tilde{D}$ par rapport à D est le vecteur $\vec{a}_{\tilde{D}/D} := \frac{d}{dt}\vec{v}_{\tilde{D}/D}$. On remarque que si D et D' dont galiléens, les accélération de $\tilde{D}$ vu par D et D' sont égales.

1.3.2 En relativité restreinte

La mécanique classique suppose l'additivité des vitesses ce qui contredit la constance de celle de la lumière. D'où un nouveau modèle : la relativité restreinte (Einstein 1905).

L'espace temps en relativité restreinte est un espace affine M de dimension 4 muni d'une forme quadratique T sur $E := \vec{M}$ de signature $(-,+++)$. Pour fixer les idées on considérera souvent l'espace de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta)$ où

$$\eta := -dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

dans les coordonnées canoniques (t, x^1, x^2, x^3).

Remarque 1.3.6. *Une telle métrique est exactement celle qui est conservée par les changements de repère de la première sous section. Le groupe des transformations de M qui laissent invariant cette métrique est appelé groupe de Poincaré. C'est le produit semi direct des translations avec le groupe de Lorentz des automorphismes de E qui laissent stable la metrique T. Il a été exhibé comme le groupe des transformations qui laissent invariantes les équations de Maxwell. Matriciellement, si $\tilde{D}$ est en translation par rapport D avec pour vitesse v selon l'axe des x^1, en posant $\beta = v/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, elles ont la forme*

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 1.3.7. *Soit $\vec{v}$ unvecteur de E. $\vec{v}$ est dit*
- *type lumière (isotrope) si $T(\vec{v}) = 0$*
- *de genre temps si $T(\vec{v}) < 0$*
- *de genre espace si $T(\vec{v}) > 0$.*

L'ensemble des vecteurs de type temps a deux composantes connexes. L'une est déclarée positive (orientation en temps). De même que précédemment :

Définition 1.3.8.
- *Un observateur est une courbe de genre temps*
- *un observateur galiléen est une droite de genre temps.*
- *Si D est un observateur galiléen et $c : I \to M$ est une paramétrisation de D, l'espace vu par D en $c(t)$, est l'hyperplan affine $c(t) + c'(t)^{\perp}$.*

Remarque 1.3.9. *Si A et B sont deux points de M, cela n'a pas de sens de se demander si ils sont simultanés. Par contre on peut se demander si A et B sont simultanés pour un observateur D : cela signifie qu'il exite un t tel que A et B soient dans l'espace vu par D au point $c(t)$.*

De même qu'en mécanique classique, chaque observateur D admet une paramétrisation $C : I \to M$ par le temps propre telle que $T(C'(t)) = -1$ et $C'(t)$ est dans l'orientation pour tout t dans I. Si $c : I \to M$ est une paramétrisation quelconque de D, le temps propre τ_{AB} entre $A = c(t_1)$ et $B = c(t_2)$ est donné par

$$\tau_{AB} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-T(c'(t))}dt$$

Il s'agit du temps mesuré physiquement par D entre A et B. Si A et B sont simultanés pour D, la distance de A à B vue par D est

$$d_D(A,B) := \sqrt{T(\vec{AB})}$$

Remarque 1.3.10.
- *Le temps propre ne dépend pas de la paramétrisation choisie.*
- *Si l'on se donne A et B quelconques dans M, cela n'a pas de sens de parler du temps qui sépare A et B. Cela dépend de la trajectoire choisie par l'observateur. C'est le paradoxe des jumeaux.*

Paramétrisation par le temps propore d'un observateur galiléen : Soit D un observateur galiléen de vecteur directeur unitaire i_D $(T(i_D) = -1)$ parametré par $c : I \to M$ tel que $c'(t) = i_D$ pour tout t dans I. Soit $\tilde{D}$ un autre observateur parametré par $\tilde{c} : \tilde{I} \to M$. On peut décomposer $\tilde{c}'(t) = \vec{k} + a i_D$ avec $\vec{k} \in i_D^{\perp}$. En mécanique classique, si $\tilde{c}$ était en temps propre, on avait $a = 1$. Ce n'est plus le cas mais on peut trouver une unique c telle que ce soit vrai. Une telle paramétrisation s'appelle paramétrisation normale positive pour D. Elle a la proprieté que si c_1 et c_1 sont deux paramétrisations normales positives pour D telles que $c_1(t_1)$ et $c_2(t_2)$ soient simultanés pour D, alors pour tout a, $c_1(t_1+a)$ et $c_2(t_2+a)$ le sont encore.

