Catégories tensorielles

Friedrich Wagemann
Nantes Université

March 16, 2025

Ce sont les notes de mon cours de master 2 sur les catégories tensorielles.

1 Préliminaires algébriques

Dans cette section, nous présentons les bases algébriques de ce cours. Les thèmes principaux seront le produit tensoriel, la théorie élémentaire de représentations et l'introduction des structures algébriques de base, comme les algèbres associative, les cogèbres coassociatives, les algèbres de Lie, les algèbres de Hopf, ainsi que des exemples.

1.1 Le produit tensoriel

Référence: [9] Ch. II, p.23.

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soient U et V des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'espace des applications linéaires de U vers V est noté $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U,V)$, et l'espace des endomorphismes de U sera noté $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(U)$. Pour un troisième espace vectoriel W, l'espace des applications bilinéaires de $U \times V$ vers W sera noté $\mathrm{Bil}(U \times V, W)$. Le *produit tensoriel* $U \otimes V$ se caractérise par la propriété universelle suivante:

Proposition 1.1. *Étant donné deux espaces vectoriels U et V, il existe un espace vectoriel $U \otimes V$ et une application bilinéaire $\pi : U \times V \to U \otimes V$ avec la propriété universelle suivante: pour tout espace vectoriel W, l'application linéaire*

$$\mathrm{Bil}(U \times V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U \otimes V, W), \quad f \mapsto f \circ \pi$$

est un isomorphisme.

Cette propriété caractérise l'espace vectoriel $U \otimes V$ à isomorphisme canonique près.

Démonstration. Nous ferons ici une esquisse de preuve. Plus de renseignements se trouveront dans [9] Section II.1.

L'espace vectoriel $U \otimes V$ est défini comme le quotient de l'espace vectoriel libre $\mathbb{K}[U \times V]$ sur l'ensemble $U \times V$ par le sous-espace engendré par les éléments

$$(u+u', v)-(u, v)-(u', v),\ (u, v+v')-(u, v)-(u, v'),\ (\lambda u, v)-\lambda(u, v),\ (u, \mu v)-\mu(u, v),$$

pour tous $u, u' \in U$, tous $v, v' \in V$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. L'appplication $\pi : U \times V \to U \otimes V$ est le passage au quotient et les images $\pi(u, v)$ sont notées $u \otimes v$. L'application π est bilinéaire par construction. □

Si les espaces vectoriels U and V sont de dimension finie avec des bases $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de U et $\{v_1, \ldots, v_m\}$ de V, l'espace vectoriel $U \otimes V$ est de dimension nm et admet $\{u_i \otimes v_j \,|\, i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$ comme base. Un élément général de $U \otimes V$ est une somme finie d'éléments de la forme $u \otimes v$ pour $u \in U$ rt $v \in V$.

Corollary 1.2. *Pour tout triplet d'espaces vectoriels (U, V, W), on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U \otimes V, W) \cong \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)).$$

Démonstration. L'isomorphisme est induit par $(f : U \otimes V \to W) \mapsto (u \mapsto (v \mapsto f(u \otimes v)))$. Son inverse est induit par $(g : U \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)) \mapsto (u \otimes v \mapsto g(u)(v))$. Notons qu'il suffit, par linéarité, de définir cette dernière application sur des tenseurs élémentaires, i.e. de la forme $u \otimes v$. □

Le produit tensoriel satisfait les propriétées suivantes d'associativité, d'unitalité et de symétrie.

Proposition 1.3. *Soient U, V et W des espaces vectoriels. Les applications suivantes sont des isomorphismes naturels:*

$$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W), \quad (u \otimes v) \otimes w \mapsto u \otimes (v \otimes w),$$

pour tous $u \in U$, $v \in V$ et $w \in W$,

$$\mathbb{K} \otimes U \cong U \otimes \mathbb{K} \cong U, \quad \lambda \otimes u \mapsto u \otimes \lambda \mapsto \lambda u,$$

pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et tous $u \in U$, et

$$U \otimes V \cong V \otimes U, \quad u \otimes v \mapsto v \otimes u$$

Ces isomorphismes naturels vont être notés plus tard $a_{U,V,W}$, la *contrainte d'associativité*, $l_U : \mathbb{K} \otimes U \to U$, la *contrainte d'unitalité à gauche*, $r_U : U \otimes \mathbb{K} \to U$, la *contrainte d'unitalité à droite* et $\tau_{U,V}$, la *contrainte de symétrie* ou le *flip*.

De plus, on a la compatibilité du produit tensoriel avec la somme directe et le produit direct, voir [9] Section II.1.

1.2 Algèbres et modules

Référence: [9], Ch. III, p. 39.

Une $\mathbb{K}$-*algèbre* ou simplement *algèbre* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A avec un produit associatif linéaire $\mu : A \otimes A \to A$ et une unité $1 \in A$. Les axiômes d'être une algèbre peuvent être exprimés en termes de diagrammes commutatifs. En effet, la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A\otimes A & \xrightarrow{\mathrm{id}_A\otimes\mu} & A\otimes A \\ \downarrow{\scriptstyle \mu\otimes\mathrm{id}_A} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ A\otimes A & \xrightarrow{\mu} & A \end{array}$$

exprime l'associativité du produit μ. Notons que dans le coin supérieur à gauche, nous avons utilisé la contrainte d'associativité afin d'idientifier $(A\otimes A)\otimes A \cong A\otimes(A\otimes A)$. Dans ce langage, l'unité $1 \in A$ est codée en tant qu'application linéaire $\eta : \mathbb{K} \to A$, qui envoie l'unité de $\mathbb{K}$ sur l'unité de A. La commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K}\otimes A & \xrightarrow{\eta\otimes\mathrm{id}_A} & A\otimes A & \xleftarrow[\mathrm{id}_A\otimes\eta]{} & A\otimes\mathbb{K} \\ & \searrow^{\cong} & \downarrow{\scriptstyle \mu} & \swarrow_{\cong} & \\ & & A & & \end{array}$$

exprime alors l'unitalité du produit μ. La possible commutativité de l'algèbre A (que nous ne demandons pas systématiquement et que nous indiquerons, si elle est imposée) peut être exprimée par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A & \xrightarrow{\tau_{A,A}} & A\otimes A \\ & \searrow_{\mu} \quad \swarrow_{\mu} & \\ & A & \end{array}$$

Un *A-module* (ou, plus précisément, un A-module à gauche) M est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel M avec une application linéaire $\rho : A \otimes M \to M$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A\otimes M & \xrightarrow{\mathrm{id}_A\otimes\rho} & A\otimes M \\ \downarrow{\scriptstyle \mu\otimes\mathrm{id}_M} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ A\otimes M & \xrightarrow{\rho} & M \end{array}$$

Notons que ceci est le même diagramme que le diagramme d'associativité de μ, mais le facteur le plus à droite est remplacée par M et trois occurrences de μ sont remplacées par ρ. Le diagramme s'appelle celui de l'associativité du A-module M.

1.3 Le Théorème de Jordan-Hölder

Référence: [2], Ch. 1, Section 1.1, p. 1.

La théorie des représentations pose la question comment décomposer un A-module M en sous-espaces qui sont encore des A-modules. Rappelons qu'un A-module est appelé *irréductible* ou *simple* si ces seuls sous-A-modules sont M et $\{0\}$. Un A-module M est appelé *indécomposable* s'il n'admet pas de décomposition en somme directe de sous-A-modules propres. Évidemment, un A-module irréductible est indécomposable, mais la réciproque est fausse en général.

Dans des situations favorables, le A-module M se décompose en somme directe de sous-A-modules irréductibles. Ceci est le cas, par exemple, pour les G-modules complexes de dimension finie d'un groupe fini G (Théorème de Maschke). En général, l'exigence d'une décomposition en somme directe de sous-modules irréductibles est trop forte. La notion mieux adaptée au cas général est celle d'une *suite de composition*:

Definition 1.4. *Un A-module M admet une suite de composition s'il existe une suite de sous-A-modules*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$$

tels que M_i/M_{i-1} est irréductible pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Le Théorème de Jordan-Hölder affirme l'existence et l'unicité d'une suite de composition dans des situations où des suites croissantes et décroissantes de sous-modules deviennent stationnaires. Pour cela, nous aurons besoin de quelques préparatifs:

Lemma 1.5. *Si X et $Y \supset Z$ sont des sous-A-modules d'un A-module M, alors*

$$(Z + X) \cap Y = Z + (X \cap Y).$$

Démonstration. Clairement $Z + (X \cap Y) \subset (Z + X) \cap Y$, puisqu'un élément du côté gauche est la somme d'éléments de la forme $z+x$ avec $z \in Z$ et $x \in X \cap Y$ et $z+x$ est dans $Z+X$ et donc aussi dans Y. Réciproquement, soit $y = z+x$ dans $(Z+X)\cap Y$. Alors $x = y-z$ est dans $X\cap Y$, et donc $y = z+x \in Z+(X\cap Y)$. □

Proposition 1.6 (Théorème d'isomorphisme de Zassenhaus)**.** *Soient $U \supset V$ et $U' \supset V'$ des sous-A-modules d'un A-module M. Alors il existe des isomorphismes*

$$\frac{(U + V') \cap U'}{(V + V') \cap U'} \cong \frac{U \cap U'}{(U' \cap V) + (U \cap V')} \cong \frac{(U' + V) \cap U}{(V' + V) \cap U}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer le premier isomorphisme, le deuxième est ensuite obtenu en échangeant les rôles de $U \supset V$ et $U' \supset V'$.

Le morphisme du terme du milieu vers celui de gauche est induit par la composé

$$U \cap U' \hookrightarrow (U + V') \cap U' \to ((U + V') \cap U')/((V + V') \cap U').$$

Son noyau est

$$(U \cap U') \cap ((V + V') \cap U') = U \cap (V + V') \cap U' = (U' \cap V) + (U \cap V')$$

en utilisant deux fois le lemme. □

Theorem 1.7 (Théorème de Jordan-Hölder)**.** *Soit M un A-module et considérons deux suites de sous-A-modules*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r = M,$$

et

$$0 = M'_0 \subset M'_1 \subset \ldots \subset M'_s = M.$$

Alors il existe des raffinements de ces suites en suites de même longueur en insérant des termes intermédiaires

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n = M,$$

et

$$0 = L'_0 \subset L'_1 \subset \ldots \subset L'_n = M.$$

tels que les quotients L_i/L_{i-1} sont une permutation des quotients L'_j/L'_{j-1} à isomorphisme près. Ainsi les conditions suivantes sur M sont équivalentes:

(a) M admet une suite de composition.

(b) Toute suite de sous-modules de M se raffine en une suite de composition.

(c) M satisfait à la condition de chaîne croissante et à la condition de chaîne décroissante pour ses sous-A-modules.

Démonstration. Afin de raffiner les suites ci-dessus, on peut insérer des termes $(M'_j + M_i) \cap M_{i+1}$ entre M_i et M_{i+1} pour la première suite, et des termes $(M'_j + M_i) \cap M'_{j+1}$ entre M'_j et M'_{j+1} pour la deuxième suite. Le Théorème d'isomorphisme de Zassenhaus montre alors que les quotients correspondants sont isomorphes. □

On déduit de ce théorème que la *longueur de composition* (si elle existe) est un invariant du A-module.

1.4 Le Théorème de Krull-Schmidt

Référence: [8], Ch. 3, Section 3.4, p. 110.

Le Théorème de Krull-Schmidt est un autre outil de la Théorie des représentations élémentaire qui est vrai dès que les modules ont longueur finie. Il s'agit de montrer qu'un module de longueur finie admet une unique décomposition en indécomposables. De nouveau, nous aurons besoin de quelques préparations avant d'y arriver.

D'abord, il y a une correspondence entre décompositions d'un module M en somme direct et idempotents orthogonaux dans l'algèbre $\mathrm{End}(M)$. En effet,

étant donné une décomposition de M en somme directe $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$, les inclusions $i_j : M_j \to M$ et les projections $p_j : M \to M_j$ se composent en $e_j := i_j\, p_j \in \mathrm{End}(M)$. Ces e_j sont des idempotents (i.e. $e_j^2 = e_j$) orthogonaux ($e_j\, e_k = 0$ si $j \neq k$) dont la somme est l'identité: $e_1 + \ldots + e_n = \mathrm{id}_M$.

Dans la situation ci-dessus, on pose $M_j' := i_j(M) = i_j\, p_j(M) = e_j(M)$. Alors $x \in M$ se décompose en $x = \sum_{i=1}^n e_j x$ avec $x_j := e_j x \in M_j'$. On a alors $e_j x_j = x_j$ et $e_k x_j = 0$ si $k \neq j$. Ceci implique que

$$M_j' \cap (M_1' + \ldots + M_{j-1}' + M_{j+1}' + \ldots M_n') = 0,$$

pour tout $j = 1, \ldots, n$. Réciproquement, si un module M contient des sous-modules $M_1, \ldots, M_n$ qui satisfont aux deux conditions

$$M = M_1 + \ldots + M_n, \quad M_j \cap (M_1 + \ldots + M_{j-1} + M_{j+1} + \ldots M_n) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n,$$

alors M est la somme directe des M_j.

Rappelons qu'un module M est appelé *décomposable* s'il s'écrit $M = M_1 \oplus M_2$ avec $M_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$. Dans le cas contraire, M est appelé *indécomposable*.

Proposition 1.8. *Un module $M \neq 0$ est indécomposable si et seulement si* $\mathrm{End}(M)$ *ne contient pas d'idempotent autre que* 0 *et* id_M.

Démonstration. Si M est décomposable, nous avons vu comment construire des idempotents (différents de 0 et id_M) dans $\mathrm{End}(M)$. Réciproquement, étant donné un idempotent $e \neq 0, \mathrm{id}_M$, on pose $e_1 = e$ et $e_2 = \mathrm{id}_M - e$. Alors, (e_1, e_2) forme une paire d'idempotents orthogonaux qui somment à l'identité. M se décompose alors comme avant en somme directe $M = M_1 \oplus M_2$ avec $M_j = e_j(M)$ et $M_j \neq 0$. □

Rappelons qu'un anneau A est appelé *local* s'il n'admet qu'un seul idéal maximal. Il est équivalent de demander que l'ensemble des non-inversibles dans A est un idéal. Un anneaux local ne peut contenir autres idempotents que 0 et 1. Ainsi, si $\mathrm{End}(M)$ est local, le module M est indécomposable. On appelle un module M *fortement indécomposable* si $M \neq 0$ et $\mathrm{End}(M)$ est local.

Proposition 1.9. *Soient*

$$M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n, \quad N = N_1 \oplus \ldots \oplus N_m$$

où les M_j sont fortement indécomposables et les N_i sont indécomposables, et supposons $M \cong N$. Alors $m = n$ et il existe une permutation σ telle que $M_j \cong N_{\sigma(j)}$ pour tous $j = 1, \ldots n$.

D'abord, on va démontrer le lemme suivant:

Lemma 1.10. *Soient M et N des modules tels que N est indécomposable et $M \neq 0$. Soient $f : M \to N$ et $g : N \to M$ deux homomorphismes tels que gf est un automorphisme de M. Alors f et g sont deux isomorphismes.*

Démonstration. Soit k l'inverse de gf, donc $kgf = \mathrm{id}_M$. Posons $l := kg : N \to M$. Alors $lf = \mathrm{id}_M$, et si l'on pose $e = fl : N \to N$, alors $e^2 = flfl = f\,\mathrm{id}_M\, l = fl = e$. Puisque N est indécomposable, on a nécessairement $e = \mathrm{id}_N$ ou $e = 0$. Ce dernier cas est impossible, puisque on aurait $\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_M^2 = lflf = lef = 0$ ce qui contredit $M \neq 0$. Donc $fl = e = \mathrm{id}_N$ et f est un isomorphisme, ainsi que $g = k^{-1}f^{-1}$. □

Démonstration de la Proposition 1.9. On démontre la proposition par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est clair: un module indécomposable M ne peut être isomorphe à une somme directe non-triviale, donc $m = 1$. Supposons $n > 1$. Soient $e_1, \ldots, e_n$ les projections déterminées par la décomposition de M et $f_1, \ldots, f_m$ celles données par la décomposition de N. Soit $g : M \to N$ l'isomorphisme de M dans N. On pose

$$h_j = f_j g e_1, \quad k_j = e_1 g^{-1} f_j, \quad \forall j = 1, \ldots, m.$$

Alors

$$\sum_{j=1}^{m} k_j h_j = \sum_{j=1}^{m} e_1 g^{-1} f_j g e_1 = e_1 g^{-1} (\sum_{j=1}^{m} f_j) g e_1 = e_1 g^{-1} \mathrm{id}_N g e_1 = e_1.$$

Les restrictions de e_1 et $k_j h_j$ à M_1 envoient M_1 sur M_1, donc elles peuvent être regardées comme endomorphismes e_1', $(k_j h_j)'$ de M_1. Puisque $M_1 = e_1(M)$ et $e_1^2 = e_1$, on a $e_1' = \mathrm{id}_{M_1}$. D'où $\mathrm{id}_{M_1} = \sum_{j=1}^{m} (k_j h_j)'$. Or, $\mathrm{End}(M_1)$ est local, donc un des $(k_j h_j)'$ est une unité, et donc un automorphisme de M_1. En réordonnant les N_j, on peut supposer $j = 1$, et on a donc que $(k_1 h_1)'$ est un automorphismes de M_1. La restriction de h_1 à M_1 peut être regardée comme un homomorphisme h_1' de M_1 vers N_1. De même, k_1 donne lieu à un homomorphisme $k_1' : N_1 \to M_1$ tel que $k_1' h_1' = (k_1 h_1)'$ est un automorphisme. Par le lemme, $h_1' = (f_1 g e_1)' : M_1 \to N_1$ et $k_1' = (e_1 g^{-1} f_1)' : N_1 \to M_1$ sont des isomorphismes.

Montrons que $M = g^{-1}N_1 \oplus (M_2 + \ldots + M_n)$.

En effet, soit $x \in g^{-1}N_1 \cap (M_2 + \ldots + M_n)$. Alors $e_1 x = 0$, puisque $x \in M_2 + \ldots + M_n$, et $x = g^{-1}y$ pour un $y \in N_1$. D'où $0 = e_1 x = e_1 g^{-1} y = e_1 g^{-1} f_1 y = k_1 y = k_1' y$. Ainsi, puisque k_1' est un isomorphisme, $y = 0$ et donc $x = 0$. Ceci implique $g^{-1}N_1 \cap (M_2 + \ldots + M_n) = 0$. Maintenant, soit $x \in g^{-1}N_1 \subset M' := g^{-1}N_1 + M_2 + \ldots + M_n$. Alors $x, e_2 x, \ldots, e_n x \in M'$ et donc (par orthogonalité) $e_1 x \in M'$. D'où $M' \supset e_1 g^{-1} N_1 = e_1 g^{-1} f_1 N_1 = k_1 N_1 = k_1' N_1 = M_1$. Par suite, $M' \supset M_j$ pour tous $j = 1, \ldots, n$ et donc $M' = M$.

Observons alors que l'isomorphisme $g : M \to N$ envoie $g^{-1}N_1$ sur N_1. Donc il induit un isomorphisme de $M/g^{-1}N_1$ sur N/N_1. Par ce qui précède, $M/g^{-1}N_1 \cong M_2 + \ldots + M_n = M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$. Puisque $N/N_1 \cong N_2 \oplus \ldots \oplus N_m$, on a un isomorphisme de $M_2 \oplus \ldots M_m$ sur $N_2 \oplus \ldots N_m$. L'application de l'hypothèse de récurrence achève la démonstration. □

L'autre ingrédient pour démontrer le Théorème de Krull-Schmidt est le Lemme de Fitting. Pour un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(M)$, on définit $f^\infty M =$

$\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(M)$ and $f^{-\infty}0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \ker(f^n)$. Ainsi $x \in f^{\infty}M$ si et seulement si pour tout $n = 1, 2, \ldots$, il existe y_n tel que $f^n(y_n) = x$. De même, $x \in f^{-\infty}0$ si et seulement s'il existe $n = 1, 2, \ldots$ tel que $f^n(x) = 0$. Les ensemble dont $f^{\infty}M$ est l'intersection forment une chaîne descendante

$$M \supset f(M) \supset f^2(M) \supset \ldots.$$

D'un autre côté, puisque $f^n(x) = 0$ implique $f^{n+1}(x) = 0$, on a une chaîne ascendante

$$0 \subset \ker(f) \subset \ker(f^2) \subset \ldots.$$

Puisque les termes des deux chaînes sont des sous-modules et stabilisés par f, $f^{\infty}M$ et $f^{-\infty}0$ sont des sous-modules (pour la réunion, on utilise que la chaîne est croissante !) et stables par f.

Proposition 1.11 (Lemme de Fitting)**.** *Soit $f \in \mathrm{End}(M)$ et suppose que M est Artinien et Noetherien (ou, de manière équivalente, que M possède une suite de composition). Alors on a la décomposition de Fitting*

$$M = f^{\infty}M \oplus f^{-\infty}0.$$

De plus, la restriction de f à $f^{\infty}M$ est un automorphisme et la restriction de f à $f^{-\infty}0$ est nilpotente.

