TD6 pour le cours Catégories Tensorielles

Friedrich Wagemann
Nantes Université

February 26, 2025

Exercice 1. Soit $\mathbb{K}$ un corps et fixons un élément inversible $k \in \mathbb{K}$. Montrer que la catégorie monoïdale $\text{Vect}_{\mathbb{Z}}$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels $\mathbb{Z}$ -gradués (Exemple 5.10 du cours avec $G = \mathbb{Z}$) devient une catégorie monoïdale tressée grâce à la formule

$$c(x \otimes y) = k^{pq}(y \otimes x),$$

pour tout $x \in V_p$ et tout $y \in W_q$. Que se passe-t-il si k n'est pas inversible ?

Exercice 2. Voici une variante (sans 3-cocycle) de l'Exemple 5.11 du cours: Soit R un anneau. On définit la catégorie $\mathcal{C}_R$ d'avoir comme objets les $x \in R$ et pour morphismes les $\text{Hom}_{\mathcal{C}_R}(x, y) = \emptyset$ si $x \neq y$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}_R}(x, x) = R$. Le produit tensoriel est donné (comme dans l'Exemple 5.11) sur les objets par $x \otimes y = x + y$ et sur les morphismes aussi par l'addition dans R . Ceci définit une catégorie monoïdale stricte.

Montrer que la prescription

$$c = (x + y \xrightarrow{xy} y + x)$$

définit (pour tous $x, y \in R$) un tressage pour la catégorie $\mathcal{C}_R$. Sous quelle condition ce tressage est-il une symétrie, i.e. vérifie $c^2 = \text{id}$? Est-ce que vous connaissez des anneaux qui vérifient cette condition ?

Exercice 3. Considérons la catégorie monoïdale $\mathcal{C}_G^\omega$ associée à un groupe G et un 3-cocycle ω sur G à valeurs dans un groupe abélien A , introduite dans l'Exo 6 du TD5. Montrer que un foncteur monoïdal $F : \mathcal{C}_G^\omega \rightarrow \mathcal{C}_H^\zeta$ (pour un autre groupe H et un 3-cocycle ζ sur H à valeurs dans A) donne lieu par restriction aux objets simples à un homomorphisme de groupes $f : G \rightarrow H$. Nous supposons dans la suite que F est l'identité sur les morphismes. Quelle forme explicite doit avoir φ_2 dans ce contexte ? Dédurre de cette forme que les cocycles ω et ζ sont liés par

$$\omega = f^* \zeta d\mu,$$

pour une certaine 2-cochaîne $\mu : G \times G \rightarrow A$.

Réciproquement, définir un foncteur monoïdal F comme ci-dessus à partir d'un homomorphisme de groupes $f : G \rightarrow H$ et une 2-cochaîne μ . Sous quelle condition, ce foncteur est-il une équivalence monoïdale ?