Vitesse Soient D et $\tilde{D}$ deux observateurs parametrés respectivement par $c : I \to M$ et $\tilde{c} : \tilde{I} \to M$ On suppose que c est par le temps propre pour D. Fixons un point A de D, $A = c(t)$ pour un certain t dans I. Quitte à effectuer une translation on peutt supposer $\tilde{c}(t)$ et $c(t)$ simultanés pour D. Le vecteur $\tilde{c}'(t)$ s'écrit alors de manière unique

$$\tilde{c}'(t) = \vec{k} + ac'(t)$$

où $\vec{k}$ est dans $c'(t)^\perp$ et a dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.11. *Sous les hypothèses précédentes, le vecteur vitesse de $\tilde{D}$ par rapport à D en A est*

$$\vec{v}_{\tilde{D}/D} = \frac{\vec{k}}{a}$$

Remarque 1.3.12. *1. Si $\tilde{c}$ est normale pour D, $\vec{v}_{\tilde{D}/D} = \vec{k}$.*

2. La vitesse relative de deux observateurs galiléens est constante.

Proposition 1.3.13. *La vitesse de la lumière par rapport à n'importe quel obervateur est constante.*

2 Relativité générale

2.1 Modélisation de l'espace temps en relativité générale :

Quelques définitions succintes pour commencer :

Définition 2.1.1.

- *Une **varieté** ($\mathcal{C}^\infty$) de dimension n est un espace topologique M muni d'un atlas de cartes $(U_i, \psi_i : U_i \to \mathbb{R}^n)_i$ tel que les changements de cartes soient des difféomorphismes.*
- *Le **fibré tangent** d'une varieté M est l'espace topologique*

$$TM := \left(\coprod_i TU_i\right) /_\sim$$

où $TU_i := U_i \times \mathbb{R}^n$ et la relation d'équivalence $\sim$ est définie par $(x, \vec{u}) \sim (x, \vec{v})$ si et seulement $\vec{u} = D_{\psi_j(x)}(\psi_i \circ \psi_j^{-1}) \cdot \vec{v}$, pour tous $(x, \vec{u}) \in TU_i$ et $(y, \vec{v}) \in TU_j$. L'application $\pi_M : TM \to M$ qui envoie la classe de $(x, \vec{u})$ sur x fait du fibré tangent un fibré vectoriel de rang n sur M. TM est une varieté de dimension $2n$. La fibre $\pi^{-1}(\{x\})$ d'un point x de M est notée T_xM, c'est l'espace tangent à M en x.
- *Un champ de vecteurs sur M est une section du fibré tangent c'est à dire une application ($\mathcal{C}^\infty$) $s : M \to TM$ telle que $\pi_M \circ s = Id_M$. On note $\Gamma(M, TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M.*
- *Le **fibré cotangent** associé à M est le fibré dont les fibres sont duales de celles de $\pi_M : TM \to M$: la fibre au dessus d'un point x de M est l'espace vectoriel T_xM^* des formes sur l'espace tangent à M en x. Le fibré cotangent est noté $T^*M \to M$. Une section du fibré cotangent est appelée 1-forme différentielle.*
- *Si $E \to M$ et $E' \to M$ sont deux fibrés au dessus de M leur produit tensoriel, noté $E \otimes E' \to M$, est le fibré vectoriel dont la fibre au dessus de x est $(E \otimes E')_x := E_x \otimes E'_x$.*
- *Un **tenseur** d'ordre (p, q) est une section du fibré $TM^{\otimes p} \otimes T^*M^{\otimes q} \to M$. Exemple : Un tenseur $(0, 1)$ est une 1-forme différentielle.*
- *Une métrique sur M est un $(0, 2)$-tenseur sur M, non dégénéré et symétrique. C'est un moyen cohérent de se donner une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur chaque espace tangent T_xM. Un **métrique lorentzienne** est une métrique de signature $(-, +, +, +)$.*

En relativité générale, l'espace-temps est modélisé par une varieté lorentzienne (M, g) de dimension 4.