Démonstration. Puisque M est Artinien, la suite descendante de sous-modules stabilise, et il existe donc un s tel que $f^s(M) = f^{s+1}(M) = \ldots = f^{\infty}M$. Puisque M est Noetherien, la suite de sous-modules ascendante stabilise, et il existe donc un t tel que $\ker(f^t) = \ker(f^{t+1}) = \ldots = f^{-\infty}0$. Soit $r = \max(s, t)$, donc $f^{\infty}M = f^r(M)$ et $f^{-\infty}0 = \ker(f^r)$. Soit $z \in f^{\infty}M \cap f^{-\infty}0$. Alors il existe $y \in M$ tel que $z = f^r(y)$. Donc $0 = f^r(z) = f^{2r}(y)$, donc $y \in \ker(f^{2r}) = \ker(f^r)$. D'où $z = f^r(y) = 0$. Ceci montre que l'intersection $f^{\infty}M \cap f^{-\infty}0$ est réduite à zéro.

Soit maintenant $x \in M$. Alors $f^r(x) \in f^r(M) = f^{2r}(M)$, donc $f^r(x) = f^{2r}(y)$ pour un $y \in M$. Ainsi $f^r(x - f^r(y)) = 0$, i.e. $z = x - f^r(y) \in \ker(f^r) = f^{-\infty}0$. On a donc $x = f^r(y) + z$ avec $z \in f^{-\infty}0$ et $f^r(y) \in f^{\infty}M$, ce qui montre l'existence de la décomposition en somme directe de M.

Puisque $f^{-\infty}0 = \ker(f^r)$, la restriction de f à $f^{-\infty}0$ est bien nilpotente. La restriction de f à $f^{\infty}M = f^r(M) = f^{r+1}(M)$ est surjective. Mais cette restriction est aussi injective, puisque $f^{\infty}M \cap f^{-\infty}0 = 0$ implique que $f^{\infty}M \cap \ker(f) = 0$. □

Une conséquence du Lemme de Fitting est:

Proposition 1.12. *Soit M un module indécomposable qui est Artinien et Noetherien. Alors tout endomorphisme de M est soit nilpotent, soit un automorphisme. De plus, M est fortement indécomposable.*

Démonstration. Puisque M est indécomposable, on a par le Lemme de Fitting soit $M = f^{\infty}M$, soit $M = f^{-\infty}0$. Dans le premier cas, f est un automorphisme, dans le deuxième, f est nilpotent. Afin de montrer que M est fortement

indécomposable, i.e. que $\mathrm{End}(M)$ est local, il faut montrer que l'ensemble I des endomorphismes qui ne sont pas des automorphismes est un idéal. Pour cela, il suffit de montrer que si $f \in I$ et $g \in \mathrm{End}(M)$ arbitraire, alors $fg \in I$ et $gf \in I$ et pour tous les $f_1, f_2 \in I$, $f_1 + f_2 \in I$. La première assertion se déduit du fait que si $f \in I$, alors f est nilpotent. En effet, un tel f n'est ni injectif, ni surjectif, et du coup, ni fg, ni gf ne peuvent être des automorphismes. Supposons maintenant que $f_1 + f_2 \notin I$, i.e. que $f_1 + f_2$ est inversible dans $\mathrm{End}(M)$. On pose alors $h_i = f_i(f_1 + f_2)^{-1} \in I$ pour $i = 1, 2$, ce qui donne $h_1 + h_2 = 1$. Alors $h_1 = 1 - h_2$ est inversible, puisque il existe n tel que $h_2^n = 0$, ce qui entraîne que

$$(1 - h_2)(1 + h_2 + \ldots + h_2^{n-1}) = 1 = (1 + h_2 + \ldots + h_2^{n-1})(1 - h_2).$$

Ceci est en contradiction avec $h_1 \in I$. □

Tout cela était nécessaire pour montrer l'*unicité* de la décomposition en somme d'indécomposables. Son *existence* est beaucoup plus facile à démontrer:

Proposition 1.13. *Soit $M \neq 0$ un module qui est Artinien et Noetherien. Alors M possède des sous-modules indécomposables M_i, $i = 1, \ldots, n$, tels que $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$.*

Démonstration. Par le Théorème de Jordan-Hölder, M est de longueur finie et admet une suite de composition. Si N est un sous-module propre de M, la suite $M \supset N \supset 0$ admet un raffinement en suite de composition. Ainsi la longueur de N est strictement plus petite que la longueur de M.

Si M est indécomposable, l'affirmation est vraie. Sinon, on a $M = M_1 \oplus M_2$ avec $M_i \neq 0$. Puisque $M_i \neq 0$, la longueur diminue strictement, donc, par hypothèse de récurrence, on peut supposer que $M_1 = M_{11} \oplus \ldots \oplus M_{1n_1}$ et $M_2 = M_{21} \oplus \ldots \oplus M_{2n_2}$ où tous les M_{ij} sont indécomposables. On a alors

$$M = M_{11} \oplus \ldots \oplus M_{1n_1} \oplus M_{21} \oplus \ldots \oplus M_{2n_2}.$$

□

Theorem 1.14 (Théorème de Krull-Schmidt)**.** *Soit M un module qui est à la fois Artinien et Noetherien. Soit*

$$M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n = N_1 \oplus \ldots \oplus N_m,$$

où les M_i et les N_j sont indécomposables. Alors $m = n$ et il existe une permutation σ telle que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ pour tous $i = 1, \ldots, n$.

Démonstration. La démonstration se déduit des Propositions 1.9 et 1.12. En effet, dans la Proposition 1.9, on exige l'indécomposabilité forte qui se déduit de la Proposition 1.12. □

1.5 Cogèbres et comodules

Référence: [9], Ch. III, Section III.1, III.6, pp. 39 et 61.

La notion de cogèbre est "duale" à celle d'algèbre.

Definition 1.15. *Une cogèbre (coassociative counitale) est un triplet* $(C, \triangle, \epsilon)$ *où* C *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $\triangle : C \to C \otimes C$ *et* $\epsilon : C \to \mathbb{K}$ *sont des applications linéaires tels que les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\triangle} & C \otimes C \\ \downarrow{\scriptstyle \triangle} & & \downarrow{\scriptstyle \triangle \otimes \mathrm{id}_C} \\ C \otimes C & \xrightarrow{\mathrm{id}_C \otimes \triangle} & C \otimes C \otimes C \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} \otimes C & \xleftarrow{\epsilon \otimes \mathrm{id}_C} & C \otimes C & \xrightarrow{\mathrm{id}_C \otimes \epsilon} & C \otimes \mathbb{K} \\ & \nwarrow^{\cong} & \uparrow{\scriptstyle \triangle} & \nearrow_{\cong} & \\ & & C & & \end{array}$$

sont commutatifs.

L'application $\triangle : C \to C \otimes C$ est appelé le *coproduit* de C, et $\epsilon : C \to \mathbb{K}$ est appelé la *counité*. On appelle une telle cogèbre *cocommutative* si de plus le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C \otimes C & \xrightarrow{\tau_{C,C}} & C \otimes C \\ & \nwarrow_{\triangle} \quad \nearrow_{\triangle} & \\ & C & \end{array}$$

est commutatif. Pour deux cogèbres $(C, \triangle, \epsilon)$ et $(C', \triangle', \epsilon')$, on appelle une application linéaire $f : C \to C'$ un *morphisme de cogèbres* si

$$(f \otimes f) \circ \triangle = \triangle' \circ f, \quad \text{et} \quad \epsilon = \epsilon' \circ f.$$

Le coproduit s'écrit comme

$$\triangle(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} = \sum_{(c)} c' \otimes c'' = c_1 \otimes c_2,$$

appelé *notation de Sweedler*, la somme (finie !) étant sous-entendue dans la dernière notation.

On note que l'espace vectoriel dual d'une cogèbre est une algèbre avec le produit $\mu := \triangle^* \circ \lambda \circ \tau_{C^*,C^*}$ où $\lambda : C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^*$ inclut des produits

tensoriels de formes linéaires dans les formes linéaires sur le produit tensoriel. (Il faut changer l'ordre des facteurs grâce à τ_{C^*,C^*}, puisque l'application transposée change l'ordre des facteurs !) Puisque λ n'est en général pas un isomorphisme (en tout cas en dimension infinie), le dual d'une algèbre n'est en général pas une cogèbre. Ceci est cependant le cas pour une algèbre *de dimension finie*.

On verra plus tard les exemples qui nous intéresseront pour la suite du cours, mais pour avoir déjà un exemple simple en tête: soit X un ensemble. La *linéarisation* $\mathbb{K}X$ de X, i.e. l'espace vectoriel avec comme base les éléments de X, est une cogèbre pour le coproduit $\triangle(x) = x \otimes x$ et la counité $\epsilon(x) = 1$. Ces structures sont définies sur les éléments de X, i.e. sur la base de $\mathbb{K}X$ et sont ensuite prolongées à tout $\mathbb{K}X$ par linéarité.

On appelle *coidéal* un sous-espace I d'une cogèbre C tel que $\triangle(I) \subset I \otimes C + C \otimes I$ et $\epsilon(I) = 0$. C'est la bonne notion pour obtenir une structure de cogèbre sur l'espace vectoriel quotient C/I.

Definition 1.16. *Soient $(C, \triangle, \epsilon)$ et $(C', \triangle', \epsilon')$ deux cogèbres. Une application linéaire $f : C \to C'$ est un morphisme de cogèbres si*

$$(f \otimes f) \circ \triangle = \triangle' \circ f, \qquad \text{et} \qquad \epsilon' \circ f = \epsilon.$$

La notion de *comodule* pour une cogèbre C s'obtient aussi en dualisant le diagramme qui définit un module:

Definition 1.17. *On appelle N un C-comodule s'il existe une application linéaire $\lambda : N \to C \otimes N$ telle que les diagrammes suivants sont commutatifs:*

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\lambda} & C \otimes N \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_C \otimes \lambda} \\ C \otimes N & \xrightarrow{\triangle \otimes \mathrm{id}_N} & C \otimes C \otimes N \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \otimes N & \xleftarrow{\epsilon \otimes \mathrm{id}_N} & C \otimes N \\ & \overset{\cong}{\nwarrow} & \uparrow{\scriptstyle \lambda} \\ & & N \end{array}$$

Plus exactement, ceci est la notion de *comodule à gauche* (le facteur C est à gauche dans le produit tensoriel). De même, il existe une notion de comodule à droite.

1.6 Algèbres de Hopf

Référence: [9], Ch. III.2, III.3, pp. 45 et 49.

Definition 1.18. *Une bigèbre est un quintuplet $(B, \mu, \eta, \triangle, \epsilon)$ où (B, μ, η) est une algèbre (associative unitaire) et $(B, \triangle, \epsilon)$ est une cogèbre (coassociative, counitaire) telles que $\triangle$ et ϵ sont des morphismes d'algèbres.*

Le fait que $\triangle : B \to B \otimes B$ est un morphisme d'algèbres veut dire que les deux diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} B \otimes B & \xrightarrow{\triangle\otimes\triangle} & (B \otimes B) \otimes (B \otimes B) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle (\mu\otimes\mu)\circ(\mathrm{id}_B\otimes\tau\otimes\mathrm{id}_B)} \\ B & \xrightarrow{\triangle} & B \otimes B \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{\eta} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \triangle} \\ \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} & \xrightarrow{\eta\otimes\eta} & B \otimes B \end{array}$$

sont commutatifs. Notons que $(\mu \otimes \mu) \circ (\mathrm{id}_B \otimes \tau \otimes \mathrm{id}_B)$ est la multiplication de l'algèbre $B \otimes B$. De même, le fait que ϵ est un morphisme d'algèbre est l'affirmation de la commutativité des deux diagrammes suivants:

$$\begin{array}{ccc} B \otimes B & \xrightarrow{\epsilon\otimes\epsilon} & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ B & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{K} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} & & \xrightarrow{\eta} & & B \\ & \searrow^{\mathrm{id}_{\mathbb{K}}} & & \swarrow_{\epsilon} & \\ & & \mathbb{K} & & \end{array}$$

En termes d'éléments, le fait que $\triangle$ est un morphisme d'algèbres veut dire

$$\sum_{(xy)} (xy)_{(1)} \otimes (xy)_{(2)} = \sum_{(x),(y)} x_{(1)}y_{(1)} \otimes x_{(2)}y_{(2)} \quad \text{et} \quad \triangle(1) = 1 \otimes 1.$$

En tant que exemple préliminaire, le linéarisé $\mathbb{K}X$ d'un ensemble X devient une bigèbre, si X est un monoide. En effet, la structure de monoide sur X induit une structure d'algèbre associative unitaire sur $\mathbb{K}X$. On a pour tous les

éléments $x, y \in X$

$$\triangle(xy) = xy \otimes xy = (x \otimes x)(y \otimes y) = \triangle(x)\triangle(y),$$

donc $\triangle$ est un morphisme d'algèbres.

Definition 1.19. *Une algèbre de Hopf H est une bigèbre avec une antipode, i.e. une application linéaire $S : H \to H$ telle que*

$$S \star \mathrm{id}_H = \mathrm{id}_H \star H = \eta \circ \epsilon.$$

Ici $\star$ est le produit de convolution sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H, H)$, induit par la structure de cogèbre de H au départ et la structure d'algèbre de H à l'arrivée. L'application $\eta \circ \epsilon$ est l'unité de $\star$, donc S est par définition un inverse bilatère de id_H dans l'algèbre associative de convolution.

Pour les exemples suivants, voir [9], Ch. IX.4.3, p. 219 et [3], Ch. 3.2, p. 59.

Exemple 1.20. *Un des exemples les plus importants pour nous sera celui de l'algèbre du groupe G: le monoide G donne lieu à une bigèbre $\mathbb{K}G$, comme constaté précédemment. L'antipode de $\mathbb{K}G$ est induite par le passage à l'inverse dans le groupe G, i.e. $S(g) = g^{-1}$ sur les générateurs $g \in G$ de $\mathbb{K}G$. En effet, l'équation*

$$S \star \mathrm{id}_H = \mathrm{id}_H \star H = \eta \circ \epsilon$$

s'écrit sur un élément $g \in G$ comme

$$S(g)g = gS(g) = \epsilon(g)1 = 1.$$

De là, il est clair que $S(g) = g^{-1}$ est le seul choix.

Exemple 1.21. *L'exemple dual de l'exemple précédent est celui des fonctions sur le groupe G: $\mathbb{K}[G] := \{f : G \to \mathbb{K}\}$. On suppose maintenant que le groupe G est fini. Les fonctions delta δ_a sur les éléments $a \in G$ du groupe forment une base de $\mathbb{K}[G]$. Le produit de $\mathbb{K}[G]$ est celui des fonctions, i.e. pour $f : G \to \mathbb{K}$ et $h : G \to \mathbb{K}$, on définit $fh : G \to \mathbb{K}$ par $fh(a) := f(a)h(a)$ pour tout $a \in G$. L'unité est la fonction constante 1. Le coproduit est induit par le produit de G: pour $f : G \to \mathbb{K}$, on identifie d'abord $\mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G]$ à $\mathbb{K}[G \times G]$ (ce qui est possible grâce à l'hypothèse que G est fini). Avec cette identification, on définit $\triangle(f)$ par*

$$\triangle(f)(g_1, g_2) := f(g_1 g_2),$$

pour tous $g_1, g_2 \in G$. La counité est l'évaluation de la fonction en $1 \in G$. L'antipode se définit sur les fonctions delta par $S(\delta_a) = \delta_{a^{-1}}$ pour tout $a \in G$. On en déduit $S(f)(g) = f(g^{-1})$ pour tout $f : G \to \mathbb{K}$ et tout $g \in G$. Ainsi $\mathbb{K}[G]$ devient une algèbre de Hopf, duale à celle de l'exemple précédent. Cette dualité est induite par la dualité entre $\mathbb{K}$-espaces de dimension finie.

Exemple 1.22. *Il existe une construction du double de deux algèbres de Hopf (qui sont compatibles en un certain sens, en Anglais matched) que l'on va examiner seulement dans le cas de l'algèbre du groupe d'un groupe fini G. En tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel, le double est le produit tensoriel $D(G) := \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}G$. On définit les structures algébriques pour tous les $x, y, g, h \in G$ par:*

(a) le produit $(\delta_g \otimes x)(\delta_h \otimes y) = \delta_{gx,xh}(\delta_g \otimes xy)$,

(b) l'unité $1 = \sum_{g \in G} \delta_g \otimes 1$ *(où* $1 \in G$ *est l'unité de* G*),*

(c) coproduit $\triangle(\delta_g \otimes x) = \sum_{g_1 g_2 = g} (\delta_{g_2} \otimes x)(\delta_{g_1} \otimes x)$,

(d) counité $\epsilon(\delta_g \otimes x) = \delta_{g,1}$,

(e) antipode $S(\delta_g \otimes x) = \delta_{x^{-1}g^{-1}x} \otimes x^{-1}$.

(Attention à la notation δ pour le delta de Kronecker !) Observons que l'on a changé l'ordre du coproduit sur $\mathbb{K}[G]$: la raison pour cela viendra bien plus tard, voir démo (c) du Lemma 5.24. Ces formules expriment une structure de produit semi-direct sur $D(G)$, $\mathbb{K}G$ agissant sur $\mathbb{K}[G]$ par conjugaison: $x\delta_g x^{-1} = \delta_{xgx^{-1}}$ pour tous $x, g \in G$.

1.7 Algèbres de Lie

Référence: [9], Ch. V.1 et V.2, pp. 93 et 94.

Definition 1.23. *Une algèbre de Lie est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ avec une application bilinéaire $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ telle que pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$*

(a) $[x, y] = -[y, x]$ *(le crochet est antisymétrique),*

(b) $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$ *(le crochet est une dérivation de lui-même).*

Les classes d'exemples les plus courants sont $\mathfrak{g} = M_n(\mathbb{K})$ avec le crochet $[A, B] = AB - BA$ pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ ou encore l'algèbre de Lie des dérivations D d'une algèbre associative A, i.e. des endomorphismes $D : A \to A$ avec $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ pour tous $a, b \in A$. Le crochet est de nouveau le commutateur.

Soit H une algèbre de Hopf. On appelle *élément primitif* de H tout élément $x \in H$ tel que $\triangle(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. En fait, les éléments primitifs forment une algèbre de Lie sous le commutateur de H. En effet, soient $x, y \in H$ primitifs. Alors

$$\triangle(xy) = \triangle(x)\triangle(y) = (1 \otimes x + x \otimes 1)(1 \otimes y + y \otimes 1) = 1 \otimes xy + y \otimes x + x \otimes y + xy \otimes 1.$$

De même

$$\triangle(yx) = 1 \otimes yx + x \otimes y + y \otimes x + yx \otimes 1.$$

Donc

$$\triangle(xy - yx) = 1 \otimes (xy - yx) + (xy - yx) \otimes 1,$$

i.e. le commutateur d'éléments primitifs est encore primitif. On vérifie facilement que l'ensemble des éléments primitifs, noté $\mathrm{Prim}(H)$ devient ainsi une algèbre de Lie.

Definition 1.24. *On appelle $\mathfrak{g}$-module un espace vectoriel M avec une application linéaire $\rho : \mathfrak{g} \times M \to M$, $(x, m \mapsto x \cdot m$ telle que pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$ et tous $m \in M$*

$$[x, y] \cdot m = x \cdot (y \cdot m) - y \cdot (x \cdot m).$$

De nouveau, il s'agit de la notion de module à gauche sur une algèbre de Lie. On peut associer à tout algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ une algèbre associative $U\mathfrak{g}$ telle que les $\mathfrak{g}$-modules au sens de la définition ci-dessus soient exactement les modules à gauche sur l'algèbre associative $U\mathfrak{g}$. On appelle $U\mathfrak{g}$ l'*algèbre enveloppante* de $\mathfrak{g}$. Elle est construite en tant que quotient de l'algèbre tensorielle

$$T(\mathfrak{g}) = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{\otimes 2} \oplus \mathfrak{g}^{\otimes 3} \oplus \dots$$

sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, par l'idéal engendré par les éléments de la forme

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$$

pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$. L'algèbre tensorielle est encore graduée (par le degré tensoriel), mais puisque l'idéal n'est pas homogène, $U\mathfrak{g}$ n'est pas une algèbre associative graduée, mais seulement filtrée.

En fait, $U\mathfrak{g}$ est une algèbre de Hopf avec le coproduit $\triangle(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ pour les $x \in \mathfrak{g}$ (et étendu par linéarité à tout $T(\mathfrak{g})$, puis passé au quotient à $U\mathfrak{g}$). L'antipode est donnée par $S(x) = -x$ pour $x \in \mathfrak{g}$.

2 Catégories et foncteurs

Dans cette section, nous présentons une petite introduction aux catégories et foncteurs. Pour référence, on prendra l'appendice A du livre de Weibel [11].

2.1 Catégories

Definition 2.1. *Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'une classe d'objets $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$, d'un ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ pour toute paire (A, B) d'objets de $\mathcal{C}$, de morphismes identité id_A pour tout objet $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ et d'une application*

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

("la composition des morphismes") pour tout triplet (A, B, C) d'objets de $\mathcal{C}$. Ces données doivent satisfaire à l'associativité, i.e. pour $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$, on doit avoir $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, et à l'axiom d'unité, i.e. pour tout $f : A \to B$, on doit avoir $\mathrm{id}_B \circ f = f \circ \mathrm{id}_A$.

Le fait de parler d'une classe d'objets plutôt que d'un ensemble d'objets est une précaution qui permet de parler de la catégorie **Ens** des ensembles où la classe d'objets n'est pas un ensemble. Rappelez-vous que la notion de l'ensemble de tous les ensembles mène à des contradictions.

On a pleins d'exemples de catégories: celle des groupes abéliens **Ab** (où les objets sont les groupes abéliens et les morphismes sont les morphismes de groupes), la catégorie des groupes **Grp** (où les objets sont tous les groupes et les morphismes sont les morphismes de groupes), R–**mod** la catégorie des R-modules à gauche etc.

