TD4 pour le cours Catégories Tensorielles

Friedrich Wagemann
Nantes Université

February 2, 2025

Exercice 1. *Montrer que la somme (appelée somme de Baer) de suites exactes (dont la construction est esquissée dans la Section 3.1 du cours) est associative, commutative et unitaire. Pour cela:*

(a) *Montrer que $\text{Ext}^1(-, -)$ est un foncteur en les deux variables. (Utiliser le pullback resp. le pushout afin d'induire une suite exacte à partir d'un morphisme sur le terme à droite, resp. à gauche de la suite.) On notera $\alpha^* : \text{Ext}^1(A, B) \rightarrow \text{Ext}^1(A', B)$ la flèche induite par $\alpha : A' \rightarrow A$, et $\beta_* : \text{Ext}^1(A, B) \rightarrow \text{Ext}^1(A, B')$ la flèche induite par $\beta : B \rightarrow B'$.*

(b) *Montrer que pour $\alpha_1, \alpha_2 : A' \rightarrow A$, on a*

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^* = \alpha_1^* + \alpha_2^* : \text{Ext}^1(A, B) \rightarrow \text{Ext}^1(A', B).$$

(c) *En déduire que la somme de Baer est associative, commutative et exhiber l'élément neutre.*

Exercice 2. *Calculer le Ext dans la catégorie des groupes abéliens pour tout groupe abélien de type fini.*

Exercice 3. (a) *Montrer qu'un objet P dans la catégorie abélienne $R\text{-mod}$ est projectif si et seulement si pour tout épimorphisme $\pi : A \rightarrow B$ et tout morphisme $f : P \rightarrow B$, il existe un morphisme $g : P \rightarrow A$ tel que $\pi \circ g = f$. En déduire que tout R -module libre est projectif. Montrer que toute somme de modules est projective si et seulement si chaque facteur est projectif.*

(b) *Montrer qu'un objet I dans la catégorie abélienne $R\text{-mod}$ est injectif si et seulement si pour tout monomorphisme $i : A \rightarrow B$ et tout morphisme $f : A \rightarrow I$, il existe un morphisme $g : B \rightarrow I$ tel que $g \circ i = f$.*

Exercice 4. *Calculer avec tous les détails la cohomologie des groupes cycliques (cf Remark 3.15 du cours).*