Définition 2.1.2. *Un vecteur tangent $\vec{u}$ en un point de M est dit*

- *isotrope (ou de type lumière) si $g(\vec{u}, \vec{u}) = 0$,*
- *de type espace si $g(\vec{u}, \vec{u}) > 0$,*
- *de type temps si $g(\vec{u}, \vec{u}) < 0$.*

*Un **observateur** est une courbe parametrée $C : I \to M$ dont le vecteur tangent $C'(t)$ est de type temps pour tout t dans l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Un **observateur en un point** x de M est un vecteur tangent à M en x de type temps et unitaire.*

De même que dans le cas de la relativité restreinte, tout observateur C admet un paramétrage $C : I \to M$ par le temps propre qui vérifie

$$g(C'(t), C'(t)) = -1$$

pour tout t dans I. Soit x un point de M et soient $\vec{u}$ et $vecv$ deux observateurs [2] au point x. Alors $\vec{u}$ se décompose de manière unique sous la forme $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \vec{w}$ où $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{v}$.

Définition 2.1.3. *La **vitesse de $\vec{u}$ vue par $\vec{v}$** est le vecteur $v_{\vec{u}/vecv}$ défini par*

$$\vec{v}_{\vec{u}/\vec{v}} = \frac{1}{\alpha} w$$

La vitesse scalaire est la g-norme du vecteur vitesse $|\vec{v}_{\vec{u}/\vec{v}}|^2 := g(\vec{v}_{\vec{u}/\vec{v}}, \vec{v}_{\vec{u}/\vec{v}})$.

2.2 Energie et impulsion pour les fluides v-parfaits :

Le but de cette sous section est de définir l'énérgie et l'impulsion vues par un observateur dans le cas où M ne contient quún fluide vraiment parfait.

Définition 2.2.1. *Un **fluide vraiment parfait** (abrégé en fluide v-parfait) est un champ de vecteurs $\vec{F}$ sur M, de type temps et dans l'orientation. Il existe un unique champs de vecteurs unitaires et dans l'orientation $\vec{u}$ et une unique fonction ρ sur M tels que $\vec{F} = \rho\vec{u}$. ρ est la densité de masse du fluide.*

Pour un fluide v-parfait et un point x de M, le vecteur $\vec{u}(x)$ est le vecteur tangent à l'unique courbe [3] du fluide paramétrée, par son temps propre, qui passe x. Nous sommes maintenant en mesure de définir la densité d'impulsion du fluide vue par un observateur $\vec{v}$ au point x de M :

Définition 2.2.2. *La **densité d'énergie** du fluide $\vec{F} = \rho\vec{u}$ vue par un observateur $\vec{v}$ au point x est*

$$\varepsilon_x(\vec{v}) = \frac{\rho(x)}{1 - |\vec{v}_{u(\vec{x})/\vec{v}}|_g^2}$$

Il est possible de réécrire la densité d'énergie à l'aide de la métrique g comme suit : en notant $\vec{u} := \vec{u}(x)$, et comme $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \vec{w}$, il vient

$$g(\vec{u}, \vec{v})^2 = \alpha^2 g(\vec{v}, \vec{v})^2 = \alpha^2$$

et

$$-1 = g(\vec{u}, \vec{u}) = \alpha^2 g(\vec{v}, \vec{v}) + |\vec{w}|^2 = -\alpha^2 + |vecw|^2 = -\alpha^2(1 - |\vec{v}_{u(\vec{x})/\vec{v}}|_g^2)$$

ce qui implique que $\alpha^2 = \frac{1}{1 - |\vec{v}_{u(\vec{x})/\vec{v}}|_g^2}$ d'où

$$\varepsilon_{\vec{v}} = \rho(x) g(\vec{u}, \vec{v})^2$$

Comme fonction de $\vec{v}$, la densité d'énergie en x se prolonge en une forme quadratique sur $T_x M$ puis en une forme bilinéaire symmétrique τ_x par la formule

$$\tau_x(\vec{v}, \vec{w}) = \rho(x) g(\vec{u}(x), \vec{v}) g(\vec{u}(x), \vec{w})$$