Dans une catégorie $\mathcal{C}$, on appelle un morphisme $f : A \to B$ un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $g : B \to A$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_B$ et $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Grâce à l'associativité, un tel morphisme g (pour un f donné) est unique et noté $g = f^{-1}$.

Definition 2.2. *Un morphisme $f : B \to C$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ s'appelle monomorphisme si pour tous morphismes distincts $e_1, e_2 : A \to B$, on a $f \circ e_1 \neq f \circ e_2$. Cette propriété s'exprime aussi par la possibilité de simplification à gauche suivante: pour tous morphismes $a_1, a_2 : A \to B$ tels que $f \circ a_1 = f \circ a_2$, on a $a_1 = a_2$.*

On définit de façon "symétrique" (ou "duale") la notion d'*épimorphisme* par la propriété de simplification à droite. Dans pleins de catégories dont les objets ont des ensembles sous-jacents (comme par exemple **Ens**, **Grp**, **Ab** etc), la propriété d'être un monomorphisme est simplement la propriété d'être un morphisme injectif (et de même, épimorphisme revient à demander que le morphisme soit surjectif). Attention, dans la catégorie des anneaux **Ann**, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ est un épimorphisme !

Un objet I d'une catégorie $\mathcal{C}$ s'appelle *initial* si pour tout objet C de $\mathcal{C}$, il existe un unique morphisme de I vers $\mathcal{C}$. De même pour *objet terminal*. Un objet qui est à la fois initial et terminal s'appelle *objet zéro*. Si $\mathcal{C}$ contient un objet zéro, noté 0, alors tout ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ contient une flèche $A \to 0 \to B$. Cette flèche est noté également 0.

Definition 2.3. *Le noyau $A := \ker(f)$ d'un morphisme $f : B \to C$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ consiste d'un objet A et d'un morphisme $i : A \to B$ tel que $f \circ i = 0$ qui possèdent la propriété universelle suivante: Pour tout morphisme $e : A' \to B$ dans $\mathcal{C}$ tel que $f \circ e = 0$, il existe un unique morphisme $e' : A' \to A$ tel que e se factorise $e = i \circ e'$.*

Tout noyau $i : A \to B$ est un monomorphisme et deux noyaux d'un même morphisme sont isomorphes. Un morphisme donné dans une catégorie n'admet pas forcément un noyau.

Definition 2.4. *Le conoyau $D := \mathrm{coker}(f)$ d'un morphisme $f : B \to C$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ consiste d'un objet D et d'un morphisme $p : C \to D$ tel que $p \circ f = 0$ qui possèdent la propriété universelle suivante: Pour tout morphisme $g : C \to D'$ dans $\mathcal{C}$ tel que $g \circ f = 0$, il existe un unique morphisme $g' : D \to D'$ tel que g se factorise $g = g' \circ p$.*

Dans les catégories **Grp**, **Ab**, R–**mod** ou encore **Vect** (la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels pour un corps $\mathbb{K}$ fixé), noyau et conoyau ont leur signification habituelle.

La notion de produit est aussi donnée par une propriété universelle.

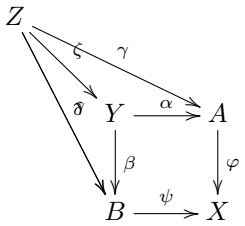
Definition 2.5. *Soit $\{C_i\}_{i\in I}$ une famille d'objets de la catégorie $\mathcal{C}$. Le produit $\Pi_{i\in I}C_i$ (s'il existe) est une paire consistant d'un objet $\Pi_{i\in I}C_i$ de $\mathcal{C}$ et de morphismes $\pi_j : \Pi_{i\in I}C_i \to C_j$ pour tout $j \in I$ tels que pour tout objet A dans $\mathcal{C}$ et toute famille de morphismes $\alpha_i : A \to C_i$, il existe un unique morphisme $\alpha : A \to \Pi_{i\in I}C_i$ tel que $\pi_j \circ \alpha = \alpha_j$ pour tout $j \in I$.*

Attention, il existe des catégories où toute famille d'objets admet un produit (comme dans **Ens**, **Grp**, **Ab**, R–**mod** ou encore **Vect**), mais la catégorie des corps **Crp** n'admet pas de produit du tout.

Definition 2.6. *Soit $\{C_i\}_{i\in I}$ une famille d'objets de la catégorie $\mathcal{C}$. Le coproduit $\coprod_{i\in I} C_i$ (s'il existe) est une paire consistant d'un objet $\coprod_{i\in I} C_i$ de $\mathcal{C}$ et de morphismes $i_j : C_j \to \coprod_{i\in I} C_i$ pour tout $j \in I$ tels que pour tout objet A dans $\mathcal{C}$ et toute famille de morphismes $\alpha_i : C_i \to A$, il existe un unique morphisme $\alpha : \coprod_{i\in I} C_i \to A$ tel que $\alpha \circ i_j = \alpha_j$ pour tout $j \in I$.*

En tant qu'exemples, le coproduit dans **Ens** est la réunion disjointe, dans **Grp**, c'est le produit libre de groupes, dans R–**mod**, c'est la somme directe. Il est très instructif de se noter les propriétés du genre $\alpha \circ i_j = \alpha_j$ en tant que diagrammes.

Definition 2.7. *Soient $\varphi : A \to X$ et $\psi : B \to X$ deux morphismes dans une catégorie $\mathcal{C}$. On appelle tiré-en-arrière ("pullback") de (φ, ψ) une paire de morphismes $\alpha : Y \to A$, $\beta : Y \to B$ tels que $\varphi \circ \alpha = \psi \circ \beta$ qui a la propriété universelle suivante: étant donné des morphismes $\gamma : Z \to A$ et $\delta : Z \to B$ tels que $\varphi \circ \gamma = \psi \circ \delta$, il existe un unique morphisme $\zeta : Z \to Y$ avec $\gamma = \alpha \circ \zeta$ et $\delta = \beta \circ \zeta$.*



On a les deux propositions suivantes (voir [7] Theorem II.6.2 p. 61 et Lemma III.1.3 p. 86) que l'on utilisera pour identifier le foncteur Ext plus loin:

Proposition 2.8. *Étant donné un diagramme de tiré-en-arrière dans une catégorie $\mathcal{C}$ avec objet zéro, on a:*

(i) Si (J, μ) est le noyau de β, alors $(J, \alpha \circ \mu)$ est le noyau de φ.

(ii) Si (J, ν) est le noyau de φ, ν se factorise comme $\nu = \alpha \circ \mu$ où (J, μ) est le noyau de β.

Démonstration. (i) Posons $\nu = \alpha \circ \mu$. Montrons d'abord que ν est un monomorphisme. On a que $\mu : J \to Y$ et $\{\alpha, \beta\} : Y \to A \times B$ sont des monomorphismes (se déduit de l'unicité de ζ). Donc $\{\alpha, \beta\} \circ \mu = \{\nu, 0\} : J \to A \times B$ est un monomorphisme, d'où le fait que ν est un monomorphisme. De plus, notons que $\varphi \circ \nu = \varphi \circ \alpha \circ \mu = \psi \circ \beta \circ \mu = 0$. Enfin, pour montrer la propriété universelle, prenons $\tau : Z \to A$ et montrons que si $\varphi \circ \tau = 0$, alors $\tau = \nu \circ \tau_0$ pour un morphisme τ_0. Puisque $\psi \circ 0 = 0$, la propriété du tiré-en-arrière montre qu'il existe $\sigma : Z \to Y$ tel que $\alpha \circ \sigma = \tau$, $\beta \circ \sigma = 0$. Puisque (J, μ) est le noyau de β, $\sigma = \mu \circ \tau_0$, de sorte que $\tau = \alpha \circ \mu \circ \tau_0 = \nu \circ \tau_0$.

(ii) Puisque $\varphi \circ \nu = 0$, on raisonne comme dans (i) pour montrer qu'il existe $\mu : J \to Y$ avec $\alpha \circ \mu = \nu$ et $\beta \circ \mu = 0$. Puisque ν est un monomorphisme, μ l'est aussi. Montrons que (J, μ) est le noyau de β. Soit $\beta \circ \tau = 0$, $\tau : Z \to Y$. Alors $\varphi \circ \alpha \circ \tau = \psi \circ \beta \circ \tau = 0$, et ainsi $\alpha \circ \tau = \nu \circ \tau_0 = \alpha \circ \mu \circ \tau_0$. Or, $\beta \circ \tau = \beta \circ \mu \circ \tau_0 = 0$, et donc, puisque $\{\alpha, \beta\}$ est un monomorphisme, $\tau = \mu \circ \tau_0$.

□

Ici, nous faisons appel à la définition de *suite exacte* qui ne sera vue que en Section 3. Il s'agit d'une suite de morphismes telle que l'image du morphisme précédant est le noyau du morphisme suivant. Dans les suites exactes courtes ci-dessous, cela implique en particulier que $B \to E$ et $B \to E'$ sont des monomorphismes et que ν' et ν sont des épimorphismes.

Proposition 2.9. *Soit*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E' & \xrightarrow{\nu'} & A' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_B} & & \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\nu} & A & \longrightarrow & 0\ , \end{array}$$

un diagramme commutatif avec des lignes exactes. Alors le carré de droite est un tiré-en-arrière.

Démonstration. Soit

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\epsilon} & A' \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ E & \xrightarrow{\nu} & A \end{array}$$

le tiré-en-arrière de (α, ν). Montrons d'abord que ϵ est un épimorphisme. Le fait que P soit le tiré-en-arrière revient (voir Lemma III.1.1 p. 85 dans [7]) à l'exactitude de la suite

$$0 \to P \xrightarrow{\{\epsilon, \varphi\}} A' \times E \xrightarrow{\langle \nu, -\alpha \rangle} A \to 0.$$

Soit $a' \in A'$. Puisque ν est un épimorphisme, il existe $e \in E$ avec $\nu(e) = \alpha(a')$, ce qui implique que $(a', e) \in \ker(\langle \nu, -\alpha \rangle) = \mathrm{im}(\{\epsilon, \varphi\})$. Donc il existe $p \in P$ avec $a' = \epsilon(p)$ (et par ailleurs $e = \varphi(p)$). Donc ϵ est un épimorphisme.

Maintenant, φ induit un isomorphisme $\ker(\epsilon) \cong B$ grâce à la Proposition 2.8. On obtient donc une extension

$$0 \to B \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\epsilon} A' \to 0.$$

Par la propriété universelle de P, il existe un morphisme $\zeta : E' \to P$ tel que $\varphi \circ \zeta = \xi$ et $\epsilon \circ \zeta = \nu'$. Puisque ζ induit l'identité sur A' et B, ζ est un isomorphisme par le Lemme des 5 (vu en exercice). □

L'objet dual d'un tiré-en-arrière est le *poussé-en-avant* ("pushout"). En inversant toutes la flèches dans le diagramme précédent, on formule facilement sa propriété universelle.

Pour des raisons formelles, on introduit pour une catégorie donnée $\mathcal{C}$ aussi la *catégorie opposée* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ avec les mêmes objets que $\mathcal{C}$, mais avec les flèches et la composition opposées: $f : A \to B$ dans $\mathcal{C}$ donne un morphisme $f^{\mathrm{op}} : B \to A$ dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Il est clair que les monomorphismes de $\mathcal{C}$ sont les épimorphismes de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, les noyaux de $\mathcal{C}$ sont les conoyaux de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, les produits de $\mathcal{C}$ sont les coproduits de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, les tirés-en-arrière dans $\mathcal{C}$ sont les poussés-en-avant de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ et vice-versa.

Notons aussi que tout objet défini à l'aide d'une propriété universelle est unique à isomorphisme canonique près.

2.2 Foncteurs

Definition 2.10. *Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à chaque objet C de $\mathcal{C}$ un objet $F(C) = FC = F_C$ de $\mathcal{D}$ et à chaque morphisme $f : C_1 \to C_2$ dans $\mathcal{C}$ un morphisme $F(f) : F(C_1) \to F(C_2)$ de $\mathcal{D}$. Un foncteur doit envoyer les identités sur des identités: $F(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{F(C)}$ et doit envoyer la composition sur la composition: $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.*

On appelle un tel foncteur aussi *covariant*. Une telle préscription $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ qui renverse le sens des flèches (i.e. qui va de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$!) s'appelle un foncteur *contravariant*.

Par exemple, soit $\mathbb{K}$ un corps. La préscription qui associe à tout ensemble fini X portant une action d'un groupe G la représentation de permutation $V(X) = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{K} e_x$ où G agit par $g \cdot e_x := e_{g \cdot x}$ pour tout $g \in G$ et tout $x \in X$ définit un foncteur de la catégorie des G-ensembles finis G–$\mathbf{Ens}_{\mathrm{fin}}$ vers la catégorie des G-modules G–**mod**. En effet, pour un morphisme de G-ensembles $f : X \to X'$, on a un morphisme de G-modules induit $V(f) : V(X) \to V(X')$, défini sur une base par $e_x \mapsto e_{f(x)}$. Cette application linéaire est un morphisme de G-modules, puisque f est un morphisme de G-ensembles ($f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ pour tous $g \in G$ et tous $x \in X$).

Les catégories **Grp**, **Ab**, R–**mod** ou encore **Vect** ont aussi des *foncteurs oubli* vers la catégorie **Ens** qui envoient un groupe, une groupe abélien, un R-module ou encore un k-espace vectoriel sur leur ensemble sous-jacent.

On appelle un foncteur F *fidèle* si les applications induites

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

sont injectives pour toute paire d'objets (A, B) de $\mathcal{C}$. Des foncteurs oubli sont en général des foncteurs fidèles. Un foncteur F s'appelle *plein* si les applications

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

sont surjectives pour toute paire d'objets (A, B) de $\mathcal{C}$.

Nous allons maintenant définir des transformations entre foncteurs avec même catégorie de départ et d'arrivée.

Definition 2.11. *Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$. Une transformation naturelle $\eta : F \Rightarrow G$ associe à chaque objet C de $\mathcal{C}$ un morphisme $\eta_C : F(C) \to G(C)$ dans $\mathcal{D}$ tel que pour tout morphisme $f : C \to C'$ dans $\mathcal{C}$, on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{F(f)} & F(C') \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_C} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{C'}} \\ G(C) & \xrightarrow{G(f)} & G(C') \end{array}$$

Dans le cas où chaque η_C est un isomorphisme, on parle d'un *isomorphisme naturel* et on note $\eta : F \cong G$.

En tant qu'exemple, considérons le foncteur $T : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ qui associe à chaque groupe abélien A son sous-groupe de torsion $T(A)$. L'inclusion $T(A) \subset A$ est en fait une transformation naturelle $\eta : T \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{Ab}}$.

Definition 2.12. *Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. S'il existe un foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ainsi que des isomorphismes naturels $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$ et $\mathrm{id}_{\mathcal{D}} \Rightarrow F \circ G$, on appelle F (et aussi G) une équivalence de catégories.*

Par exemple, la catégorie des espaces vectoriels basés dont les objets sont des paires consistant d'un espace vectoriel et d'une base de celui-ci et dont les morphismes envoient base sur base, est équivalente à la catégorie **Vect** par le foncteur oubli (qui oublie la base). Notons que ces deux catégories ne sont pas *isomorphes* (ce qui voudrait dire que les deux foncteurs plus haut vérifient $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ et $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$!).

Un critère utile pour déterminer si deux catégories sont équivalentes est le suivant:

Theorem 2.13. *Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur pleinement fidèle et essentiellement surjectif, i.e. tout objet de $\mathcal{D}$ est isomorphe à un objet de la forme $F(X)$ pour un objet X dans $\mathcal{C}$. Alors F est une équivalence de catégories.*

Démonstration. Voir [10] p. 93, Theorem 1. □

2.3 Catégories abéliennes

Une catégorie $\mathcal{C}$ s'appelle *additive* si l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ pour toute paire (A, B) d'objets de $\mathcal{C}$ est un groupe abélien avec zéro 0 et tel que la composition

catégorielle soit distributive pour l'addition de cette structure. Si f, g, g', h sont des morphismes composables, la distributivité s'écrit

$$f \circ (g + g') = f \circ g + f \circ g' \quad \text{et} \quad (g + g') \circ h = g \circ h + g' \circ h.$$

De plus, une catégorie additive doit posséder un objet zéro et un produit $A \times B$ pour toute paire d'objets.

Definition 2.14. *Une catégorie additive $\mathcal{A}$ s'appelle abélienne si elle possède les trois propriétés suivantes:*

(AB1) Tout morphisme dans $\mathcal{A}$ possède noyau et conoyau.

(AB2) Tout monomorphisme dans $\mathcal{A}$ est noyau de son conoyau.

(AB3) Tout épimorphisme dans $\mathcal{A}$ est le conoyau de son noyau.

Du coup, dans une catégorie abélienne il est équivalent d'être monomorphisme et noyau d'un morphisme, tout comme il est équivalent d'être épimorphisme ou conoyau d'un morphisme. La catégorie R–**mod** est abélienne et, dans un certain sens, c'est le seul exemple. Rappelons qu'une catégorie s'appelle *petite* si sa classe d'objets est une ensemble. Le Théorème de Freyd-Mitchell (1964) affirme que toute petite catégorie abélienne se plonge dans une catégorie R–**mod** pour un certain anneau R, voir [11] p. 25. Le problème restant est que l'anneau R n'est pas unique. On peut s'arranger (en choisissant un "univers") à ce que les catégories qui nous intéressent soient petites (voir [10], p. 12, remarques sur les "catégories larges").

En algèbre homologique, on a en général deux manières de raisonner: soit on utilise les propriétés universelles des objets afin de raisonner abstraitement (et sans utiliser d'éventuels éléments - notion qui peut ne pas avoir de sens dans une catégorie abélienne quelconque !), soit on utilise des éléments en faisant appel au théorème de Freyd-Mitchell (i.e. en identifiant la catégorie abélienne dans laquelle on travaille à une sous-catégorie du type R–**mod**). Nous allons privilégier la deuxième manière qui est souvent plus directe (mais nous invitons évidemment le lecteur de fournir des démonstrations alternatives !).

Un raisonnement assez abstrait, connu sous le nom de Lemme de Yoneda, est très utile. Toute catégorie additive $\mathcal{A}$ se plonge dans la catégorie abélienne $\mathbf{Ab}^{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}$ des foncteurs $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ par le foncteur h qui envoie un objet A vers le foncteur $h_A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, A)$. Ce plongement s'appelle le *plongement de Yoneda*.

Lemma 2.15 (Lemme de Yoneda)**.** *Le plongement de Yoneda reflète l'exactitude, i.e. une suite $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ dans $\mathcal{A}$ est exact si pour tout objet M dans $\mathcal{A}$, la suite*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, A) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, B) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, C)$$

est exacte.

Démonstration. En posant $M = A$, on voit que $\beta \circ \alpha = \beta_* \circ \alpha_*(\mathrm{id}_A) = 0$, donc $\mathrm{im}(\alpha) \subset \ker(\beta)$. En posant $M = \ker(\beta)$, on voit que le monomorphisme

$\imath : \ker(\beta) \to B$ satisfait $\beta_*(\imath) = \beta \circ \imath = 0$. Il existe donc par exactitude un morphisme $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, A)$ tel que $\imath = \alpha_*(\sigma) = \alpha \circ \sigma$, ce qui implique $\ker(\beta) = \mathrm{im}(\imath) \subset \mathrm{im}(\alpha)$. □

Definition 2.16. *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une catégorie additive $\mathcal{C}$ est appelée $\mathbb{K}$-linéaire si pour tous objets X, Y dans $\mathcal{C}$, le groupe abélien $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel telle que la composition de morphisme soit $\mathbb{K}$-linéaire.*

Definition 2.17. *Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre catégories additives. On appelle F additif si les applications $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ pour tous les objets X, Y de $\mathcal{C}$ sont des homomorphismes de groupes abéliens. Si de plus $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont $\mathbb{K}$-linéaires et ces homomorphismes sont $\mathbb{K}$-linéaires, F est appelé $\mathbb{K}$-linéaire.*

Proposition 2.18. *Pour tout foncteur additif $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et tous objets X, Y de $\mathcal{C}$, il existe un isomorphisme naturel*

$$F(X) \oplus F(Y) \cong F(X \oplus Y).$$

Démonstration. On vérifie d'abord que la somme direct $X \oplus Y$ dans la catégorie abélienne $\mathcal{C}$ est caractérisée par l'existence de morphismes $i_X : X \to X \oplus Y$, $i_Y : Y \to X \oplus Y$ et $p_X : X \oplus Y \to X$, $p_Y : X \oplus Y \to Y$ tels que $p_X\, i_X = \mathrm{id}_X$, $p_X\, i_Y = 0$, $p_Y\, i_X = 0$, $p_Y\, i_Y = \mathrm{id}_Y$ et $i_X\, p_X + i_Y\, p_Y = \mathrm{id}_{X \oplus Y}$, puisqu'il s'agit à la fois de la somme catégorique et du produit catégorique de X et Y.

Par ailleurs, à la fois $F(X) \oplus F(Y)$ et $F(X \oplus Y)$ vérifient cette caractérisation (dans la catégorie abélienne $\mathcal{D}$), donc ils sont isomorphes. Pour $F(X \oplus Y)$, on obtient cette caractérisation en appliquant simplement F à ces relations, puisque F est un foncteur additif. □

2.4 Foncteurs adjoints

Nous terminons notre tour d'horizon sur les catégories par la notion de foncteurs adjoints.

