TD5 pour le cours Catégories Tensorielles

Friedrich Wagemann
Nantes Université

February 9, 2025

Exercice 1. *Montrer que le sous-quotient d'un sous-quotient d'un objet Y dans une catégorie abélienne est un sous-quotient de Y .*

Exercice 2. (a) *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne où tous les objets ont une longueur finie. Montrer que $\mathcal{C}$ admet une unique décomposition $\mathcal{C} = \bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{C}_\alpha$ telle que les $\mathcal{C}_\alpha$ soient indécomposables. On appelle les $\mathcal{C}_\alpha$ les blocks de $\mathcal{C}$.*

(b) *Montrer que $\mathcal{C}$ est indécomposable si et seulement si toute paire d'objets simples (X, Y) de $\mathcal{C}$ est liée, i.e. il existe une chaîne $X = X_0, X_1, \dots, X_n = Y$ d'objets simples dans $\mathcal{C}$ telle que pour tout $i = 0, \dots, n-1$, on ait $\text{Ext}^1(X_i, X_{i+1}) \neq 0$ ou $\text{Ext}^1(X_{i+1}, X_i) \neq 0$.*

(c) *Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$ et soit $\mathcal{C}$ la catégorie abélienne des A -modules de dimension finie. Montrer que les blocks de $\mathcal{C}$ sont étiquetés par les caractères du centre de A .*

Exercice 3. *Montrer qu'un foncteur $F : A\text{-mod} \rightarrow \text{Vec}$ d'une catégorie abélienne finie $\mathcal{C} = A\text{-mod}$ est $\otimes$ -représentable si et seulement si il a un adjoint à droite.*

Exercice 4. *Soit A une algèbre associative. Montrer que pour tout choix de n éléments $a_1, \dots, a_n$ de A est tout choix de parenthésage de $(a_1, \dots, a_n)$, le produit donne le même résultat.*

Exercice 5. *Soit $\mu : H \rightarrow G$ un module croisé de groupes, i.e. μ est un homomorphisme de groupes, le groupe G agit sur le groupe H par automorphismes et action et μ sont compatibles dans le sens que pour tous $g \in G$ et $h, h' \in H$:*

(a) $\mu(g \cdot h) = g\mu(h)g^{-1}$ et

(b) $\mu(h) \cdot h' = hh'h^{-1}$.

Montrer que le produit semi-direct $H \rtimes G$ est une petite catégorie avec ensemble d'objets égal à G , ensemble des morphismes égal à $H \rtimes G$, application source $s : H \rtimes G \rightarrow G, (h, g) \mapsto g$, application but $t : H \rtimes G \rightarrow G, (h, g) \mapsto \mu(h) \cdot g$ et application identités $i : G \rightarrow H \rtimes G, g \mapsto (1, g)$. La composition de morphismes

est donnée en fonction du produit de groupe sur $H \rtimes G$ pour $f, g \in H \rtimes G$ (avec $t(f) = s(g)$) par

$$g \circ f = f(i(b))^{-1}g,$$

où $t(f) = b \in G$.

Montrer que cette catégorie est monoïdale par rapport au produit sur $H \rtimes G$.

Exercice 6. Soit G un groupe, A un groupe abélien, vu comme G -module trivial, et ω un 3-cocycle sur G à coefficients dans A . Ceci veut dire explicitement que pour tous $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$ (A est écrit multiplicativement !)

$$\omega(g_1g_2, g_3, g_4)\omega(g_1, g_2, g_3g_4) = \omega(g_1, g_2, g_3)\omega(g_1, g_2g_3, g_4)\omega(g_2, g_3, g_4).$$

Considérons la catégorie $\mathcal{C}_G^\omega$ dont les objets δ_g sont indexés par les éléments $g \in G$ et les morphismes sont $\text{Hom}_{\mathcal{C}_G^\omega}(\delta_{g_1}, \delta_{g_2}) = \emptyset$ si $g_1 \neq g_2$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}_G^\omega}(\delta_g, \delta_g) = A$. Vérifier qu'il s'agit bien d'une catégorie.

On définit un produit tensoriel sur $\mathcal{C}_G^\omega$ par $\delta_g \otimes \delta_h = \delta_{gh}$ sur les objets et $a \otimes b = ab$ sur les morphismes. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit tensoriel fonctoriel ! Quel est l'unité du produit tensoriel ?

Montrer que $\mathcal{C}_G^\omega$ est une catégorie monoïdale avec contrainte d'associativité donnée par

$$a_{\delta_g, \delta_h, \delta_m} = \omega(g, h, m)\text{id}_{ghm} : (\delta \otimes \delta_h) \otimes \delta_m \rightarrow \delta_g \otimes (\delta_h \otimes \delta_m).$$

Au cours des vérifications, on prendra soin d'expliciter les contraintes d'unitalité à gauche et à droite. Vérifier que si ω est normalisé (i.e. pour tous $g, h \in G$, on a $\omega(g, h, 1) = \omega(1, g, h) = \omega(g, 1, h) = 1$), alors $l_X = r_X = \text{id}_X$ pour tout objet X de $\mathcal{C}_G^\omega$.