Ceci qui conduit naturellement à la définition du tenseur d'énergie-impulsion associé au fluide v-parfait $\vec{F}$:

Définition 2.2.3. *Le **tenseur d'énergie-impulsion** de $\vec{F}$ est le $(0, 2)$-tenseur τ défini par*

$$\tau_x := \rho(x) g(\vec{u}(x), \cdot) \otimes g(\vec{u}(x), \cdot)$$

2. Noter qu'ici les deux obervateurs sont au même point et que $\vec{v}$ est l'unité de temps pour le deuxième observateur
3. Une telle courbe représente la trajectoire d'une des "particules" constituant le fluide dans l'espace temps.

2.3 La mécanique Newtonnienne du point de vue des fluides

L'objectif de cette sous-section est de formaliser les lois de Newton pour un fluide classique afin de deviner celle qui régissent le mouvement d'un fluide v-parfait dans le contexte relativiste, en faisant en sorte de retrouver la mecanique Newtonnienne à "petite" vitesse.

En mécanique classique, le potentiel au point x créé par des masses m_1, ..., m_p situées en y_1,..., y_n (les y_i doivent être simultanés à x) est le nombre $f(x)$ donné par

$$f(x) = \sum_i \frac{m_i \kappa}{d(x, y_i)}$$

où κ est la constante de gravitation que l'on choisit égale à 1 pour la suite. Dans le cas d'un fluide de densité de masse ρ, le potentiel au point x est

$$f(x) = \int_{x+\mathrm{Ket}T} \rho(y) \frac{1}{d(x,y)} d\mu(y)$$

où μ est la mesure associée au produit scalaire sur Ker$T$. Ainsi, f est solution de **l'équation de Poisson** :

$$(a) \quad \Delta f = 4\pi\rho$$

où Δf est le laplacien (en espace) usuel associé au produit scalaire sur Ker$T$. La loi de Newton traduite sur les courbes du fluide s'écrit

$$(b) \quad \vec{a}(x) = -\vec{\mathrm{grad}} f(x)$$

Ici $\vec{a}(x)$ est la dérivée seconde de l'unique courbe du fluide (parametrée par le temps propre) passant par x.

2.4 L'axiomatique de la relativité générale

Il est temps à ce stade d'introduire le premier axiome de la relativité générale :

AXIOME I : **Les trajectoires des particules parametrées par leur temps propre sont des géodésiques pour la métrique g.** Pour l'instant, la notion de géodésique n'a pas été définie (elle le sera au paragraphe suivant). Une définition, équivalente à celle qui sera donnée par la suite, pourrait-être la suivante : une courbe $C : [t_0, t_1] \to M$ est une géodésique si elle minimise la fonctionnelle

$$\gamma \mapsto \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{-g(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt$$

où γ parcourt toutes les applications $\mathcal{C}^\infty$ de $[t_0, t_1]$ dans M dont les extrémités coïncident avec celles de C.

L'idée d'Einstein est de considérer que les particules n'interagissent pas entre elles par une forme d'attraction gravitationnelle comme dans le cas Newtonnien, mais que la présence de matière altère la courbure de l'espace-temps, prescrivant ainsi les trajectoires des particules qui sont supposées être des géodésiques. Les notions de courbure et de géodésique nécéssitent d'introduire un nouvel objet sur M : la connection.

2.4.1 Digression sur les connections

Définition 2.4.1. *Une **connection** sur un fibré $E \to M$ est une application $\mathcal{C}^\infty$*

$$\begin{array}{rcl} \nabla : \Gamma(M, TM) \otimes \Gamma(M, E) & \to & \Gamma(M, E) \\ X \otimes Y & \mapsto & \nabla_X(Y) \end{array}$$

qui vérifie les axiomes suivants :

1. *La règle de Leibniz :*

$$\nabla_X(fY) = df(X) \otimes Y + f\nabla_X(Y)$$

   pour toute section Y de E et toute fonction f sur M.

2. *Pour tout X champ de vecteur et pour toute fonction*

$$\nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X(Y)$$

3.