Definition 2.19. *Une paire de foncteurs $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ s'appelle adjoint s'il existe une bijection pour tous objets A de $\mathcal{A}$ et B de $\mathcal{B}$*

$$\tau = \tau_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B))$$

qui est naturelle en A et B, i.e. pour tous morphismes $f : A \to A'$ dans $\mathcal{A}$ et $g : B \to B'$ dans $\mathcal{B}$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A'), B) & \xrightarrow{Lf^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B) & \xrightarrow{g_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B') \\
\downarrow{\scriptstyle \tau_{A',B}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{A,B}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{A,B'}} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', R(B)) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B)) & \xrightarrow{Rg_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B'))
\end{array}$$

En d'autres mots, on a les deux foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(-),-)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,R(-))$ de $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{B}$ vers **Ens**, et τ est un isomorphisme naturel entre eux. On dit que L est adjoint à gauche de R et que R est adjoint à droite de L.

Il y a pleins d'exemples pour de tels pairs de foncteurs adjoints. Un foncteur adjoint à gauche est souvent une construction universelle qui "inverse" un foncteur oubli. Soit, par exemple, $\mathbb{K}$ un corps et $L : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Vect}$ le foncteur qui associe à un ensemble X le $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui a une base indexée par X. Autrement dit, $L(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X à coefficients dans k. L est foncteur adjoint au foncteur oubli $R : \mathbf{Vect} \to \mathbf{Ens}$ qui associe à un k-espace vectoriel l'ensemble sous-jacent.

Theorem 2.20. *Une paire de foncteurs adjoint $(L,R) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ détermine*

(1) une transformation naturelle $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow R \circ L$, "l'unité de l'adjonction", telle que l'adjoint à droite de $f : L(A) \to B$ est $R(f) \circ \eta_A : A \to R(B)$.

(2) une transformation naturelle $\epsilon : L \circ R \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$, "la counité de l'adjonction", telle que l'adjoint à gauche de $g : A \to R(B)$ est $\epsilon_B \circ L(g) : L(A) \to B$.

De plus, les composées suivantes sont l'identité:

$$L(A) \overset{L(\eta)}{\to} L \circ R \circ L(A) \overset{\epsilon L}{\to} L(A) \quad \text{et} \quad R(B) \overset{\eta R}{\to} R \circ L \circ R(B) \overset{R(\epsilon)}{\to} R(B). \tag{1}$$

Démonstration. Voir [10] p. 82, Theorem 1. □

En fait, on a aussi une sorte de réciproque de ce théorème: une paire de foncteurs $(L,R) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ avec des transformations naturelles $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow R \circ L$ et $\epsilon : L \circ R \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ telles que les composées dans équation (1) soient l'identité forment une paire de foncteurs adjoints, voir [10] p. 83, Theorem 2.

Les foncteurs adjoints ont de bonnes propriétés. Par exemple, un foncteur adjoint à gauche entre catégories abéliennes est toujours exact à droite et un adjoint à droite exact à gauche, voir la Définition 3.3 (p. 25) et le Theorem 2.6.1 dans [11], p. 51. Une autre bonne propriété est la suivante (voir Theorem II.7.7 dans [7], p. 68):

Theorem 2.21. *Si le foncteur $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ admet un adjoint à gauche, alors R préserve produits, tirés-en-arrière et noyaux.*

Démonstration. Soit $\{Y; p_i\}$ le produit d'objets Y_i dans $\mathcal{D}$. Il faut montrer que $\{RY; R(p_i)\}$ est alors le produit des objets $R(Y_i)$ dans $\mathcal{C}$. Supposons donnés des morphismes $f_i : X \to RY_i$. Soit τ la bijection naturelle de l'adjonction avec inverse ξ. Alors $\xi(f_i) : LX \to Y_i$ sont des morphismes, donc il existe par la propriété universelle du produit un unique morphisme $g : LX \to Y$ tel que $p_i \circ g = \xi(f_i)$. On a alors

$$R(p_i) \circ \tau(g) = \tau(p_i \circ g) = f_i.$$

De plus, $\tau(g)$ est l'unique morphisme f tel que $R(p_i) \circ f = f_i$. En effet, tout $f' : X \to RY$ est de la forme $f' = \tau(g')$ et g est uniquement déterminé par $p_i \circ g = \xi(f_i)$.

Le deuxième point sont les tirés-en-arrière. Soit

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ B & \xrightarrow{\psi} & X \end{array}$$

un tiré-en-arrière dans $\mathcal{D}$. Nous affirmons que

$$\begin{array}{ccc} RY & \xrightarrow{R\alpha} & RA \\ \downarrow{\scriptstyle R\beta} & & \downarrow{\scriptstyle R\varphi} \\ RB & \xrightarrow{R\psi} & RX \end{array}$$

est un tiré-en-arrière dans $\mathcal{C}$. Pour cela, supposons donnés des morphismes $\gamma : Z \to RA$ et $\delta : Z \to RB$ dans $\mathcal{C}$ avec $R\varphi \circ \gamma = R\psi \circ \delta$. En appliquant ξ, on trouve $\varphi \circ \xi(\gamma) = \psi \circ \xi(\delta)$. Donc il existe (par la propriété universelle du tiré-en-arrière) un unique morphisme $\rho : LZ \to Y$ tel que $\alpha \circ \rho = \xi(\gamma)$ et $\beta \circ \rho = \xi(\delta)$. En appliquant ensuite τ, on trouve $R(\alpha) \circ \tau(\rho) = \gamma$ et $R(\beta) \circ \tau(\rho) = \delta$, et, comme on l'a vu pour les produits, $\tau(\rho)$ est l'unique morphisme vérifiant ces équations.

Le dernier point est la préservation des noyaux. Soit $\imath : \ker(f) \to B$ le noyau du morphisme $f : B \to C$ dans $\mathcal{D}$. Il faut montrer que $R(\imath) : R(\ker(f)) \to R(B)$ est le noyau de $R(f)$ dans $\mathcal{C}$. Soit donc $\alpha : A \to R(B)$ un morphisme avec $R(f) \circ \alpha = 0$. On a donc $\xi(\alpha) : L(A) \to B$ avec $f \circ \xi(\alpha) = 0$. Par la propriété universelle du noyau de f, il existe un unique morphisme $\alpha' : L(A) \to \ker(f)$ avec $\imath \circ \alpha' = \xi(\alpha)$. D'où le morphisme $\tau(\alpha')$ qui vérifie $R(\imath) \circ \tau(\alpha') = \alpha$. Une fois de plus, $\tau(\alpha')$ tire son unicité de l'unicité de α'. □

3 Algèbre homologique

Dans cette section, nous allons donner un petit aperçu de l'algèbre homologique, i.e. de la théorie des foncteurs dérivés. Pour plus de détails, je réfère aux livres de Hilton-Stammbach [7] et de Weibel [11]. Ici, on suit [4], Sections 1.4, 1.6 et 1.7.

3.1 Suites exactes

Voir [4] Section 1.4, p. 4.

Definition 3.1. *Une suite de morphismes*

$$\ldots \to X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \to \ldots$$

dans une catégorie abélienne s'appelle exacte en degré i si $\mathrm{im}(f_{i-1}) = \ker(f_i)$. *Elle est appelée exacte si elle est exacte en tout degré. Une suite exacte*

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

est appelée suite exacte courte.

Dans une suite exacte courte, X est un sous-objet de Y et $Z \cong Y/X$ est le quotient correspondant.

Definition 3.2. *Soient*

$$S : 0 \to X \to Z \xrightarrow{\pi} Y \to 0, \qquad S' : 0 \to X \to Z' \xrightarrow{\pi'} Y \to 0$$

deux suites exactes courtes (avec les mêmes termes extrêmes). Un morphisme de S vers S' est un morphisme $f : Y \to Y'$ qui se restreint en l'identité de X et de Y. L'ensemble des classes d'équivalence de suites exactes courtes (avec mêmes termes extrêmes) à isomorphisme près s'appelle $\mathrm{Ext}^1(Y, X)$*, l'ensemble des extensions de Y par X.*

On peut définir une opération d'addition sur $\mathrm{Ext}^1(Y, X)$. Soient pour cela S et S' deux suites exactes courtes comme ci-dessus. On construit d'abord la suite exacte somme:

$$0 \to X \oplus X \to Z \oplus Z' \to Y \oplus Y \to 0.$$

Ensuite, on fait le tiré-en-arrière (du côté droite) par rapport au morphisme diagonal $Y \to Y \oplus Y$ défini par $y \mapsto (y, y)$ pour obtenir une suite exacte

$$0 \to X \oplus X \to Z'' \to Y \to 0.$$

Le noyau reste $X \oplus X$ par la Proposition 2.8. Finalement, on fait le poussé-en-avant par l'application somme $X \oplus X \to X$ définie par $(x, x') \mapsto x + x'$ (du côté gauche). Cela donne une suite exacte

$$S + S' : 0 \to X \to Z''' \to Y \to 0.$$

Le conoyau est resté le même grâce à la version duale de la Proposition 2.8. Le fait que cette *somme de Baer* est associative, commutative et admet un neutre est l'objet d'un exercice.

3.2 Objets projectifs et injectifs

Voir [4] Section 1.6, p. 6.

Definition 3.3. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories abéliennes. Un foncteur additif $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est appellé exact à gauche (resp. exact à droite) si pour toute suite exacte courte $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ dans $\mathcal{C}$, la suite*

$$0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \qquad (\text{resp.} \quad F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0)$$

est exacte dans $\mathcal{D}$. Un foncteur est appelé exact s'il est exacte à gauche et exact à droite.

On utilise aussi le terme exact à gauche et exact à droite (et exact) pour des foncteurs contravariants. En effet, un foncteur contravariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est appelé exact à gauche si le foncteur covariant associé $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ est exact à gauche.

Exemple 3.4. *Soient X et Y objets dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$. Le foncteur contravariant* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$ *et le foncteur covariant* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ *sont tous les deux des foncteurs exacts à gauche de $\mathcal{C}$ vers la catégorie des groupes abéliens.*

Exemple 3.5. *Soit A un anneau et M un A-module à droite. Alors le foncteur $V \mapsto M \otimes_A V$ de la catégorie des A-modules à gauche vers la catégorie des groupes abéliens est exact à droite.*

Definition 3.6. *Un objet P dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ est appelé projectif si le foncteur* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -)$ *est exact. De même, un objet I dans $\mathcal{C}$ est appelé injectif si le foncteur* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, I)$ *est exact.*

Supposons maintenant que tous les objet de la catégorie abélienne $\mathcal{C}$ ont longueur finie.

Definition 3.7. *Soit $X \in \mathcal{C}$. Un couverture projective de X est un objet projectif $P(X)$ dans $\mathcal{C}$ ensemble avec un épimorphisme $p : P(X) \to X$ tels que si $g : P \to X$ est un épimorphisme d'un objet projectif P vers X, il existe un épimorphisme $h : P \to P(X)$ tel que $p\,h = g$.*

Si une telle couverture projective existe pour X, elle est unique à isomorphisme (non-unique) près.

Definition 3.8. *Soit X dans $\mathcal{C}$. Une enveloppe injective de X est un objet injectif $Q(X)$ de $\mathcal{C}$ ensemble avec un monomorphisme $i : X \to Q(X)$ tels que si $g : X \to Q$ est un monomorphisme de X vers un objet injectif Q, il existe un monomorphisme $h : Q(X) \to Q$ tel que $h\,i = g$.*

Si une telle enveloppe injective existe pour X, elle est unique à isomorphisme (non-unique) près.

3.3 Le foncteur Ext

Voir [4] Section 1.7, p. 7, [11], Sections 3.3 et 3.4, pp. 73 et 76, et [7], Ch. III, p. 84.

Soit R un anneau et soient M et N deux R-modules à gauche. On appelle *résolution projective* de M toute suite exacte

$$\ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

où les P_i sont des R-modules projectifs (par exemple, des R-modules libres). Étant donné une telle résolution, on applique le foncteur $\mathrm{Hom}_R(-, N)$ pour définir *le complexe* de R-modules

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P_0, N) \to \mathrm{Hom}_R(P_1, N) \to \mathrm{Hom}_R(P_2, N) \to \ldots.$$

Ceci veut dire que, si l'on note d_i le morphisme $\mathrm{Hom}_R(P_{i-1}, N) \to \mathrm{Hom}_R(P_i, N)$ pour tout $i \geq 0$ (avec $P_{-1} = 0$), l'on a $d_{i+1} \circ d_i = 0$.

La *cohomologie* de ce complexe est par définition

$$H^i := \ker(d_{i+1}) / \mathrm{im}(d_i).$$

Elle est indépendante (à isomorphisme canonique près) du choix de la résolution $P^\bullet$, voir le Comparison Theorem 2.2.6 dans [11], p. 35. Pour $i \geq 0$, cette cohomologie est notée $\mathrm{Ext}^i(M,N)$, et il est facile de voir (en utilisant que le foncteur Hom est exact à gauche) que $\mathrm{Ext}^0(M,N) = \mathrm{Hom}_R(M,N)$. De même, on montre ci-dessous que $\mathrm{Ext}^1(M,N)$ est canoniquement isomorphe au $\mathrm{Ext}^1(M,N)$ défini précédemment à l'aide de suite exactes ("Ext de Yoneda").

Soit $0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$ une suite exacte courte de R-modules. Alors il existe une suite exacte longue en cohomologie

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^i(M,N_1) \to \mathrm{Ext}^i(M,N_2) \to \mathrm{Ext}^i(M,N_3) \to \mathrm{Ext}^{i+1}(M,N_1) \to \ldots.$$

Lemma 3.9. *Pour tout $n \geq 0$ et tout anneau R, on a*

(a) $\mathrm{Ext}^n_R(\oplus_\alpha A_\alpha, B) \cong \Pi_\alpha \mathrm{Ext}^n_R(A_\alpha, B)$.

(b) $\mathrm{Ext}^n_R(A, \Pi_\beta B_\beta) \cong \Pi_\beta \mathrm{Ext}^n_R(A, B_\beta)$.

Démonstration. Soient $P_\alpha \to A_\alpha$ des résolutions projectives des A_α. Donc $\oplus_\alpha P_\alpha \to \oplus_\alpha A_\alpha$ est une résolution projective de la somme directe, puisque la somme direct de modules projectifs est projectif. De même, si $B_\beta \to Q_\beta$ sont des résolutions injectives des B_β, alors $\Pi_\beta B_\beta \to \Pi_\beta Q_\beta$ est une résolution injective du produit, puisque le produit direct d'injectifs est injectif. L'affirmation du lemme se déduit donc directement de $\Pi_\alpha \mathrm{Hom}_R(A_\alpha, B) = \mathrm{Hom}_R(\oplus_\alpha A_\alpha, B)$ et de $\mathrm{Hom}_R(A, \Pi_\beta B_\beta) = \Pi_\beta \mathrm{Hom}_R(A, B_\beta)$ et de la commutation de la prise de cohomologie d'un complexe de cochaînes avec le produit. □

Nous allons maintenant procéder à l'interprétation de Ext en termes de "Ext de Yoneda", i.e. à partir d'extensions et de suites exactes, voir [7], Ch. III.

Definition 3.10. *Soient A et B des R-modules. Une extension de A par B est la donnée d'un R-module X et d'une suite exacte courte $0 \to B \to X \to A \to 0$. Pour désigner une extension par un objet, notons-la ξ. Deux extensions sont équivalentes s'il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_B} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_A} & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On appelle une extension scindée ou triviale s'il elle est équivalente à l'extension

$$0 \to B \xrightarrow{\mathrm{incl}_1} B \oplus A \xrightarrow{\mathrm{proj}_2} A \to 0.$$

Lemma 3.11. *Si $\mathrm{Ext}^1_R(A,B) = 0$, alors toute extension de A par B est scindée.*

Démonstration. Soit $0 \to B \to E \to A \to 0$ une extension. Vue comme suite exacte courte, elle induit une suite exacte

$$\mathrm{Hom}_R(A,E) \to \mathrm{Hom}_R(A,A) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1_R(A,B).$$

Ainsi l'identité id_A se relève en un morphisme $\sigma : A \to E$ dans le cas où $\mathrm{Ext}^1_R(A,B) = 0$. Or, σ est une section de $E \to A$, donc la suite du départ est scindée: $E \cong A \oplus B$. □

Dans la démonstration précédente, on voit que la classe $\Theta(\xi) = \partial(\mathrm{id}_A) \in \mathrm{Ext}^1_R(A,B)$ est *l'obstruction* à ce que la classe ξ soit scindée: ξ se scinde si et seulement si id_A se relève à un élément de $\mathrm{Hom}_R(A,E)$ et ceci est le cas si et seulement si la classe $\Theta(\xi) \in \mathrm{Ext}^1_R(A,B)$ est nulle. Notons également que des extensions équivalentes sont des obstructions isomorphes par naturalité du connectant ∂. L'obstruction ne dépend que de la classe d'équivalence de ξ.

Theorem 3.12. *Étant donné deux R-modules A et B, l'application $\Theta : \xi \mapsto \partial(\mathrm{id}_A)$ établit une correspondance biunivoque*

$$\{\text{classes d'équivalence d'extensions de } A \text{ par } B\} \overset{1-1}{\leftrightarrow} \mathrm{Ext}^1_R(A,B),$$

sous laquelle l'extension scindée correspond à la classe nulle $0 \in \mathrm{Ext}^1_R(A,B)$.

Démonstration. Fixons une suite exacte courte $0 \to M \xrightarrow{j} P \to A \to 0$ avec P projectif ("présentation projective de A"). En appliquant $\mathrm{Hom}_R(-,B)$, on obtient une suite exacte

$$\mathrm{Hom}_R(P,B) \to \mathrm{Hom}_R(M,B) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1_R(A,B) \to 0.$$

Ainsi, pour un $x \in \mathrm{Ext}^1_R(A,B) = \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}_R(P,B) \to \mathrm{Hom}_R(M,B))$, on peut choisir $\beta \in \mathrm{Hom}_R(M,B)$ tel que $\partial(\beta) = x$. Soit E le poussé-en-avant de j et β, i.e. le conoyau de $M \to P \oplus B$, $m \mapsto (j(m), -\beta(m))$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{j} & P & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_A} & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0\ , \end{array}$$

où le conoyau A est préservé par le poussé-en-avant, ce que se déduit de la Proposition duale de Proposition 2.8. On note ξ la classe de $0 \to B \to E \to A \to 0$. Par naturalité du connectant ∂, on voit que $\Theta(\xi) = x$, i.e. que Θ est une surjection[1].

Cette construction donne une application bien définie Ψ de $\mathrm{Ext}^1_R(A,B)$ vers l'ensemble des classes d'équivalence d'extensions. En effet, si $\beta' \in \mathrm{Hom}_R(M,B)$ est un autre relèvement de x, il existe un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_R(P,B)$ tel que $\beta' = \beta + f \circ j$. Si l'on note E' le poussé-en-avant de j et β', alors les morphismes $i : B \to E$ et $\sigma + i \circ f$ induisent un isomorphisme $E' \cong E$ (par propriétés universelles des deux poussés-en-avant) et une équivalence entre ξ' et ξ.

[1] On notera que la même application Θ envoie soit ξ sur $\partial(\mathrm{id}_A)$ (en appliquant $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ à la suite ξ, soit sur $\partial(\mathrm{id}_B)$ (en appliquant $\mathrm{Hom}_R(-,B)$ à la suite ξ). Ceci se déduit du Theorem 2.7.6 dans [11], p. 63

Réciproquement, étant donné une extension ξ de A par B, la propriété de relèvement de P donne lieu à une application $\tau : P \to E$ et à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{j} & P & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_A} & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{i} & E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0\ , \end{array}$$

Dans cette situation, E est alors le poussé-en-avant par j et γ par la version duale de la Proposition 2.9. D'où $\Psi \circ \Theta(\xi) = \xi$, ce qui montre que Θ est injective. □

3.4 Cohomologie de groupes

Référence: [4] Ch. 1.7, p. 7.

On va illustrer l'algèbre homologique des sections précédentes sur l'exemple de la cohomologie des groupes. Soit G un groupe et soit A un G-module, i.e. un groupe abélien avec une action $\mathbb{Z}$-linéaire de G. Alors les groupes abéliens $\mathrm{Ext}^i_G(\mathbb{Z}, A)$ dans la catégorie de G-modules (où G agit trivialement sur $\mathbb{Z}$) s'appellent les *groupes de cohomologie* de G à valeurs dans A, et on les note $H^i(G, A)$.

Dans le cadre de la cohomologie des groupes (comme pour la cohomologie d'autres structures algébriques, e.g. les algèbres de Lie ou les algèbres associatives), on a une résolution projective explicite de $\mathbb{Z}$ comme G-module trivial, appelée *la résolution bar*. Celle-ci donne une manière explicite de définir et de calculer les groupes de cohomologie $H^i(G, A)$. Soit $P_i = \mathbb{Z}[G^{i+1}]$ le $\mathbb{Z}$-linéarisé du produit cartésien G^{i+1}. Les P_i deviennent des G-modules en posant pour $g, g_0, \ldots, g_i \in G$

$$g \cdot (g_0, g_1, \ldots, g_i) = (gg_0, g_1, \ldots, g_i).$$

Les P_i forment un complexe de groupes abéliens avec l'opérateur bord $\partial_i : P_i \to P_{i-1}$ défini par

$$\begin{aligned} \partial_i(g_0, \ldots, g_i) = (g_0g_1, g_2, \ldots, g_i) - (g_0, g_1g_2, \ldots, g_i) + \\ \ldots + (-1)^{i-1}(g_0, \ldots, g_{i-1}g_i) + (-1)^i(g_0, \ldots, g_{i-1}). \end{aligned}$$

Il est facile à vérifier que $(P_i, \partial_i)_{i\geq 0}$ forme une résolution du G-module trivial $\mathbb{Z}$. Les P_i sont des G-modules libres, donc projectifs.

