TD1 pour le cours Catégories Tensorielles

Friedrich Wagemann
Nantes Université

January 8, 2025

Exercice 1. Soient U, U', V et V' des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f : U \rightarrow U'$ et $g : V \rightarrow V'$ deux applications linéaires. On définit le produit tensoriel $f \otimes g : U \otimes V \rightarrow U' \otimes V'$ des deux applications f et g pour tout $u \in U$ et tout $v \in V$ par

$$(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v).$$

(a) Montrer que l'on obtient un isomorphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels

$$\lambda : \text{Hom}(U, U') \otimes \text{Hom}(V, V') \rightarrow \text{Hom}(U \otimes V, U' \otimes V')$$

en posant

$$\lambda(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v),$$

pourvu que au moins une des deux paires (U, U') ou (V, V') consiste d'espaces vectoriels de dimension finie.

(b) En déduire que $U^* \otimes V^* \cong (U \otimes V)^*$ si l'un des deux espaces vectoriels est de dimension finie.

(c) Supposons f et f' sont deux applications linéaires composables, de même que g et g' . Montrer que l'on a la loi d'échange

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

Exercice 2. Soient A_1 et A_2 deux algèbres et V_1 un A_1 -module, ainsi que V_2 un A_2 -module. Montrer que $V_1 \times V_2$ devient un $A_1 \times A_2$ -module en posant

$$(a_1, a_2) \cdot (v_1, v_2) = (a_1 \cdot v_1, a_2 \cdot v_2)$$

pour tous $a_i \in A_i$ et $v_i \in V_i$ avec $i = 1, 2$. Montrer que tout $A_1 \times A_2$ -module est de cette forme.

Exercice 3. Le socle d'un A -module M est la somme de tous les sous-modules irréductibles de M . On le note $\text{Soc}(M)$. Le radical de M est l'intersection de tous les sous-modules maximaux de M . On le notera $\text{Rad}(M)$.

Montrer qu'un A -module M est semi-simple si et seulement si $\text{Soc}(M) = M$. Montrer que si M est Artinien (i.e. satisfait à la condition de chaîne

descendante sur les sous-modules), alors M est semi-simple si et seulement si $\text{Rad}(M) = 0$. Montrer que dans ce cas, M est une somme directe finie de sous-modules irréductibles.

Exercice 4. Soit $f \in \text{End}(M)$ avec M un A -module Artinien et Noethérien. Supposons que $M = M_0 \oplus M_1$ où M_0 et M_1 sont des sous-modules, stabilisés par f tels que $f|_{M_0}$ soit nilpotent et $f|_{M_1}$ soit un automorphisme. Montrer que $M_0 = f^{-\infty}0$ et $M_1 = f^{\infty}M$.

Exercice 5. Soit V un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que V est naturellement un A -module (à droite) irréductible pour $A = \text{End}(V)$. Est-ce encore vrai si $\mathbb{K}$ n'est qu'une algèbre à division ? Ou si V n'est pas de dimension finie ?

Exercice 6. Soit A une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative Noethérienne et Artinienne. Montrer que si A est indécomposable (en tant qu'algèbre), alors A est locale. En général, montrer que A est un produit direct d'algèbres locales qui sont toutes Noethériennes et Artiniennes.