On peut prolonger une connection à toute conbinaison de produits tensoriels et de duaux de E en appliquant la règle de Leibniz pour les contractions [4] et les produits tensoriels, et en posant qu'elle doit coincider avec la différentiation dans le cas des fonctions vues comme 0-tenseurs. Par exemple, si ω est une 1-forme et X un champ de vecteur, la contraction de ω avec X, notée $\omega \cdots X$ est la fonction $x \mapsto \omega(x, X(x))$. Ainsi

$$d(\omega \cdot X)) = \nabla(\omega \cdot X) = \nabla(\omega) \cdot X + \omega \cdot \nabla(X)$$

d'où

$$\nabla(\omega) \cdot X = d(\omega \cdot X) - \omega \cdot nabla(X)$$

cette égalité permet de définir localement $\nabla(\omega)$ en choisissant une base de sections de E sur un ouvert trivialisant le fibré E.

Dans ce qui suit, le fibré E de départ est le fibré tangent $TM \to M$ et la connection permet de dériver des tenseur dans la direction d'un champ de vecteur en évitant de tomber dans le fibré tangent du fibré tangent. Ce n'est pas un $(1,1)$-tenseur car il n'y a pas $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéarité dans la deuxième composante (celle liée à E). Cependant

Remarque 2.4.2. *Si T est un (p,q)-tenseur, $\nabla(T)$ est $(p, q+1)$-tenseur appelé **dérivée covariante de** T.*

Il existe des connections sur M et l'une d'entre elles se distingue :

Théorème 2.4.3. *Toute varieté lorentzienne (M, g) admet une connection ∇, dite de Levi-Civita, qui satisfait les deux conditions suivantes :*

1. *∇ est sans torsion i.e*
$$\nabla(df)$$
*est un $(0,2)$-tenseur **symétrique** pour toute fonction f sur M.*
2. *La dérivée covariante de la métrique est nulle :*
$$\nabla(g) = 0$$

Dans ce qui suit, ∇ sera toujours la connection de Levi-Civita associée à (M, g). Nous allons maintenant examiner l'expression de ∇ dans un système de coordonnées (x^0, x^1, x^2, x^3) défini sur un ouvert U de M. Soit $\frac{\partial}{\partial x^1}$, ..., $\frac{\partial}{\partial x^3}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et dx^1, ..., dx^3 la base duale associée. Dans ces coordonnées, un champ de vecteurs X s'écrit sous la forme

$$X = \sum_{i=0}^{3} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Cette écriture signifie que si on note $\psi : x \in U \mapsto (x^0(x), \cdots, x^3(x))$ la carte correspondant aux fonctions coordonnées choisies :

$$X(\psi^{(-1)}(x^0, \cdots, x^3)) = (\psi^{(-1)}(x^0, \cdots, x^3), \sum_{i=0}^{3} X^i(x^0, \cdots, x^3) \frac{\partial}{\partial x^i})$$

dans $TU = U \otimes \mathbb{R}^4$.

La dérivée covariante de X s'écrit alors

$$\nabla(X) = \nabla(\sum_{i=0}^{3} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=0}^{3} X^i \nabla(\frac{\partial}{\partial x^i})$$

Notons que $\nabla(\frac{\partial}{\partial x^i})$ est une $(1,1)$-tenseur qui se décompose sous la forme

$$\nabla(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_{j,k=0}^{3} \Gamma_{ij}^k dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Définition 2.4.4. *Les fonctions Γ_{ij}^k, $i, j, k = 0, \cdots, 3$ sont appellées **symboles de Christoffel** de ∇.*

4. La contraction d'un tenseur (p, q) s'obtient en évaluant une composante covariante en une composante contravariante

A l'aide des symboles de Christoffel, la dérivée covariante de X prend la forme :

$$\nabla(X) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i,,k=0}^{3} X^i \Gamma_{ij}^k dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}$$

A partir de maintenant nous utiliserons la convention d'Einstein [5] qui consiste à considérer toute expression dans laquelle un même indice α est écrit deux fois comme elle même précédée du signe $\sum_{\alpha=0}^{3}$. Ainsi

$$\nabla(X) = \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} + X^i \Gamma_{ij}^k dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Les symboles de Cristoffel de la connection de Levi-Civita ont la proprieté de symétrie suivante