On a des isomorphismes $\gamma_i : \mathrm{Hom}_G(P_i, A) \cong \mathrm{Map}(G^i, A)$ donnés pour $h \in \mathrm{Hom}_G(P_i, A)$ par

$$\gamma_i(h)(g_1, \ldots, g_i) := h(1, g_1, ..., g_i),$$

et les opérateurs $d_i = \partial_i^* : \mathrm{Hom}_G(P_{i-1}, A) \to \mathrm{Hom}_G(P_i, A)$ deviennent sous cette identification

$$\begin{aligned} d_i(f)(g_1, \ldots, g_i) = g_1 f(g_2, \ldots, g_i) - f(g_1g_2, \ldots, g_i) + \\ \ldots + (-1)^{i-1} f(g_1, \ldots, g_{i-1}g_i) + (-1)^i f(g_1, ..., g_{i-1}). \end{aligned}$$

Ce complexe dont les termes sont les $C^i = C^i(G, A) := \mathrm{Map}(G^i, A)$ et dont les différentielles sont données ci-dessus est appelé le *complexe standard* de G à valeurs dans A.

Les cocycles dans $\ker(d_{i+1})$ de ce complexe et les cobords dans $\mathrm{im}(d_i)$ de ce complexe seront notés $Z^i(G, A)$ et $B^i(G, A)$ respectivement, et la cohomologie $H^i(G, A)$. Notons que si A est un anneau commutatif et que l'action de G préserve la multiplication de A, alors $H^\bullet(G, A)$ devient un anneau gradué commutatif, avec comme multiplication le produit de Yoneda des Ext-groupes.

Remark 3.13. (a) $H^0(G, A) = A^G$, le sous-G-modules des invariants dans A. Donc, si l'action est triviale, on a $H^0(G, A) = A$.

(b) Si G agit trivialement sur A, alors $H^1(G, A) = \mathrm{Hom}(G, A)$. Plus généralement, $H^1(G, A)$ classifie les homomorphismes de G vers le produit semi-direct $A \rtimes G$ qui sont inverses à droite à la projection $A \rtimes G \to G$, à conjugaison par des éléments de A près.

(c) Le $H^2(G, A)$ classifie les extensions abéliennes de G par A. En particulier, si G agit trivialement sur A, il classifie les extensions centrales de G par A.

Remark 3.14. La définition de la notion de 1-cocycle peut être généralisé au cas où le groupe A n'est pas forcément abélien. Dans ce cas, en notant le produit de A multiplicativement, l'équation de 1-cocycle prend la forme

$$f(gh) = f(g) \cdot gf(h).$$

Ces 1-cocycles ne forment en général pas un groupe, mais seulement un ensemble. C'est un ensemble muni d'une action de A via

$$(a \cdot f)(g) := a \cdot f(g) \cdot g(a)^{-1}.$$

L'ensemble des orbites sous cette action est alors appelé $H^1(G, A)$, le premier espace de cohomologie de G à valeurs dans A. Dans le cas où A est abélien, on retrouve la définition habituelle de la cohomologie. On peut de nouveau montrer que $H^1(G, A)$ classifie les homomorphismes $G \to A \rtimes G$ qui sont inverses à droite à la projection standard, à conjugaison par des éléments de A près.

Remark 3.15. Soit $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ le groupe fini cyclique à n éléments. Calculons la cohomologie $H^i(G, \mathbb{Z})$. La résolution bar est trop volumineuse pour ce calcul, il y a dans ce cas une résolution plus petite. Posons $P_i = \mathbb{Z}G = \mathbb{Z}[g]/(g^n - 1)$ et soit $\partial_i : P_i \to P_{i-1}$ défini par $\partial_i(f) = (g - 1)f$ si i est impair, et par

$$\partial_i(f) = (1 + g + g^2 + \ldots + g^{n-1})f$$

si i est pair. On montre qu'il s'agit d'une résolution et donc d'une *résolution périodique*. À l'aide de cette résolution, on trouve $H^{2j+1}(G, \mathbb{Z}) = 0$ et $H^{2j}(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $j > 0$, tandis que $H^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. On peut même aller plus loin et montrer que l'anneau gradué $H^\bullet(G, \mathbb{Z})$ est

$$H^\bullet(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/(nx) = \mathbb{Z} \oplus x(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x],$$

où x est un générateur en degré 2.

4 Théorie de représentations catégorique

Référence: [4], Ch. 1.8, p. 9.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Le but de cette section est de mettre à notre disposition les outils qui permettent de faire de la théorie des représentations dans $\mathcal{C}$ sans utiliser qu'il s'agit de la catégorie des modules sur un anneau.

Definition 4.1. *Un sous-objet d'un objet Y de $\mathcal{C}$ est un objet X avec un monomorphisme $i : X \to Y$. Un objet quotient de Y est un objet Z avec un épimorphisme $p : Y \to Z$. Un sous-quotient de Y est le quotient d'un sous-objet de Y.*

On montre facilement qu'un sous-quotient d'un sous-quotient de Y est un sous-quotient de Y. En particulier, un sous-objet d'un quotient de Y est un sous-quotient. Pour un sous-objet $X \subset Y$, on définit le quotient $Z = Y/X$ en tant que conoyau du monomorphisme $i : X \to Y$.

Soit maintenant $\mathcal{C}_\alpha$ pour $\alpha \in I$ une famille de catégories additives. La *somme directe* $\mathcal{C} = \bigoplus_{\alpha\in I} \mathcal{C}_\alpha$ est la catégorie dont les objets sont les sommes

$$X = \bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha, \qquad X_\alpha \in \mathcal{C}_\alpha$$

telles que pour presque tous α, $X_\alpha = 0$. De plus, les morphismes sont les

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \bigoplus_{\alpha\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\alpha}(X_\alpha, Y_\alpha)$$

pour $X = \bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha$ et $Y = \bigoplus_{\alpha\in I} Y_\alpha$. Il est facile de voir que $\mathcal{C}$ est une catégorie additive. Elle est $\mathbb{K}$-linéaire si et seulement si toutes les catégories $\mathcal{C}_\alpha$ le sont.

Definition 4.2. *Une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ est dite indécomposable si elle n'est pas équivalente à la somme directe de deux catégories non-nulles.*

Soit toujours $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne.

Definition 4.3. *Un objet non-nul X est appelé simple ou irréductible si 0 et X sont ses seuls sous-objets. Un objet X est appelé semi-simple s'il est la somme directe d'objets simples. La catégorie $\mathcal{C}$ est appelée semi-simple si tout objet est semi-simple.*

Lemma 4.4 (Lemme de Schur)**.** *Soient X et Y deux objets simples de $\mathcal{C}$. Alors tout morphisme non-nul $f : X \to Y$ est un isomorphisme. En particulier, si X n'est pas isomorphe à Y, alors* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = 0$*. De plus,* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ *est une algèbre à division.*

Soit X un objet dans la catégorie abélienne $\mathcal{C}$.

Definition 4.5. *On dit que X est de longueur fini s'il existe une suite de composition*

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n = X$$

telle que X_i/X_{i-1} est simple pour tous $i = 1, \ldots, n$. On appellera une telle suite de composition aussi suite de Jordan-Hölder de X. On dira qu'une suite de Jordan-Hölder contient un objet simple Y avec multiplicité m si le nombre de i tels que X_i/X_{i-1} soit isomorphe à Y est m.

La version catégorique du Théorème de Jordan-Hölder est alors:

Theorem 4.6 (Théorème de Jordan-Hölder)**.** *Supposons que l'objet X soit de longueur fini. Alors toute filtration de X par des sous-objets peut être raffinée en une suite de Jordan-Hölder, et deux suites de Jordan-Hölder de X contiennent tout objet simple avec la même multiplicité. En particulier, elles ont la même longueur.*

Quitte à utiliser le Théorème de Freyd-Mitchell, ce théorème est le même que Théorème 1.7, i.e. le Théorème de Jordan-Hölder pour les A-modules. On s'intéressera dans ce cours essentiellement à des catégories abéliennes où tout objets est de longueur fini, ainsi des suites de Jordan-Hölder existent.

Rappelons qu'un objet X dans la catégorie abélienne $\mathcal{C}$ s'appelle indécomposable s'il n'est pas somme directe de deux sous-modules propres.

Theorem 4.7 (Krull-Schmidt)**.** *Tout objet de longueur fini admet une décomposition en somme directe d'indécomposables, de plus, elle est unique à isomorphisme près.*

De nouveau, quitte à utiliser le Théorème de Freyd-Mitchell, ce théorème est le même que Théorème 1.14, i.e. le Théorème de Krull-Schmidt pour les A-modules.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie $\mathbb{K}$-linéaire où tous les objets sont de longueur fini. Pour deux objets X et Y de $\mathcal{C}$ tels que Y est simple, on note $[X : Y]$ la multiplicité de Y dans une suite de Jordan-Hölder de X. Cette quantité est bien définie grâce au Théorème de Jordan-Hölder.

Definition 4.8. *Le groupe de Grothendieck $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ est le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphisme X_i des objets simples de $\mathcal{C}$. À chaque objet X de $\mathcal{C}$, on associe sa classes $[X]$ dans $\mathrm{Gr}(\mathcal{C})$ donnée par la formule*

$$[X] = \sum_i [X : X_i] X_i.$$

Il est clair que si

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

est une suite exacte dans $\mathcal{C}$, alors $[Y] = [X] + [Z]$. Quand cela ne prêtera pas à confusion, on écrira X au lieu de $[X]$.

Definition 4.9. *Une catégorie $\mathbb{K}$-linéaire abélienne $\mathcal{C}$ est appelée localement finie si les conditions suivantes sont satisfaites:*

(a) pour toute pair d'objets X et Y, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est de dimension finie,

(b) tout objet X de $\mathcal{C}$ est de longueur finie.

Ainsi, dans toute catégorie abélienne localement finie, les Théorèmes de Jordan-Hölder et de Krull-Schmidt sont vrais. On n'étudiera que des catégories abéliennes localement finie dans ce cours. Pour une telle, on notera $\mathcal{O}(\mathcal{C})$ l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets simples.

Definition 4.10. *Un foncteur additif $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre catégories abéliennes localement finies est appelé injectif s'il est pleinement fidèle. On appelle F surjectif si tout objet simple de $\mathcal{D}$ est sous-quotient d'un objet du type $F(X)$ pour un objet X de $\mathcal{C}$.*

On observe que cette notion de surjectivité est plus faible que la surjectivité essentielle du foncteur F (qui affirme que pour tout objet de $\mathcal{D}$ est isomorphe à $F(X)$ pour un objet X de $\mathcal{C}$).

Proposition 4.11. *Supposons $\mathbb{K}$ algébriquement clos. Alors dans toute catégorie localement finie $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{K}$, on a*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = 0,$$

si X et Y sont des simples non-isomorphes, et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \cong \mathbb{K}$ pour X simple.

Démonstration. Soit $f : X \to Y$ un morphisme. Par le Lemme de Schur, on a soit $f = 0$, soit f est un isomorphisme. Ceci implique bien que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = 0$ si X et Y sont non-isomorphes et que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ est une algèbre à division pour X simple. Puisque $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ est de dimension finie par hypothèse, ceci implique que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \cong \mathbb{K}$, puisque $\mathbb{K}$ est algébriquement clos. □

Definition 4.12. *Une catégorie abélienne $\mathbb{K}$-linéaire $\mathcal{C}$ est appelée finie si elle est équivalente à la catégorie A–**mod** des modules de dimension finie sur une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie A.*

Cette définition est ambiguë, puisque l'algèbre A n'est pas canoniquement associée à la catégorie $\mathcal{C}$. En fait, cette définition détermine uniquement la classe de A sous équivalence de Morita. Du coup, il est mieux d'avoir une définition indépendante de A:

Definition 4.13. *Une catégorie $\mathbb{K}$-linéaire est appelée finie si*

(a) les espaces de morphismes dans $\mathcal{C}$ sont de dimension finie,

(b) tout objet de $\mathcal{C}$ est de longueur finie,

(c) $\mathcal{C}$ a assez de projectifs, i.e. tout objet simple a une couverture projective,

(d) il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes d'objets simples.

Notons que les Condition (a) et (b) sont l'exigence que $\mathcal{C}$ est localement finie.

L'équivalence des deux définitions d'être finie se voit comme suit. D'une part, si $\mathcal{C} = A$–**mod** est la catégorie des modules de dimension finie sur une algèbre de dimension finie A, alors on a clairement (a)-(b). Pour le point (c), on a le lemme suivant:

Lemma 4.14. *Tout simple est quotient d'un indécomposable monogène projectif.*

Démonstration. Soit S un simple dans A–**mod**. Alors S est monogène (car tout élément non nul engendre un sous-module non-nul qui doit être égal à S), donc quotient de A: il existe $Q \subset A$ tel que $A/Q \cong S$. Parmi tous les facteurs directs M de A tels que $M/Q_M \cong S$, on peut choisir un M de dimension minimale, noté P. Alors P est projectif et monogène (projectif puisque facteur direct d'un libre, monogène, car quotient de A). Montrons que P est indécomposable. Si l'on avait $P = M \oplus N$ et $\pi : P \to S$ est l'épimorphisme construit, alors $S \cong \pi(M) + \pi(N)$. Puisque $S \neq 0$, un des facteurs est non nul, disons $\pi(M) \neq 0$. Mais alors $S = \pi(M)$, puisque S est simple, donc S est quotient de M (ce qui contredit la minimalité de P, si N est non nul. □

On note le P de la démonstration $P(S)$ et on conclut que $\pi : P(S) \to S$ est une couverture projective de S. En effet, si $f : P \to S$ est un épimorphisme, alors il existe $g : P \to P(S)$ tel que $f = \pi \circ g$ par projectivité de P. On montre ensuite que g doit être un épimorphisme.

Pour le point (d), on utilise le Théorème de Krull-Schmidt: on a vu que quand on l'applique à A elle-même (ce qui est possible, puisque A est de dimension finie et donc Artinien et Noethérien comme A-module), on a que A se décompose en produit d'anneaux locaux (car le facteurs sont indécomposables, donc fortement indécomposables, et $\mathrm{End}_{A_i}(A_i) \cong A_i^{\mathrm{op}}$ est donc local). Chaque facteur local n'a qu'un seul module simple (dont l'annulateur est l'idéal maximal). Donc A n'a qu'un nombre fini de modules simples (à isomorphie près).

Réciproquement, si $\mathcal{C}$ satisfait (a)-(d), alors on peut prendre $A = \mathrm{End}(P)^{\mathrm{op}}$ où P est un générateur projectif de $\mathcal{C}$. Un choix pour P est, par exemple,

$$P = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i,$$

où les P_i parcourent les couvertures projectives des simples X_i de $\mathcal{C}$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Un générateur projectif P de $\mathcal{C}$ donne lieu à un foncteur $F = F_P : \mathcal{C} \to \mathrm{Vec}$ de $\mathcal{C}$ vers la catégorie Vec des espaces vectoriels de dimension finie, en posant $F(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, X)$. Le fait que P est projectif se traduit en la propriété que F est exact, et le fait que P est un générateur se traduit en la propriété que F est fidèle (i.e. pour toute paire d'objets A et B de $\mathcal{C}$, l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vec}}(F(A), F(B))$ est injective). On va prendre cette propriété en tant que définition du fait d'être un générateur. De plus, l'algèbre $A = \mathrm{End}(P)^{\mathrm{op}}$ peut se définir aussi en tant que $\mathrm{End}(F)$, l'algèbre des automorphismes fonctorielles de F. Réciproquement, il est bien connu que tout foncteur exact fidèle $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Vec}$ apparaît ainsi par un générateur projectif P de $\mathcal{C}$, qui est unique à isomorphisme près.

Remark 4.15. La catégorie des duaux d'une catégorie abélienne finie est de nouveau finie. En effet, c'est la catégorie des modules de dimension finie sur

A^{op}, l'algèbre A avec le produit opposé. Le foncteur de dualité entre ces deux catégories envoie un module de dimension finie sur son dual. On en déduit que tout objet d'une catégorie abélienne finie admet à la fois couverture projective et enveloppe injective.

Definition 4.16. *Soient A et B deux $\mathbb{K}$-algèbres de dimension finie et soient A–**mod** et B–**mod** les catégories des modules de dimension finie sur A et B respectivement. On dit qu'un foncteur $F : A$–**mod** $\to B$–**mod** est $\otimes$-représentable s'il existe un (B, A)-bimodule V tel que F est naturellement isomorphe au foncteur $X \mapsto V \otimes_A X$.*

On peut montrer que $F : A$–**mod** $\to$ Vec est $\otimes$-représentable si et seulement si il a un adjoint à droite.

Proposition 4.17. *Un foncteur $F : A$–**mod** $\to B$–**mod** qui est $\mathbb{K}$-linéaire et additif est $\otimes$-représentable si et seulement si il est exact à droite.*

Démonstration. Le sens direct est clair, puisque le foncteur produit tensoriel est exact à droite. Pour le sens réciproque, soit $F : A$–**mod** $\to$ Vec exact à droite. Notons $V = F(A)$. Alors V est un B-module avec une action de A à droite qui commute à celle de B-module, i.e. V est un (B, A)-bimodule. Montrons que $F(X)$ s'identifie de façon naturelle à $V \otimes_A X$. En effet, ceci est clair quand X est un A-module libre. Soit $M \to N \to X \to 0$ une présentation libre de X. On applique le foncteur F qui est exact à droite à cette suite pour obtenir que $F(X)$ est le conoyau de l'application $V \otimes_A M \to V \otimes_A N$ qui est égal à $V \otimes_A X$. Cet isomorphisme $F(X) \to V \otimes_A X$ ne dépend pas de la présentation libre choisie pour X et est fonctoriel en X. □

Corollary 4.18. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne $\mathbb{K}$-linéaire finie et soir $F : \mathcal{C} \to$* Vec *un foncteur additif, $\mathbb{K}$-linéaire et exact à gauche. Alors $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, -)$ pour un objet V de $\mathcal{C}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C} = A$–**mod** pour une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie A. Le foncteur $X \mapsto F(X^*)^*$ est un foncteur exact à droite de A–**mod** dans A–**mod**. Ainsi on a $F(X^*)^* \cong X \otimes_A V$ pour un A-module V, naturellement en X. Du coup, on a $F(X^*) = (X \otimes_A V)^* = \mathrm{Hom}_{A\text{–}\mathbf{mod}}(V, X^*)$, i.e. $F(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, Y)$ pour tout Y dans $\mathcal{C}$, naturellement en Y. □

Remark 4.19. Le Lemme de Yoneda affirme que les morphismes entre deux foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, -)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, -)$ sont exactement les morphismes entre les objets correspondants V et W, i.e. tout tel morphisme s'obtient en tant que précomposition par un morphisme $\phi : W \to V$ dans $\mathcal{C}$.

5 Catégories monoïdales

Référence: [9], Ch. XI, p. 275.

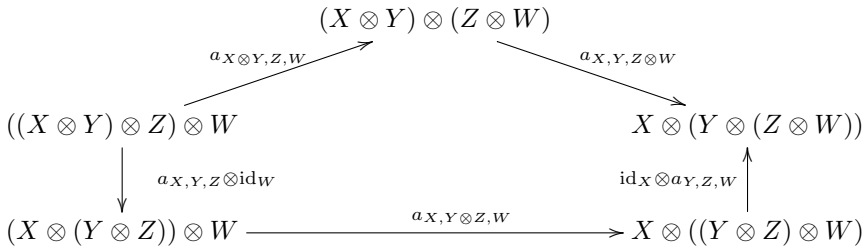
5.1 Définition et Exemples

Une catégorie monoïdale est une catégorie [2]avec un produit tensoriel:

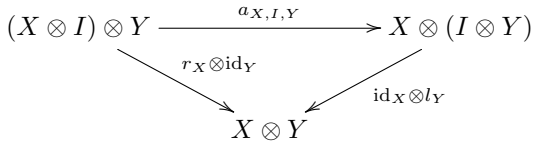
Definition 5.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un produit tensoriel $\otimes$ sur $\mathcal{C}$ est un foncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tel qu'il existe un isomorphisme naturel*

$$a : \otimes \circ (\otimes \times \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \otimes \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times \otimes)$$

qui vérfie pour tous $X, Y, Z, W \in \mathcal{C}$ le pentagone suivant commute:



De plus, on exige que $\otimes$ admette une unité, i.e. il existe un object $I \in \mathcal{C}$ avec deux isomorphismes naturels $l : I \otimes - \to \mathrm{id}$ et $r : - \otimes I \to \mathrm{id}$ tels que pour tous $X, Y \in \mathcal{C}$ le triangle suivant commute:



On appelle $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ une catégorie monoïdale.

