TD3 pour le cours Catégories Tensorielles

Friedrich Wagemann
Nantes Université

January 22, 2025

Exercice 1. Montrer que l'inclusion canonique $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ est un épimorphisme dans la catégorie des anneaux. Montrer que l'inclusion canonique $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est un épimorphisme dans la catégorie des espaces topologiques séparés.

Exercice 2. Utiliser la dualité de Pontryagin pour montrer que la catégorie $\mathcal{C}$ des groupes abéliens finis est isomorphe à sa catégorie opposée $\mathcal{C}^{\text{op}}$. Pourquoi ceci est faux pour la catégorie des groupes abéliens de torsion toute entière ?

Exercice 3. Soient A et $(C_i)_{i \in I}$ des objets d'une catégorie additive $\mathcal{C}$ tel que le produit $\prod_{i \in I} C_i$ et le coproduit $\coprod_{i \in I} C_i$ existent. Montrer

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \prod_{i \in I} C_i) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C_i), \text{ et } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\coprod_{i \in I} C_i, A) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_i, A).$$

Exercice 4. Soient X et Y deux objets d'une catégorie additive.

- (a) Montrer que le produit $X \times Y$ (qui vient avec des morphismes $p_X : X \oplus Y \rightarrow X$ et $p_Y : X \oplus Y \rightarrow Y$) admet des morphismes $i_X : X \rightarrow X \oplus Y$ et $i_Y : Y \rightarrow X \oplus Y$ tels que $p_X i_X = \text{id}_X$, $p_X i_Y = 0$, $p_Y i_X = 0$, $p_Y i_Y = \text{id}_Y$ et

$$i_X p_X + i_Y p_Y = \text{id}_{X \oplus Y}.$$

- (b) Montrer que le produit $X \times Y$ et le coproduit $X \amalg Y$ sont canoniquement isomorphes. On le notera $X \oplus Y$ et on l'appellera la somme de X et Y .

- (c) Montrer que la somme $X \oplus Y$ est caractérisée par l'existence de morphismes $i_X : X \rightarrow X \oplus Y$, $i_Y : Y \rightarrow X \oplus Y$, $p_X : X \oplus Y \rightarrow X$ et $p_Y : X \oplus Y \rightarrow Y$ tels que $p_X i_X = \text{id}_X$, $p_X i_Y = 0$, $p_Y i_X = 0$, $p_Y i_Y = \text{id}_Y$ et

$$i_X p_X + i_Y p_Y = \text{id}_{X \oplus Y}.$$

Exercice 5. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\ \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \gamma_3 & & \downarrow \gamma_4 & & \downarrow \gamma_5 \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5 \end{array}$$

un diagramme commutatif dans $\mathcal{C}$ avec des lignes exactes. Montrer que

- (a) Si γ_1 est un épimorphisme et γ_2 et γ_4 sont des monomorphismes, alors γ_3 est un monomorphisme.
- (b) Si γ_5 est un monomorphisme et γ_2 et γ_4 sont des épimorphismes, alors γ_3 est un épimorphisme.
- (c) Si γ_1 est un épimorphisme, γ_5 est un monomorphisme et γ_2 et γ_4 sont des isomorphismes, alors γ_3 est un isomorphisme.