Proposition 2.4.5. *Pour tous i, j, k entiers entre* 0 *et* 3

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

Démonstration. La non torsion de ∇ s'écrit

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(dx^k)(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}(dx^k)(\frac{\partial}{\partial x^j})$$

ce qui est équivalent à l'égalité voulue. □

Les symboles de Christoffel sont entièrement déterminés par la métrique g :

Proposition 2.4.6. *Pour tous a, b et c dans* $\{0, 1, 2, 3\}$

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd}(\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab})$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la nullité de la dérivée covariante de g : Soit $(g_{ij})_{i,j=0\cdots 3}$ la matrice de g dans la base des dx^i

$$0 = \nabla(g) = \nabla(g_{ij}dx^i \otimes dx^j) = \partial_\alpha g_{ij} dx^\alpha \otimes dx^i \otimes dx^j - g_{ij}\Gamma_{\alpha\beta}^i dx^\alpha \otimes dx^\beta \otimes dx^j - g_{ij}\Gamma_{\alpha\beta}^j dx^i \otimes dx^\alpha \otimes dx^\beta$$

où $\partial_\alpha f := \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$. En évaluant $\nabla(g)$ sur $\frac{\partial}{\partial x^a} \otimes \frac{\partial}{\partial x^b} \otimes \frac{\partial}{\partial x^b}$ il vient :

$$\partial_a g_{bc} = g_{dc}\Gamma_{ab}^d + g_{ad}\Gamma_{bc}^d = 0$$

d'où, en utilisant la symétrie des symbole de Cristoffel en les indices covariants et celle de g :

$$\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab} = g_{db}\Gamma_{ac}^d + g_{ad}\Gamma_{bc}^d + g_{cd}\Gamma_{ab}^d + g_{bd}\Gamma_{ac}^d - g_{db}\Gamma_{ac}^d - g_{cd}\Gamma_{ab}^d = 2g_{cd}\Gamma_{ab}^d$$

Ainsi, si l'on note $(g^{ij})_{i,j}$ la matrice inverse de $(g_{ij})_{i,j}$:

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd}(\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab})$$

□

Associé à la connection, le $(1, 3)$-tenseur de courbure de Riemann mesure la "non platitude" de l'espace-temps M. Il est défini comme suit :

Définition 2.4.7. *Le tenseur de Riemann, noté* $\mathrm{Riem}(g)$ *est le* $(1, 3)$*-tenseur défini par*

$$\mathrm{Riem}(X, Y, Z) := \nabla_X \nabla_Y(Z) - \nabla_Y \nabla_X(Z) - \nabla_{[X,Y]}(Z)$$

où $[X, Y] := XY - YX$ est le crochet de Lie des champs de vecteurs X et Y vus comme dérivations de l'algèbre des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur M. Le terme où figure le crochet de Lie est nul si X et Y sont associés à des coordonnées (commutation des dérivées partielles par le lemme de Gauss).

5. Par exemple, $\sum_{i=0}^{3} a_i b^i$ s'écrira simplement $a_i b^i$.

Dans le système de coordonnées (x^0, x^1, x^2, x^3) les composantes de Riem sont données par

$$\mathrm{Riem}(g)^l_{ijk} = \partial_i \Gamma^l_{jk} + \Gamma^p_{jk}\Gamma^l_{ip} - \partial_j \Gamma^l_{ik} - \Gamma^p_{ik}\Gamma^l_{jp}$$

En contractant le tenseur de courbure de Riemann, on obtient le $(0,2)$-tenseur de courbure de Ricci :

Définition 2.4.8. *Le tenseur de courbure de Ricci de g, noté* $\mathrm{Ricci}(g)$ *est le tenseur de courbure obtenu en contractant le tenseur de courbure de Riemann selon le premier et dernier indice. Ces composantes dans le système de coordonnées (x^0, x^1, x^2, x^3) sont données par*

$$\mathrm{Ricci}(g)_{jk} := \mathrm{Riem}(g)^i_{ijk} = \partial_i \Gamma^i_{jk} + \Gamma^p_{jk}\Gamma^i_{ip} - \partial_j \Gamma^i_{ik} - \Gamma^p_{ik}\Gamma^i_{jp}$$

pour tous j et k dans $\{0, 1, 2, 3\}$.