Exemple 5.2. *La catégorie abélienne $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels est une catégorie monoïdale avec les produit tensoriel ordinaire $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$. Ceci a été constaté dans la Proposition 1.3. L'objet unité $I = \mathbb{K}$, l'espace vectoriel $\mathbb{K}$, puisque $\mathbb{K} \otimes V \cong V \otimes \mathbb{K} \cong V$ pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel V (naturellement en V), voir Proposition 1.3.*

Exemple 5.3. *Soit (A, μ, η) une algèbre associative et $\mathcal{C} = A$–**mod**, la catégorie abélienne des A-modules (à gauche). Supposons que $(A, \mu, \eta, \triangle, \epsilon)$ est une bigèbre. Alors le produit tensoriel sur* Vect *se restreint en un produit tensoriel sur A–**mod**: Pour deux A-modules X et Y, le produit tensoriel $X \otimes_{\mathbb{K}} Y$ devient un A-module en posant*

$$a \cdot (x \otimes y) := \triangle(a)(x \otimes y) = \sum_a (a_1 \cdot x) \otimes (a_2 \cdot y).$$

Le corps de base $\mathbb{K}$ devient un A-module grâce à l'application ϵ: $a \cdot \lambda := \epsilon(a)\lambda$ pour tous $a \in A$ et tous $\lambda \in \mathbb{K}$.

[2]Elle sera souvent abélienne dans notre contexte, mais ce n'est pas obligatoire pour définir la notion de catégorie monoïdale.

En fait, on a la proposition suivante:

Proposition 5.4 ([9], Prop. XI.3.1, p.285)**.** *Étant donné une algèbre associative* (A, μ, η) *et morphismes d'algèbres* $\triangle : A \to A \otimes A$ *et* $\epsilon : A \to \mathbb{K}$*. Alors la catégorie* A–**mod** *est monoïdale (par rapport à* $\triangle$ *et* ϵ*) si et seulement si* $(A, \mu, \eta, \triangle, \epsilon)$ *est une bigèbre.*

Démonstration. Dans le sens réciproque, il suffit de montrer que la contrainte d'associativité a et les contraintes d'unitalité l et r de la catégorie Vect sont des morphismes de A-modules. Ceci est facile à montrer.

Dans le sens direct, l'associativité du produit tensoriel pour $X = Y = Z = A$ (en tant que A-module pour la multiplication à gauche), évalué sur $1 \otimes 1 \otimes 1$ (pour $1 \in A$), montre que $\triangle$ est coassociative:

$$a_{A,A,A}(a \cdot ((u \otimes v) \otimes w)) = a \cdot a_{A,A,A}((u \otimes v) \otimes w).$$

Puisque l'action de A sur le produit tensoriel est donnée par le morphisme $\triangle$ et par définition de l'isomorphisme $a_{A,A,A}$, ceci se réécrit:

$$(\triangle \otimes \mathrm{id})\triangle(a)((u \otimes v) \otimes w) = (\mathrm{id} \otimes \triangle)\triangle(a)(u \otimes (v \otimes w)).$$

En posant $u = v = w = 1 \in A$, on obtient

$$(\triangle \otimes \mathrm{id})\triangle(a) = (\mathrm{id} \otimes \triangle)\triangle(a)$$

pour tout $a \in A$, i.e. la coassociativité de $\triangle$. Un raisonnement analogue montre que ϵ est une counité: la contrainte d'unitalité à gauche l_A est A-linéaire, et cela implique que $(\epsilon \otimes \mathrm{id})\triangle(a) = a$ pour tout $a \in A$. La A-linéarité de la contrainte à droite r_A montre que $(\mathrm{id} \otimes \epsilon)\triangle(a) = a$ pour tout $a \in A$. □

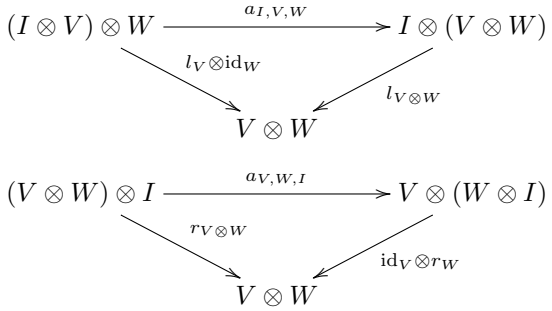
Remark 5.5. Un monoïde peut se définir en tant qu'ensemble C avec un produit associatif $(x, y) \mapsto x \cdot y$ et un élément neutre $1 \in C$ tel que $1^2 = 1$ et pour tout $x \in C$ des bijections $x \mapsto 1 \cdot x$ et $x \mapsto x \cdot 1$. En effet, on a $1 \cdot 1 \cdot x = 1 \cdot x$ par $1^2 = 1$, et grâce à la bijection, on en déduit $1 \cdot x = x$ pour tout $x \in C$.

De la même manière (en catégorifiant), il existe une définition équivalente de la notion de catégorie monoïdale où l'on exige qu'il existe un élément unité I et un isomorphisme $i : I \otimes I \cong I$ et des autoéquivalences de catégories $L_I : X \to I \otimes X$ et $R_I : X \to X \otimes I$. C'est le point de vue mis en avant dans [4] qui est montré d'être équivalent à la définition d'une catégorie monoïdale ici.

5.2 Propriétés de l'unité I

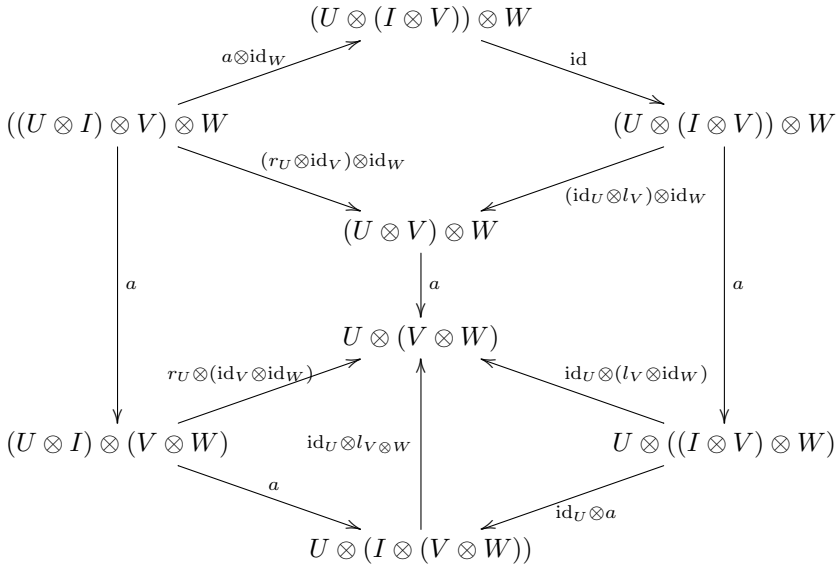
Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I, l, r)$ une catégorie monoïdale. Dans la Définition 5.1, l'unité I est au milieu dans le diagramme en forme de triangle. Il s'avère que les triangles où I est à droite et à gauche sont aussi commutatifs:

Lemma 5.6. *Les diagrammes en triangle suivants sont commutatifs:*



pour toute pair d'objets (V, W) *de* $\mathcal{C}$*.*

Démonstration. Voir Lemma XI.2.2 de [9], p. 283.



Dans ce diagramme, le hexagone circonscrit est le pentagone de la définition d'une catégorie monoïdale, le carré au milieu en haut est le triangle de la contrainte d'unitalité, les deux parallèlegrammes des côtés sont la naturalité de la contrainte d'associativité a (pour abréger, on n'a pas mis les indices) et le triangle en bas à gauche est de nouveau le triangle de la contrainte d'unitalité. Puisque tous les morphismes sont des isomorphismes, on déduit la commutativité du triangle en bas à droite. Cela donne pour $U = I$:

$$\mathrm{id}_I \otimes (l_{V \otimes W} \circ a) = \mathrm{id}_I \otimes (l_V \otimes \mathrm{id}_W).$$

On en déduit (avec la naturalité de l et le fait que l est un isomorphisme) que $l_{V \otimes W} \circ a = l_V \otimes \mathrm{id}_W$. Ceci est la commutativité du premier triangle dans l'énoncé. La commutativité du deuxième se démontre de façon analogue. □

On en déduit des propriétés des contraintes d'unitalité où l'indice comporte l'unité I:

Lemma 5.7. *Pour tout objet V de $\mathcal{C}$, on a*

$$l_{I\otimes V} = \mathrm{id}_I \otimes l_V, \qquad r_{V\otimes I} = r_V \otimes \mathrm{id}_I, \qquad l_I = r_I.$$

Démonstration. Par naturalité de la contrainte d'unitalité l (appliqué au morphisme $l_V : I \otimes V \to V$), on a $l_V \circ l_{I\otimes V} = l_V \circ (\mathrm{id}_I \otimes l_V)$. Puisque l_V est un isomorphisme, on en déduit $l_{I\otimes V} = \mathrm{id}_I \otimes l_V$. La deuxième égalité s'obtient de la même manière en utilisant la naturalité de la contrainte d'unitalité à droite r.

Montrons alors $l_I = r_I$. Par le lemme précédent (i.e. $l_V \otimes \mathrm{id}_W = l_{V\otimes W} \circ a_{I,V,W}$ pour $V = W = I$) et $l_{I\otimes V} = \mathrm{id}_I \otimes l_V$ (également pour $V = I$), on obtient

$$l_I \otimes \mathrm{id}_I = l_{I\otimes I} \circ a_{I,I,I} = (\mathrm{id}_I \otimes l_I) \circ a_{I,I,I}.$$

Du triangle de la définition (i.e. $r_V \otimes \mathrm{id}_W = \mathrm{id}_V \otimes l_W \circ a_{V,I,W}$ toujours avec $V = W = I$), on obtient $r_I \otimes \mathrm{id}_I = (\mathrm{id}_I \otimes l_I) \circ a_{I,I,I}$. On en conclut donc $l_I \otimes \mathrm{id}_I = r_I \otimes \mathrm{id}_I$. Ceci donne finalement $r_I = l_I$, car r est un isomorphisme naturel. □

On en déduit que les endomorphismes de I forment un monoïde commutatif:

Proposition 5.8. *L'ensemble* $\mathrm{End}(I)$ *des endomorphismes de l'objet unité I forme un monoïde commutatif par rapport à la composition des endomorphismes. De plus, pour des endomorphismes f et g de I, on a*

$$f \otimes g = g \otimes f = r_I^{-1} \circ (f \circ g) \circ r_I = r_I^{-1} \circ (g \circ f) \circ r_I.$$

Cette dernière affirmation veut dire que le produit tensoriel d'endomorphismes de I coincide avec la composition, pourvu que l'on identifie I et $I \otimes I$ via $l_I = r_I$.

Démonstration. Il est clair que $\mathrm{End}(I)$ est un monoïde pour la composition avec comme unité l'endomorphisme id_I. Montrons qu'il est commutatif. La naturalité de l et r implique

$$f \otimes \mathrm{id}_I = r_I^{-1} \circ f \circ r_I \qquad \text{et} \qquad \mathrm{id}_I \otimes g = l_I^{-1} \circ g \circ l_I.$$

En utilisant $r_I = l_I$ du lemme précédent et la *loi d'échange* (voir Exo 1 du TD1), on obtient

$$f \otimes g = r_I^{-1} \circ (f \circ g) \circ r_I = r_I^{-1} \circ (g \circ f) \circ r_I = g \otimes f.$$

On en déduit que $f \circ g = g \circ f$. □

5.3 Exemples de catégories monoïdales

Pour les exemples suivants, la référence est [4], Ch. 2.3, p. 26.

Exemple 5.9. *La catégorie G–**mod** des G-modules sur un corps $\mathbb{K}$ est une catégorie monoïdale: Pour deux G-modules M et N et des éléments $m \in M$ et $n \in N$, on définit*

$$g \cdot (m \otimes n) = (g \cdot m) \otimes (g \cdot n).$$

Ceci est compatible avec le fait que le coproduit dans $\mathbb{K}G$ est $\triangle(g) = g \otimes g$ pour tout $g \in G$. L'unité du produit tensoriel est le G-module trivial $\mathbb{K}$ (i.e. $g \cdot \lambda = \epsilon(g)\lambda = \lambda$ pour tout $g \in G$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$). La sous-catégorie pleine G–$\mathbf{mod}^{\mathrm{fin}}$ des G-modules de dimension finie est également une catégorie monoïdale.

Exemple 5.10. *Soit G un groupe fini et Vect_G la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels G-gradués, i.e. un objet de Vect_G est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V avec une décomposition $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$. Les morphismes dans cette catégorie doivent respecter cette décomposition (i.e. $f(V_g) \subset W_g$ pour $f : V \to W$ et tout $g \in G$). Le produit tensoriel est défini par:*

$$(V \otimes W)_g = \bigoplus_{x,y \in G : xy = g} V_x \otimes W_y.$$

L'unité I du produit tensoriel est donnée par $I_1 = \mathbb{K}$ et $I_g = 0$ pour tout $g \neq 1 \in G$. Dans Vect_G, il existe des objets δ_g pour $g \in G$ qui sont définis par $(\delta_g)_x = \mathbb{K}$ si $x = g$ et $(\delta_g)_x = 0$ sinon. Ces objets vérifient $\delta_g \otimes \delta_h = \delta_{gh}$ et ils forment une sorte de base de la catégorie Vect_G dans le sens que tout objet de $\mathrm{Vect}_G^{\mathrm{fin}}$ est isomorphe à une somme de δ_g. En fait, Vect_G est la catégorie des représentations de $\mathbb{K}[G]$ introduit dans l'Exemple 1.21 pour un groupe fini G. Pour cela, on peut remarquer que le produit dans $\mathbb{K}[G]$ s'écrit pour les fonctions delta comme

$$\delta_g \delta_h = \delta_{g,h} \delta_g.$$

Ceci implique que les fonctions delta sont des projecteurs orthogonaux dont la somme fait 1 ($1 = \sum_{g \in G} \delta_g$). Ces projecteurs donnent la décomposition $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$.

Exemple 5.11. *Soit G un groupe et A un groupe abélien (écrit multiplicativement), vu comme G-module trivial. On se donne un 3-cocycle $\omega \in Z^3(G, A)$ sur G à coefficients dans A. Cela veut dire que ω est une application $\omega : G \times G \times G \to A$ qui vérifie*

$$\omega(gg', g'', g''')\omega(g, g', g''g''') = \omega(g, g', g'')\omega(g, g'g'', g''')\omega(g', g'', g''')$$

pour tous $g, g', g'', g''' \in G$.

On définit une catégorie monoïdale $\mathcal{C}_G^\omega$ comme suit: Les objets δ_g sont indexés par les éléments de G. Les morphismes sont donnés par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_G^\omega}(\delta_g, \delta_h) = \emptyset$ si $g \neq h$, et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_G^\omega}(\delta_g, \delta_g) = A$. Ceci définit bien une catégorie. Le produit tensoriel est donné par $\delta_g \otimes \delta_h = \delta_{gh}$ sur les objets, et le produit tensoriel sur

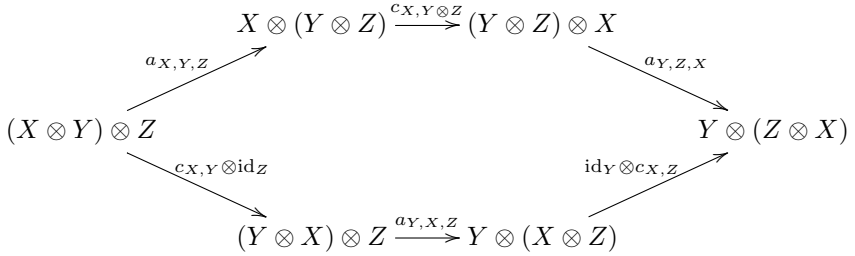
les morphismes est donné par le produit dans A. L'unité I du produit tensoriel est donnée par $I = 1 \in G$. Au lieu de prendre comme contrainte d'associativité l'identité, on la prend induite par ω, à savoir:

$$a_{\delta_g,\delta_h,\delta_m} := \omega(g,h,m)\mathrm{id}_{\delta_{ghm}} : (\delta_g \otimes \delta_h) \otimes \delta_m \to \delta_g \otimes (\delta_h \otimes \delta_m),$$

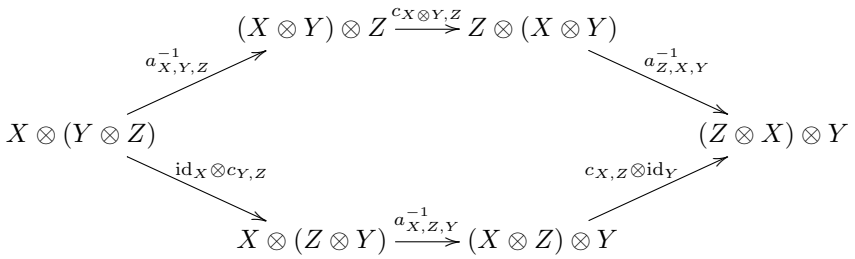
pour $g, h, m \in G$. En fait, le pentagone pour la contrainte d'associativité se déduit de l'identité de cocycle pour ω.

5.4 Catégories monoïdales tressées

Definition 5.12 ([9], Ch. XIII.1, p. 314)**.** *Une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est appelée tressée, s'il existe une contrainte de commutativité, i.e. un isomorphisme naturel $c_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$ pour tous $X, Y \in \mathcal{C}$ tel que les deux hexagones suivants sont commutatifs:*



et



La catégorie Vect est tressée pour la contrainte de commutativité exhibée en Proposition 1.3. Une catégorie monoïdale peut être tressée par rapport à plusieurs tressages différents. On verra quelques exemples en exercices.

5.5 Foncteurs monoïdaux

Voici la bonne notion de *foncteur monoïdal* qui préserve donc la structure monoïdale:

Definition 5.13 ([9], Ch. XI.4, p. 287)**.** *Soient $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ et $(\mathcal{D}, \otimes, I, a, l, r)$ deux catégories monoïdales. Un foncteur monoïdal de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ est un triplet $(F, \varphi_0, \varphi_2)$ où $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur, φ_0 est un isomorphisme de I vers $F(I)$ et*

$$\varphi_2(U,V) : F(U) \otimes F(V) \to F(U \otimes V)$$

est une famille d'isomorphismes naturels pour tous $U, V \in \mathcal{C}$ tels que pour tous $U, V, W \in \mathcal{C}$, les diagrammes suivants soient commutatifs:

$$\begin{array}{ccc}
(F(U)\otimes F(V))\otimes F(W) & \xrightarrow{a_{F(U),F(V),F(W)}} & F(U)\otimes(F(V)\otimes F(W)) \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi_2(U,V)\otimes \mathrm{id}_{F(W)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{F(U)}\otimes\varphi_2(V,W)} \\
F(U\otimes V)\otimes F(W) & & F(U)\otimes F(V\otimes W) \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi_2(U\otimes V,W)} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2(U,V\otimes W)} \\
F((U\otimes V)\otimes W) & \xrightarrow{F(a_{U,V,W})} & F(U\otimes(V\otimes W))
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
I\otimes F(U) & \xrightarrow{l_{F(U)}} & F(U) \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi_0\otimes \mathrm{id}_{F(U)}} & & \uparrow{\scriptstyle F(l_U)} \\
F(I)\otimes F(U) & \xrightarrow{\varphi_2(I,U)} & F(I\otimes U)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
F(U)\otimes I & \xrightarrow{r_{F(U)}} & F(U) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{F(U)}\otimes\varphi_0} & & \uparrow{\scriptstyle F(r_U)} \\
F(U)\otimes F(I) & \xrightarrow{\varphi_2(U,I)} & F(U\otimes I)
\end{array}$$

On appelle un foncteur monoïdal strict, si les isomorphismes φ_0 et φ_2 sont des identités.

Une transformation naturelle entre foncteurs monoïdaux est une transformation naturelle entre les foncteurs sous-jacents qui fait commuter les diagrammes faisant intervenir φ_0 et φ_0' et φ_2 et φ_2'. Avec cette notion de transformation naturelle, on formule l'équivalence de catégories monoïdales.

Exemple 5.14. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, A une $\mathbb{K}$-algèbre, et soit $\mathcal{C} = A$–**mod** la catégorie des A-modules à gauche. Alors on a un foncteur*

$$F : A\text{–}\mathbf{bimod} \to \mathrm{End}(\mathcal{C}), \quad M \mapsto (M \otimes_A -),$$

*où A–**bimod** est la catégorie des A-bimodules, i.e. M porte une action à gauche et une action à droite de A qui sont compatibles (i.e. $a \cdot (m \cdot a') = (a \cdot m) \cdot a'$ pour tous $a, a' \in A$ et tout $m \in M$). Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $M \otimes_A X$ pour un A-module à gauche X devient un A-module à gauche par l'action à gauche sur M.*

*Ce foncteur est un foncteur monoïdal. Un foncteur du même type peut être défini dans le cas où A est de dimension finie et $\mathcal{C} = A$–**mod**$^{\mathrm{fin}}$ est la catégorie des A-modules de dimension finie.*

Proposition 5.15. *Le foncteur F ci-desssus prend ses valeurs dans la sous-catégorie monoïdale pleine $\mathrm{End}_{\mathrm{re}}(\mathcal{C})$ des endofoncteurs de $\mathcal{C}$ qui sont exacts à droite. De plus, on définit de cette manière une équivalence entre les catégories*

monoïdales A–**bimod** *et* $\mathrm{End}_{\mathrm{re}}(\mathcal{C})$ *dans le cas où* A *est de dimension finie et les* A*-modules et bimodules sont de dimension finie.*

Démonstration. La première affirmation se déduit du fait que le produit tensoriel est exact à droite. Pour la seconde partie, on construit un quasi-inverse F^{-1}. Soit $G \in \mathrm{End}_{\mathrm{re}}(\mathcal{C})$. On définit $F^{-1}(G)$ par la formule $F^{-1}(G) = G(A)$. Il s'agit bien d'un A-bimodule, puisque d'une part $G(A)$ est un A-module à gauche, et d'une autre part, $G(A)$ porte une action compatible de $\mathrm{End}_A(A) = A^{\mathrm{opp}}$, l'algèbre opposée. On vérifie en utilisant Proposition 4.17 que F et F^{-1} sont inverses l'un de l'autre. □

5.6 Strictification et cohérence

Référence: [4], Ch. 2.8, p. 36, et Ch. 2.9, p. 39.

