TD2 pour le cours Catégories Tensorielles

Friedrich Wagemann
Nantes Université

January 21, 2025

Exercice 1. Soit G un groupe fini, et $\mathbb{C}[G] = \text{Map}(G, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de toutes les applications de G vers $\mathbb{C}$. On munit $\mathbb{C}[G]$ du produit de convolution, défini pour tous $f, g \in \mathbb{C}[G]$ et tout $x \in G$ par

$$(fg)(x) = \sum_{y \in G} f(y)g(y^{-1}x).$$

(a) Exhiber l'unité pour le produit de convolution et montrer que $\mathbb{C}[G]$ devient ainsi une algèbre associative unitaire.

(b) Montrer que l'application linéaire

$$f \mapsto \sum_{x \in G} f(x)x$$

est un isomorphisme de l'algèbre associative $\mathbb{C}[G]$ avec l'algèbre associative $\mathbb{C}G$, sous-jacente sous l'algèbre du groupe de G .

(c) Montrer comment transférer coproduit, counité et antipode afin d'obtenir que $\mathbb{C}[G]$ devienne une algèbre de Hopf isomorphe à $\mathbb{C}G$.

Exercice 2. Soit H une bigèbre. Montrer que l'ensemble $\mathcal{G}(H)$ des éléments de type groupe, i.e. des $x \in H$ tels que $\Delta(x) = x \otimes x$, est un monoïde pour le produit de H avec unité $1 \in H$. De plus, si H admet une antipode S , montrer que tout élément $x \in \mathcal{G}(H)$ admet un inverse dans $\mathcal{G}(H)$, i.e. que $\mathcal{G}(H)$ est un groupe.

Exercice 3. Soit H une algèbre de Hopf, A une algèbre commutative et C une cogèbre cocommutative. Montrer que les ensembles $\text{Hom}_{\text{alg}}(H, A)$ des morphismes d'algèbres et $\text{Hom}_{\text{cog}}(C, H)$ des morphismes de cogèbre forment des groupes pour la convolution, l'inverse de f étant donné par $f \circ S$, resp. $S \circ f$.