Il reste à définir la notion de géodésique associée à la métrique via la connection :

Définition 2.4.9. *Une courbe paramétrée $C : I \to M$ est une géodésique si son accélération dans sa propre direction est nulle i.e*

$$\nabla_{C'(t)}(C'(t)) = 0$$

pour tout t dans I.

2.4.2 L'équation d'Einstein

Dans cette sous-sous-section nous allons tenter de déduire l'équation d'Einstein de l'axiome I) et du principe qui consiste à supposer qu'une particule de masse non nulle interfère avec les autres masses présentes dans l'espace temps en déformant ce dernier, liant ainsi le tenseur de courbure de Ricci et celui d'énergie-impulsion. A cette fin, il est indispensable de supposer l'existence [6] d'ouverts de cartes "proches" de ceux de la mécanique classique :

Définition 2.4.10. *Un* ***domaine statique*** *est un ouvert U de l'espace temps M, muni de coordonnées (x^0, x^1, x^2, x^3) dans lesquelles la matrice de la métrique g est de la forme :*

$$\begin{pmatrix} -f^2(x^1, x^2, x^3) & 0 \\ 0 & \bar{g}(x^1, x^2, x^3) \end{pmatrix}$$

où $\bar{g}$ est une matrice 3×3 qui ne dépend que des coordonnées "d'espace" x^1, x^2 et x^3.

Dans un ouvert statique les coefficients de Christoffel de g se simplifieraient de la manière suivante : Comme

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kp}(\partial_i g_{pj} + \partial_j g_{ip} - \partial_p g_{ij})$$

il est clair que

- $\Gamma^0_{00} = 0$,
- $\Gamma^0_{0j} = \Gamma^0_{j0} = \frac{1}{f}\partial_j f$ si $j > 0$,
- $\Gamma^k_{00} = -\frac{1}{2} g^{kp}\partial_p(-f^2) = f g^{kp}\partial_p f = f\mathrm{grad}^k(f)$ pour tout k dans $\{0, 1, 2, 3\}$,
- $\Gamma^k_{0j} = \Gamma^k_{j0} = 0$ si j et k sont strictement positifs,

A l'aide de ces relations, on peut écrire la composante dans la direction "temps" du tenseur de Ricci :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ricci}(g)_{00} &= \partial_i \Gamma^i_{00} + \Gamma^p_{00}\Gamma^i_{ip} - \partial_0 \Gamma^i_{i0} - \Gamma^p_{i0}\Gamma^i_{0p} \\
&= \partial_i(f\mathrm{grad}^i(f)) + f\Gamma^i_{ip}\mathrm{grad}^p(f) - 0 - 2f\mathrm{grad}^p(f)\frac{1}{f}\partial_p f \\
&= f(\partial_i \mathrm{grad}^i(f) + \Gamma^i_{ip}\mathrm{grad}^p(f)) \quad (i > 0) \\
&= f\Delta_{\bar{g}}(f)
\end{aligned}$$

Ici le laplacien $\Delta_{\bar{g}}(f)$ est défini comme la trace sur les indices strictements positifs du $(1,1)$-tenseur $\nabla(\mathrm{grad}(f))$.

Rappelons l'axiome prescrivant le mouvement des particules en relativité générale : **Les trajectoires des particules du fluides paramétrées par leur temps propre sont des géodésiques.**

Soit $c : I \to M$ une courbe du fluide paramétrée par son temps propre. Notons $(c'_0(t), c'_1(t), c'_2(t), c'_3(t))$ le vecteur tangent au point $c(t)$ vu dans la carte associée à l'ouvert statique considéré précédemment (celle des $\frac{partial}{\partial x^i}$). L'équation des géodésiques pour c s'écrit alors

$$\nabla_{c'(t)}(c'(t)) = 0 \Leftrightarrow \partial_j$$

6. De "bonnes" hypothèses assurant une telle existence seraient énoncées dans [Hawking-Ellis].