Definition 5.16. *On appelle une catégorie monoïdale* $\mathcal{C}$ *stricte si pour tous objets* X*,* Y*,* Z *in* $\mathcal{C}$*, on a des égalités* $X \otimes (Y \otimes Z) = (X \otimes Y) \otimes Z$ *et* $X \otimes I = X = I \otimes X$ *et si les contrainte d'associativité et d'unitalité sont les identités.*

Exemple 5.17. *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie. La catégorie des endofoncteurs* $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ *est une catégorie monoïdale avec comme produit tensoriel la composition. Il s'agit d'une catégorie monoïdale stricte.*

Par contre, les catégories Vect, A–**mod**, Vect_G etc ne sont pas strictes. Mais on a le Théorème de Mac Lane:

Theorem 5.18 (Théorème de Strictification de Mac Lane)**.** *Toute catégorie monoïdale est monïdalement équivalente à une catégorie monoïdale stricte.*

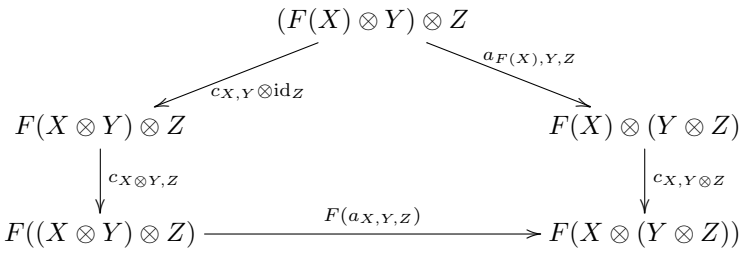
Démonstration. Voir [4] Theorem 2.8.5, p. 36.

On va établir une équivalence entre la catégorie monoïdale donnée $\mathcal{C}$ et la catégorie monoïdale des endofoncteurs de $\mathcal{C}$-modules à droite de $\mathcal{C}$. L'analogue non-catégorique de ce résultat est le fait que tout monoïde M est isomorphe au monoïde des applications de M dans M qui commutent avec la multiplication à droite.

Plus précisément, soit $\widehat{\mathcal{C}}$ la catégorie monoïdale définie comme suit: les objets de $\widehat{\mathcal{C}}$ sont des pairs (F, c) où $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un foncteur et où pour tous objets X, Y de $\mathcal{C}$

$$c_{X,Y} : F(X) \otimes Y \to F(X \otimes Y)$$

est un isomorphisme naturel tel que pour tous objets X, Y et Z de $\mathcal{C}$, le diagramme suivant est commutatif:



Un morphisme $\theta : (F^1, c^1) \to (F^2, c^2)$ dans la catégorie $\widehat{\mathcal{C}}$ est une transformation naturelle $\theta : F^1 \to F^2$ tel que le diagramme suivant commute pour tous X, Y dans $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} F^1(X) \otimes Y & \xrightarrow{c^1_{X,Y}} & F^1(X \otimes Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_X \otimes \mathrm{id}_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{X\otimes Y}} \\ F^2(X) \otimes Y & \xrightarrow{c^2_{X,Y}} & F^2(X \otimes Y) \end{array}$$

La composition dans la catégorie $\widehat{\mathcal{C}}$ est la composition verticale des transformations naturelles. Le produit tensoriel dans la catégorie $\widehat{\mathcal{C}}$ est donné par $(F^1, c^1) \otimes (F^2, c^2) = (F^1F^2, c)$ où c est l'isomorphisme naturel donné par la composée

$$F^1F^2(X) \otimes Y \xrightarrow{c^1_{F^2(X),Y}} F^1(F^2(X) \otimes Y) \xrightarrow{F^1(c^2_{X,Y})} F^1(F^2(X \otimes Y))$$

et le produit tensoriel des morphismes est donné par la composition des transformations naturelles (qui est strictement associative !). L'unité est la foncteur identité. Ainsi, $\widehat{\mathcal{C}}$ est une catégorie monoïdale stricte.

Afin de montrer que $\mathcal{C}$ est équivalente à $\widehat{\mathcal{C}}$, considérons le foncteur $L : \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ donné par la multiplication à gauche

$$L(X) = (X \otimes -, a_{X,-,-}), \quad L(f) = f \otimes -.$$

Notons que le diagramme exigé pour l'élément $F = L(X)$ de $\widehat{\mathcal{C}}$ est le pentagone de la définition de la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$. Dans la suite, on montrera que L est une équivalence monoïdale. Pour cela, notons déjà que tout objet (F, c) de $\widehat{\mathcal{C}}$ est isomorphe à $L(F(I))$ (en utilisant c et la contrainte d'unitalité à gauche).

Montrons que L est pleinement fidèle. Soit $\theta : L(X) \to L(Y)$ un morphisme dans $\widehat{\mathcal{C}}$. Définissons $f : X \to Y$ par la composée

$$X \xrightarrow{r_X^{-1}} X \otimes I \xrightarrow{\theta_I} Y \otimes I \xrightarrow{r_Y} Y,$$

où r est la contrainte d'unitalité à droite. En fait, pour tout Z dans $\mathcal{C}$, on a $\theta_Z = f \otimes \mathrm{id}_Z$. En effet, ceci se déduit de la commutativité du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} X \otimes Z & \xrightarrow{r_X^{-1}\otimes \mathrm{id}_Z} & (X \otimes I) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,I,Z}} & X \otimes (I \otimes Z) & \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes l_Z} & X \otimes Z \\ \downarrow{\scriptstyle f\otimes \mathrm{id}_Z} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_1\otimes \mathrm{id}_Z} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{I\otimes Z}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_Z} \\ Y \otimes Z & \xrightarrow{r_Y^{-1}\otimes \mathrm{id}_Z} & (Y \otimes I) \otimes Z & \xrightarrow{a_{Y,I,Z}} & Y \otimes (I \otimes Z) & \xrightarrow{\mathrm{id}_Y \otimes l_Z} & Y \otimes Z \end{array}$$

Ici, les lignes sont l'identité par l'axiome du triangle, le carré à gauche commute par définition de f, le carré à droite commute par la naturalité de θ et le carré central commute, car θ est un morphisme dans $\widehat{\mathcal{C}}$.

Ainsi donc $\theta_Z = f \otimes \mathrm{id}_Z$, et ceci implique que $\theta = L(f)$ et ainsi le foncteur L est plein. De plus, si l'on a $L(f) = L(g)$ pour deux morphismes f, g dans $\mathcal{C}$, alors $f \otimes \mathrm{id}_I = g \otimes \mathrm{id}_I$, donc $f = g$ par le fait que r est un isomorphisme naturel. Ainsi L est un foncteur fidèle. En tout, L est une équivalence.

Il reste à montrer que l'équivalence est monoïdale. Pour cela, nous définissons φ_0 et φ_2,

$$\varphi_0 : I_{\widehat{\mathcal{C}}} \xrightarrow{\sim} L(I_{\mathcal{C}}), \quad \varphi_2(X,Y) : L(X) \circ L(Y) \xrightarrow{\sim} L(X \otimes Y),$$

par $\varphi_0 = l^{-1} : (\mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \mathrm{id}) \to (I \otimes -, a_{I,-,-})$ et $\varphi_2(X,Y) = a^{-1}_{X,Y,-}$,

$$\varphi_2(X,Y) : ((X \otimes (Y \otimes -), (\mathrm{id}_X \otimes a_{Y,-,-} \circ a_{X,Y\otimes -,-})) \to ((X \otimes Y) \otimes -, a_{X\otimes Y,-,-}).$$

Le $\varphi_2(X,Y)$ est bien un morphisme dans $\widehat{\mathcal{C}}$, puisque le diagramme correspondant se déduit du pentagone dans $\mathcal{C}$. L'hexagone dans la définition d'un foncteur monoïdal se déduit aussi du pentagone dans $\mathcal{C}$. Les deux carrés dans la définition d'un foncteur monoïdal se réduisent à des triangles qui sont deux des trois triangles que l'on avait montrés. □

Dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$, on peut former des produits tensoriels n-fois d'une suite $X_1, \ldots, X_n$ d'objets de $\mathcal{C}$. Á une telle suite, on peut associer différentes manières de parenthéser l'expression $X_1 \otimes \ldots \otimes X_n$. Ces différentes manière de parenthéser forment en général des objets différents de $\mathcal{C}$.

Pour $n = 3$, la contrainte d'associativité donne une manière canonique (naturelle !) d'identifier les deux parenthésages possibles, i.e. des deux objets (en général différents) $X_1 \otimes (X_2 \otimes X_3)$ et $(X_1 \otimes X_2) \otimes X_3$. De là, on peut déduire facilement que deux parenthésages quelconques de $X_1 \otimes \ldots\ldots X_n$ pour $n \geq 3$ sont isomorphes par une chaînes de contraintes d'associativité.

On aimerait utiliser ce fait pour ignorer complètement le parenthésage de produit tensoriels dans des calculs (comme on le fait pour les produits de n éléments dans une algèbre associative). Mais on a alors le problème de savoir comment pour $n \geq 4$ identifier ces deux parenthésages: il se pourrait qu'il y ait plusieurs manières différentes de les identifier et qu'elles donnent des résultats différents. Pour $n = 4$, le pentagone commutatif implique que les deux identifications possibles donnent le même résultat. Mais pour $n > 4$?

C'est ce problème que résout le Théorème de Cohérence de Mac Lane qui est le premier résultat important de la théorie des catégories monoïdales:

Theorem 5.19 (Théorème de Cohérence de Mac Lane)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale et $X_1, \ldots, X_n$ des objets de $\mathcal{C}$. Soit P_1 et P_2 deux parenthésages de $X_1, \ldots, X_n$ (dans cet ordre) avec des insertions arbitraire de l'objet unité I. Soient $f, g : P_1 \to P_2$ deux isomorphismes, obtenus comme compositions des contraintes d'associativité et d'unitalité et de leurs inverses, possiblement tensorisés par des identités. Alors $f = g$.*

Démonstration. On obtient ce théorème en tant que corollaire du Théorème de strictification de Mac Lane. En effet, soit $L : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ une équivalence monoïdale de $\mathcal{C}$ et une catégorie monoïdale stricte $\mathcal{C}'$. Considérons un diagramme dans $\mathcal{C}$

qui représente f et g, et appliquons le foncteur L à ce diagramme. Au-dessus de toute flèche qui représente une contrainte d'associativité, on peut dresser le rectangle (i.e. le premier diagramme de la Definition 5.13), et de même (i.e. dresser un des carrés qui sont les deuxième et troisième diagrammes de la Definition 5.13) pour les contrainte d'unitalité. De cette manière, on obtient un diagramme en forme de prisme dont une des faces consiste de morphismes identité (à savoir les contraintes d'associativité et d'unitalité dans $\mathcal{C}'$) et dont les autres côtés sont commutatifs. Donc le dernier côté (celui avec les identités) est commutatif aussi et cela veut dire $f = g$. □

Ainsi deux manière de parenthéser le produit de n objets dans $\mathcal{C}$ sont pas seulement isomorphes, mais isomorphes par le même isomorphisme naturel, donc on peut les identifier canoniquement. C'est ce que l'on fait habituellement dans des calculs dans une catégorie monoïdale, en ignorant les parenthèses que l'on devrait insérer.

5.7 Le Centre de Drinfeld

Référence: [9], Ch. XIII.4, p. 330 et XIII.5, p. 333, mais aussi Ch. IX.4, p. 213, et Ch. IX.5, p. 220.

Le Centre de Drinfeld est une construction qui associe à chaque catégorie monoïdale stricte $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale tressée $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, appelé le *centre* de $\mathcal{C}$. Cette construction s'étend aux catégories monoïdales non-strictes. Pour la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ des A-modules pour une algèbre de Hopf A de dimension finie avec antipode inversible, le centre $\mathcal{Z}(A\text{–}\mathbf{mod})$ est monoïdalement équivalent à la catégorie $D(A)$–**mod** des modules sur le double de A. Comme nous avons introduit le double uniquement pour l'algèbre de Hopf $\mathbb{K}G$ pour un groupe fini G, nous allons montrer ce théorème uniquement dans ce cadre.

Definition 5.20. *Un objet de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ est une paire $(V, c_{-,V})$ où V est un objet de $\mathcal{C}$ et où $c_{-,V}$ est une famille d'isomorphismes naturels*

$$c_{X,V} : X \otimes V \to V \otimes X$$

pour tout objet X de $\mathcal{C}$ tels que

$$c_{X\otimes Y,V} = (c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,V}). \tag{2}$$

Un morphisme de $(V, c_{-,V})$ vers $(W, c_{-,W})$ est un morphisme $f : V \to W$ dans $\mathcal{C}$ tel que pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on a

$$(f \otimes \mathrm{id}_X)c_{X,V} = c_{X,W}(\mathrm{id}_X \otimes f). \tag{3}$$

Il est facile de voir que $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ est une catégorie. Observons que (comme on l'avait vu dans la démo du Théorème de strictification) la *propriété* d'être dans le centre (pour une $\mathbb{K}$-algèbre par exemple) devient ici *structure* dans la version catégorifiée (à savoir un isomorphisme naturel entre $X \otimes V$ et $V \otimes X$). .

Theorem 5.21. *Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale stricte. Alors le centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ est une catégorie monoïdale tressée stricte où*

(a) l'unité est (I, id),

(b) le produit tensoriel de $(V, c_{-,V})$ vers $(W, c_{-,W})$ est donné par

$$(V, c_{-,V}) \otimes (W, c_{-,W}) = (V \otimes W, c_{-,V\otimes W}),$$

où $c_{-,V\otimes W} : X \otimes V \otimes W \to V \otimes W \otimes X$ est donné par

$$c_{X,V\otimes W} = (\mathrm{id}_V \otimes c_{X,W})(c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_W).$$

(c) le tressage est donné par

$$c_{V,W} : (V, c_{-,V}) \otimes (W, c_{-,W}) \to (W, c_{-,W}) \otimes (V, c_{-,V}).$$

Démonstration. Voir [9] Theorem XIII.4.2, p. 331.

(1) Soient $(V, c_{-,V})$ et $(W, c_{-,W})$ deux objets de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Montrons que la paire $(V \otimes W, c_{-,V\otimes W})$ définie ci-dessus est un objet de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Le fait que $c_{X,V\otimes W}$ est un isomorphisme dans $\mathcal{C}$ pour tout objet X et sa naturalité se déduisent directement des mêmes propriétés pour $c_{-,V}$ et $c_{-,W}$. Il faut montrer la Relation (2) pour $c_{-,V\otimes W}$. Pour tous objets X, Y dans $\mathcal{C}$, on a:

$$\begin{aligned}
c_{X\otimes Y,V\otimes W} &= (\mathrm{id}_V \otimes c_{X\otimes Y,W})(c_{X\otimes Y,V} \otimes \mathrm{id}_W) \\
&= (\mathrm{id}_V \otimes c_{X,W} \otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_{V\otimes X} \otimes c_{Y,W}) \\
&\quad (c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_{Y\otimes W})(\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,V} \otimes \mathrm{id}_W) \\
&= (\mathrm{id}_V \otimes c_{X,W} \otimes \mathrm{id}_Y)(c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_{W\otimes Y}) \\
&\quad (\mathrm{id}_{X\otimes V} \otimes c_{Y,W})(\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,V} \otimes \mathrm{id}_W) \\
&= (c_{X,V\otimes W} \otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,V\otimes W}).
\end{aligned}$$

L'étape non-triviale ici se déduit de la naturalité du produit tensoriel:

$$f \otimes g = (f \otimes \mathrm{id}_{b(g)}) \circ (\mathrm{id}_{s(f)} \otimes g) = (\mathrm{id}_{b(f)} \otimes g) \circ (f \otimes \mathrm{id}_{s(g)}).$$

(2) Soient $f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W})$ et $f' : (V', c_{-,V'}) \to (W, c_{-,W'})$ deux morphismes dans $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Montrons que $f \otimes f'$ est un morphisme dans $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. On veut donc montrer la Relation (3). On a:

$$\begin{aligned}
(f \otimes f' \otimes \mathrm{id}_X)c_{X,V\otimes V'} &= (f \otimes \mathrm{id}_{W'} \otimes \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_V \otimes f' \otimes \mathrm{id}_X) \\
&\quad (\mathrm{id}_V \otimes c_{X,V'})(c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_{V'}) \\
&= (f \otimes \mathrm{id}_{W'} \otimes \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_V \otimes c_{X,W'}) \\
&\quad (\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_X \otimes f')(c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_{V'}) \\
&= (\mathrm{id}_W \otimes c_{X,W'})(f \otimes \mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_{W'}) \\
&\quad (c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_{W'})(\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_V \otimes f') \\
&= (\mathrm{id}_W \otimes c_{X,W'})(c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_{W'}) \\
&\quad (\mathrm{id}_X \otimes f \otimes \mathrm{id}_{W'})(\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_V \otimes f') \\
&= c_{X,W\otimes W'}(\mathrm{id}_X \otimes f \otimes f').
\end{aligned}$$

Ici, on a évidemment utilisé la Relation (3) pour f et f' et de nouveau la naturalité du produit tensoriel.

Il est ainsi clair que le produit tensoriel est bien défini sur objets et morphismes de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Il est fonctoriel et satisfait aux propriétés requises, car le produit tensoriel satisfait à ces propriétés dans $\mathcal{C}$. On en déduit que $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ est une catégorie monoïdale stricte. Dans la suite, nous allons montrer qu'elle est tressée.

(3) Montrons d'abord que le tressage $c_{V,W}$ (proposée dans la partie (c) du Théorème) est bien un morphisme dans $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Pour cela, on vérifie la Relation (3), à savoir

$$(c_{V,W} \otimes \mathrm{id}_X)c_{X,V\otimes W} = c_{X,W\otimes V}(\mathrm{id}_X \otimes c_{V,W})$$

pour tous objets X dans $\mathcal{C}$. On a

$$\begin{aligned}(c_{V,W} \otimes \mathrm{id}_X)c_{X,V\otimes W} &= (c_{V,W} \otimes \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_V \otimes c_{X,W})(c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_W)\\ &= c_{V\otimes X,W}(c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_W)\\ &= (\mathrm{id}_W \otimes c_{X,V})c_{X\otimes V,W}\\ &= (\mathrm{id}_W \otimes c_{X,V})(c_{X,W} \otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_X \otimes c_{V,W})\\ &= c_{X,W\otimes V}(\mathrm{id}_X \otimes c_{V,W}).\end{aligned}$$

On a utilisé la définition du c sur le produit tensoriel (item (b) du Théorème; pour le produit tensoriel en la seconde variable), la propriété définissante de c (pour le produit tensoriel en la première variable) et la naturalité de $c_{-,W}$.

(4) Le tressage $c_{V,W}$ est inversible par définition et il est naturel par rapport aux morphismes dans $\mathcal{C}$, donc aussi par rapport aux morphismes dans $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Il reste à montrer les deux hexagones (dans la version stricte). Mais ces deux hexagones sont la compatibilité de c par rapport à un produit tensoriel en la première et en la seconde variable, et sont donc vrais grâce à la Relation (2) et la Relation dans le (b) du Théorème.

□

Theorem 5.22. *Soit $D(\mathbb{K}G)$ le double de l'algèbre de Hopf $\mathbb{K}G$, l'algèbre de groupe du groupe fini G. Alors les catégories monoïdales tressées $\mathcal{Z}(\mathbb{K}G$–**mod**$)$ et $D(\mathbb{K}G)$–**mod** sont équivalentes comme catégories monoïdales tressées.*

Nous allons démontrer ce théorème en plusieurs étapes. Tout d'abord, intéressons-nous aux $D(\mathbb{K}G)$-modules:

Proposition 5.23. *Un $D(\mathbb{K}G)$-module V est exactement la donnée d'une structure de $\mathbb{K}G$-module sur V, plus une décomposition $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ telles que $h \cdot V_g \subset V_{hgh^{-1}}$ pour tous $g, h \in G$.*

Démonstration. La restriction à $\mathbb{K}G \otimes 1 \subset D(\mathbb{K}G)$ donne une structure de $\mathbb{K}G$-module sur V. La restriction à $1 \otimes \mathbb{K}[G]$ donne une structure de $\mathbb{K}[G]$-module à V. Cette dernière est simplement une G-graduation de V, puisque les générateurs de $\mathbb{K}[G]$ sont envoyés sur une famille d'idempotents orthogonaux de V dont la somme vaut id_V. La compatibilité de ces deux structures se lit dans la dernière équation de l'Exemple 1.22: $x\delta_g x^{-1} = \delta_{xgx^{-1}}$ montre qu'en commutant les structures de $\mathbb{K}G$-module et celle de $\mathbb{K}[G]$-module, le degré g de V_g change en xgx^{-1}. Il est clair que la réciproque est vraie aussi. □

Ensuite, afin de montrer que le théorème ait un sens, il faut définir une structure de catégorie monoïdale tressée sur $D(\mathbb{K}G)$–**mod**. Elle provient en fait d'une R-matrice sur $D(\mathbb{K}G) = \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}G$. Il s'agit de

$$R = \sum_{g \in G} (1 \otimes g) \otimes (\delta_g \otimes 1) = \sum_{i=1}^{n} (1 \otimes e_i) \otimes (e^i \otimes 1),$$

où $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ est une base de $\mathbb{K}G$ avec sa base duale $(e^i)_{i=1,\dots,n}$ de $\mathbb{K}[G]$.

Lemma 5.24. *R est une R-matrice sur $D(\mathbb{K}G)$, i.e. R vérifie*

(a) R est inversible dans $D(\mathbb{K}G) \otimes D(\mathbb{K}G)$,

(b) $(\triangle \otimes \mathrm{id})(R) = R_{13}R_{23}$ et $(\mathrm{id} \otimes \triangle)(R) = R_{13}R_{12}$,

(c) pour tous $f \in \mathbb{K}[G]$ et tous $a \in \mathbb{K}G$: $\triangle^{\mathrm{op}}(f \otimes a)R = R\triangle(f \otimes a)$.

L'algèbre de Hopf $D(\mathbb{K}G)$ devient avec cette R-matrice une *algèbre de Hopf tressée.*

Démonstration. Voir Theorem IX.4.4 in [9], p. 216.

(a) Montrons que R est inversible d'inverse $\overline{R}$ donné par

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} (1 \otimes e_i) \otimes ((e^i \circ S) \otimes 1).$$

Soit $\xi = b \otimes u \otimes c \otimes v \in \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}G$. On évalue $R\overline{R}$ sur ξ en utilisant la dualité $\langle , \rangle$ entre $\mathbb{K}G$ et $\mathbb{K}[G]$:

$$\begin{aligned}
\langle R\overline{R}, \xi \rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle (1 \otimes e_i e_j) \otimes (e^i(e^j \circ S) \otimes 1), b \otimes u \otimes c \otimes v \rangle \\
&= \epsilon(b)v(1) \sum_{(c)} u \left(\sum_{i=1}^{n} e^i(c')(\sum_{j=1}^{n} e^j(S(c''))e_i e_j) \right) \\
&= \epsilon(b)v(1)\epsilon(c)u(1) \\
&= \langle 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1, \xi \rangle.
\end{aligned}$$

Par suite, $R\overline{R} = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1$. De même, on montre que $\overline{R}$ est un inverse à gauche de R.

(b) Ici, il faut montrer $(\triangle \otimes \mathrm{id})(R) = R_{13}R_{23}$ ou encore

$$\sum_{i,(e_i)} 1 \otimes e_i' \otimes 1 \otimes e_i'' \otimes e^i \otimes 1 = \sum_{i,j=1}^{n} 1 \otimes e_i \otimes 1 \otimes e_j \otimes e^i e^j \otimes 1.$$

Pour cela, on évalue le côté gauche sur $\theta = a \otimes t \otimes b \otimes u \otimes c \otimes v$ dans le produit tensoriel $D(G) \otimes D(G) \otimes D(G)$:

$$\begin{aligned} \langle (\triangle \otimes \mathrm{id})(R), \theta \rangle &= \langle \sum_{i,(e_i)} 1 \otimes e_i' \otimes 1 \otimes e_i'' \otimes e^i \otimes 1, \theta \rangle \\ &= \epsilon(a)\epsilon(b)v(1) \sum_{i,(e_i)} e^i(c)t(e_i')u(e_i''). \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\sum_{(a)} a' \otimes a'' = \sum_{i,(e_i)} e^i(a) e_i' \otimes e_i'',$$

ce qui se voit en appliquant le coproduit de $\mathbb{K}G$ à $a = \sum_{i=1}^{n} e^i(a)e_i$. Avec cela, on obtient

$$\sum_{(e_i)} \sum_{i=1}^{n} e^i(c)t(e_i')u(e_i'') = \sum_{(c)} t(c')u(c'').$$

D'où

$$\langle (\triangle \otimes \mathrm{id})(R), \theta \rangle = \sum_{(c)} \epsilon(a)\epsilon(b)v(1)t(c')u(c'').$$

D'un autre côté, on obtient

$$\begin{aligned} \langle R_{13}R_{23}, \theta \rangle &= \epsilon(a)\epsilon(b)v(1) \sum_{i,j=1}^{n} t(e_i)u(e_j)(e^i e^j)(c) \\ &= \epsilon(a)\epsilon(b)v(1) \sum_{(c)} t(\sum_{i=1}^{n} e^i(c')e_i)u(\sum_{j=1}^{n} e^j(c'')e_j) \\ &= \epsilon(a)\epsilon(b)v(1) \sum_{(c)} t(c')u(c'') \\ &= \langle (\triangle \otimes \mathrm{id})(R), \theta \rangle. \end{aligned}$$

De manière similaire, on montre que $\langle (\mathrm{id} \otimes \triangle)(R), \theta \rangle = R_{13}R_{12}$.

(c) Évaluons $\triangle^{\mathrm{op}}(f\otimes a)R$ sur $\xi = b\otimes u\otimes c\otimes v$.

$$\begin{aligned}
\langle \triangle^{\mathrm{op}}(f\otimes a)R, \xi\rangle &= \sum_{(a),(f),i} \langle (f''\otimes a'')(1\otimes e_i)\otimes (f'\otimes a')(e^i\otimes 1), \xi\rangle \\
&= \sum_{(a),(f),i} \langle f''\otimes a''' e_i \otimes f' e^i(S^{-1}(a''')?a')\otimes a'', \xi\rangle \\
&= \sum_{(a),(f),(c),i} f''(b)u(a''' e_i) f'(c') e^i(S^{-1}(a''')c''a')v(a'') \\
&= \sum_{(a),(c),i} f(bc')u(a''' e^i(S^{-1}(a''')c''a')e_i)v(a'') \\
&= \sum_{(a),(c)} f(bc')u(a''' S^{-1}(a''')c''a')v(a'') \\
&= \sum_{(a),(c)} \epsilon(a''') f(bc')u(c''a')v(a'') \\
&= \sum_{(a),(c)} f(bc')u(c''a')v(a'').
\end{aligned}$$

Ici, on a noté $e^i(S^{-1}(a'')?a')$ la forme linéaire qui a x associe $e^i(S^{-1}(a'')xa')$. Notons que cette *conjugaison à droite* dans l'argument correspond bien à la *conjugaison à gauche* de l'indice g dans δ_g que l'on a vu dans le double de Drinfeld. Observons que l'on a bien utilisé que dans le double de Drinfeld, le coproduit sur $\mathbb{K}[G]$ a l'ordre inversé, voir l'Exemple 1.22.

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned}
\langle R\triangle(f\otimes a), \xi\rangle &= \sum_{(a),(f),i} \langle (1\otimes e_i)(f'\otimes a')\otimes (e^i\otimes 1)(f''\otimes a''), \xi\rangle \\
&= \sum_{(a),(f),i,(e_i)} \langle f'(S^{-1}(e_i''')?e_i')\otimes e_i'' a'\otimes e^i f''\otimes a'', \xi\rangle \\
&= \sum_{(a),(c),(f),i,(e_i)} f'(S^{-1}(e_i''')be_i')u(e_i'' a')e^i(c')f''(c'')v(a'') \\
&= \sum_{(a),(c),i,(e_i)} f(c''S^{-1}(e_i''')be_i')u(e_i'' a')e^i(c')v(a'').
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en appliquant $(\triangle\otimes \mathrm{id})\triangle$ à $c = \sum_{i=1}^n e^i(c)e_i$, on obtient

$$\sum_{(c)} c'\otimes c''\otimes c''' = \sum_{(e_i),i=1}^{n} e^i(c)e_i'\otimes e_i''\otimes e_i'''.$$

En utilisant cette équation, on obtient finalement

$$\begin{aligned}\langle R\triangle(f\otimes a),\xi\rangle &= \sum_{(a),(c)} f(c'''S^{-1}(c''')bc')u(c''a')v(a'')\\ &= \sum_{(a),(c)} \epsilon(c''')f(bc')u(c''a')v(a'')\\ &= \sum_{(a),(c)} f(bc')u(c''a')v(a'')\\ &= \langle\triangle^{\mathrm{op}}(f\otimes a)R,\xi\rangle\end{aligned}$$

□

Le tressage sur $D(\mathbb{K}G)$–**mod** est alors obtenu en posant

$$c^R_{V,W}(v\otimes w)=\tau_{V,W}(R(v\otimes w)),$$

où $\tau_{V,W}$ est le flip, i.e. l'échange des deux facteurs dans le produit tensoriel, et V, W sont des $D(\mathbb{K}G)$-modules. Le fait que cette définition donne un tressage est le contenu de la Proposition VIII.3.1 dans [9] p. 178:

Proposition 5.25. *La formule $c^R_{V,W}(v\otimes w)=\tau_{V,W}(R(v\otimes w))$ ci-dessus définit bien un tressage sur la catégorie des $D(G)$-modules.*

Démonstration. Comme dans la Proposition VIII.3.1 dans [9] p. 178, nous allons montrer les deux hexagones au cas où la catégorie monoïdale est stricte, i.e. la contrainte d'associativité est supposée d'être l'identité et les hexagones deviennent donc des triangles.

Tout d'abord, $c^R_{V,W}$ est un isomorphisme, car la R-matrice est inversible dès que l'algèbre de Hopf (ici $D(G)$) admet une antipode inversible, voir l'Équation (2.9) du Theorem VIII.2.4 dans [9], p. 175.

Ensuite, $c^R_{V,W}$ est un morphisme de $D(G)$-modules. En effet, pour tout $x\in D(G)$ et tous $v\in V$, $w\in W$ où V,W sont deux $D(G)$-modules, on a

$$\begin{aligned}c^R_{V,W}(x\cdot(v\otimes w)) &= \tau_{V,W}(R\triangle(x)(v\otimes w))\\ &= \tau_{V,W}(\triangle^{\mathrm{op}}(x)R(v\otimes w))\\ &= \triangle(x)\tau_{V,W}(R(v\otimes w))\\ &= x\cdot\tau_{V,W}(R(v\otimes w))=x\cdot c^R_{V,W}(v\otimes w).\end{aligned}$$

Finalement, montrons le deuxième des deux triangles, i.e.

$$c^R_{U\otimes V,W}=(c^R_{U,W}\otimes\mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_U\otimes c^R_{V,W}),\quad\text{et}\quad c^R_{U,V\otimes W}=(\mathrm{id}_V\otimes c^R_{U,W})(c^R_{U,V}\otimes\mathrm{id}_W),$$

en notant $R=\sum_i s_i\otimes t_i$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_V \otimes c^R_{U,W})(c^R_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W)(u \otimes v \otimes w) &= \sum_{i,j} t_i v \otimes t_j w \otimes s_j s_i u \\ &= \sum_i (t_i)' v \otimes (t_i)'' w \otimes s_i u \\ &= \sum_i \triangle(t_i)(v \otimes w) \otimes s_i u \\ &= c^R_{U,V\otimes W}(u \otimes v \otimes w).\end{aligned}$$

□

Proposition 5.26. *Soit $(V, c_{-,V})$ un objet de $\mathcal{Z}(\mathbb{K}G\text{–}\mathbf{mod})$ pour un groupe fini G. Alors l'application $\rho : V \to V \otimes \mathbb{K}G$ (coaction à droite) définie pour tous $v \in V$ par $\rho(v) = c_{\mathbb{K}G,V}(1 \otimes v)$ donne une structure de $D(\mathbb{K}G)$-module sur V.*

Démonstration. On écrira la coaction à droite ρ comme

$$\rho(v) = \sum_{(v)} v_V \otimes v_G \in V \otimes \mathbb{K}G$$

pour tout $v \in V$. La naturalité de $c_{-,V}$ nous permet d'exprimer un $c_{X,V}$ quelconque en termes de la coaction ρ pour tout $\mathbb{K}G$-module X. En effet, soit $x \in X$ et $\bar{x} : \mathbb{K}G \to X$ l'unique morphisme de $\mathbb{K}G$-modules envoyant 1 sur x (il s'agit donc de la multiplication à droite par x !), alors on a (par naturalité de $c_{-,V}$) le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}G \otimes V & \xrightarrow{c_{\mathbb{K}G,V}} & V \otimes \mathbb{K}G \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{x}\otimes \mathrm{id}_V} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_V \otimes \bar{x}} \\ X \otimes V & \xrightarrow{c_{X,V}} & V \otimes X. \end{array}$$

On a donc que pour tout $v \in V$ et tout $x \in X$

$$c_{X,V}(x \otimes v) = \rho(v)(1 \otimes x) = \sum_{(v)} v_V \otimes v_G x. \tag{4}$$

Montrons que la coaction ρ est coassociative. Par la condition définissante de $c_{-,V}$ (et ce qui précède), on a

$$\begin{aligned} c_{X\otimes Y,V}(x \otimes y \otimes v) &= \sum_{(v)} v_V \otimes (v_G)' x \otimes (v_G)'' y \\ &= (c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,V})(x \otimes y \otimes v) \\ &= \sum_{(v)} (v_V)_V \otimes (v_V)_G x \otimes v_G y. \end{aligned}$$

Pour $X = Y = \mathbb{K}G$ et $x = y = 1$, on obtient

$$\sum_{(v)} v_V \otimes (v_G)' \otimes (v_G)'' = \sum_{(v)} (v_V)_V \otimes (v_V)_G \otimes v_G.$$

Ceci est bien la coassociativité de la coaction ρ.

On a aussi $c_{\mathbb{K},V} = \mathrm{id}_V$, car $\mathbb{K} = I$ est l'unité du produit tensoriel. D'où $c_{\mathbb{K},V}(1 \otimes v) = \sum_{(v)} \epsilon(v_G) v_V = v$ pour tout $v \in V$. Ceci donne que la coaction est counitaire. Ainsi, V devient un $\mathbb{K}G$ comodule (à droite), i.e. un $\mathbb{K}G$-module G-gradué. Notons ici que la structure de $\mathbb{K}G$-comodule sur V est donnée par

$$\rho(v) = \sum_{g \in G} v_g \otimes g,$$

pour $v = \sum_{g \in G} v_g \in \bigoplus_{g \in G} V_g = V$, et la structure de $\mathbb{K}[G]$-module (à gauche) est donnée par

$$\mathbb{K}[G] \otimes V \to V, \quad \delta_g \otimes v \mapsto \delta_g(v) =: v_g,$$

ce qui donne aussi lieu à une G-graduation, puisque les δ_g pour $g \in G$ forment une famille d'idempotents orthogonaux dont la somme vaut id_V.

Il reste à vérifier la compatibilité entre les deux structures. Elle provient du fait que $c_{X,V}$ est $\mathbb{K}G$-linéaire. On a pour tout $a \in \mathbb{K}G$, tout $x \in X$ et tout $v \in V$

$$a \cdot c_{X,V}(x \otimes v) = c_{X,V}(a \cdot (x \otimes v)).$$

On en déduit pour la coaction ρ que

$$\triangle(a)\rho(v)(1 \otimes x) = \left(\sum_{(a)} \rho(a''v)(1 \otimes a') \right) (1 \otimes x).$$

Ceci devient avec $X = \mathbb{K}G$ et $x = 1$

$$\sum_{(a),(v)} a' v_V \otimes a'' v_G = \sum_{(a),(v)} (a''v)_V \otimes (a''v)_G a'.$$

Avec $a = g \in G$ (et donc $\triangle(g) = g \otimes g$ et un seul terme dans la somme sur (a)) et $\sum_{(v)} v_V \otimes v_G = \sum_{h \in G} v_h \otimes h$ pour $v = \sum_{h \in G} v_h$, ceci donne

$$\sum_{h \in G} g \cdot v_h \otimes gh = \sum_{h \in G} (g \cdot v)_h \otimes (g \cdot v) g.$$

Pour une seule composante $v \in V_h$, on trouve alors la compatibilité entre action et coaction exigée dans un $D(\mathbb{K}G)$-module, à savoir que la composante dans laquelle se trouve $g \cdot v$ (pour $v = v_h \in V_h$) est indexée par ghg^{-1}. □

Le point important de ce lemme est que, puisque l'algèbre de Hopf $\mathbb{K}G$ est de dimension finie (i.e. parce que G est fini), la donnée d'un comodule à droite sur $\mathbb{K}G$ est équivalente à la donnée d'un module sur $\mathbb{K}[G] = \mathbb{K}G^*$.

On va exprimer le tressage dans la catégorie $\mathcal{Z}(\mathbb{K}G\text{–}\mathbf{mod})$ par la R-matrice, introduite plus haut:

Lemma 5.27. *Pour un objet $(V, c_{-,V})$ de $\mathcal{Z}(\mathbb{K}G\text{–}\mathbf{mod})$ et X un $\mathbb{K}G$-module, l'isomorphisme $c_{X,V}$ est uniquement déterminé par*

$$c_{X,V}(x \otimes v) = \tau_{X,V}(R(x \otimes v)),$$

pour tout $x \in X$ et tout $v \in V$.

Démonstration. Par l'Équation (4), on a

$$\begin{aligned} c_{X,V}(x \otimes v) &= \sum_{(v)} v_V \otimes v_G x \\ &= \sum_{i,(v)} \langle e^i, v_G \rangle v_V \otimes e_i x \\ &= \sum_i e^i \cdot v \otimes e_i x \\ &= \tau_{X,V}(R(x \otimes v)). \end{aligned}$$

□

Démonstration. [Démonstration du Théorème 7.15]

(1) On définit d'abord un foncteur

$$F : \mathcal{Z}(\mathbb{K}G\text{–}\mathbf{mod}) \to D(\mathbb{K}G)\text{–}\mathbf{mod}.$$

On pose pour cela $F(V, c_{-,V}) = V$ avec sa structure de $D(\mathbb{K}G)$-module établie par la Proposition 5.26. Cette structure est déterminée par

$$g \otimes \delta_h \cdot v = \sum_{k \in G} \delta_h(k) g \cdot v_k$$

pour tous $g, h, k \in G$ et tout $v = \sum_{k \in G} v_k \in V$. Soit $f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W})$ un morphisme dans $\mathcal{Z}(\mathbb{K}G\text{–}\mathbf{mod})$. Alors, par définition, f vérifie

$$(f \otimes \mathrm{id}_X) c_{X,V} = c_{X,W}(\mathrm{id}_X \otimes f).$$

Puisque la structure de comodule $\rho(v)$ est donnée par $c_{\mathbb{K}G,V}(1 \otimes v)$, cette équation montre que f est un morphisme de comodules. Or, f était déjà un morphisme de $\mathbb{K}G$-modules, donc il est un morphisme de $D(\mathbb{K}G)$-modules. Ainsi, F est un foncteur fidèle (puisque l'identité sur les morphismes).

(2) Montrons que F est un foncteur monoïdal strict. Le produit tensoriel de $(V, c_{-,V})$ et $(W, c_{-,W})$ est donné par $(V \otimes W, c_{,V \otimes W})$ avec $c_{\mathbb{K}G,V \otimes W} = (\mathrm{id}_V \otimes c_{\mathbb{K}G,W})(c_{\mathbb{K}G,V} \otimes \mathrm{id}_W)$. Donc la coaction sur $V \otimes W$ est donnée par

$$\rho_{V \otimes W}(v \otimes w) = \sum_{g,h \in G} v_g \otimes w_h \otimes hg$$

(après la première étape, on multiplie *par la droite* par g !). L'action d'une fonction α dans $\mathbb{K}[G]$ sur $v \otimes w$ peut donc s'exprimer par

$$\alpha \cdot (v \otimes w) = \sum_{g,h \in G} \langle \alpha, hg \rangle v_g \otimes w_h.$$

Cette dernière expression n'est rien d'autre que

$$\sum_{g,h \in G} \langle \triangle(\alpha), g \otimes h \rangle v_g \otimes w_h = \triangle(\alpha) \cdot (v \otimes w)$$

par définition du coproduit (attention à l'inversion des facteurs dans l'Exemple 1.22 !) sur $\mathbb{K}[G]$.

On assemble tout cela en l'action de $D(\mathbb{K}G)$ sur $v \otimes w$:

$$(\alpha \otimes a) \cdot (v \otimes w) = \triangle(a)(\triangle(\alpha) \cdot (v \otimes w)) = \triangle(\alpha \otimes a)(v \otimes w).$$

On retrouve alors l'action par le coproduit de $D(\mathbb{K}G)$, et F est donc un foncteur monoïdal strict.

(3) Par le Lemme 5.27, on a

$$F(c_{V,W}(v \otimes w)) = \tau_{V,W}(R(v \otimes w)).$$

Ceci veut dire que le foncteur F est *tressé*, i.e. envoie le tressage de la catégorie de départ sur le tressage dans la catégorie d'arrivée.

(4) Soit maintenant V un $D(\mathbb{K}G)$-module. Pour tout $\mathbb{K}G$-module à gauche X, on définit

$$c_{X,V}(x \otimes v) = \tau_{X,V}(R(x \otimes v)),$$

où $v \in V$ et $x \in X$. Montrons que $(V, c_{-,V})$ est un objet de $\mathcal{Z}(\mathbb{K}G\text{–}\mathbf{mod})$. Il est facile de voir que l'application $c_{X,V}$ est naturelle, et c'est donc une bijection naturelle, puisque R est inversible. Montrons que $c_{X,V}$ est $\mathbb{K}G$-linéaire. Soit $a \in \mathbb{K}G$. On a, en utilisant la relation dans le Lemme 5.24:

$$\begin{aligned} c_{X,V}(a(x \otimes v)) &= \tau_{X,V}(R\triangle(a)(x \otimes v)) \\ &= \tau_{X,V}(\triangle^{\mathrm{op}}(a)R(x \otimes v)) \\ &= \triangle(a)\tau_{X,V}(R(x \otimes v)) \\ &= a \cdot c_{X,V}(x \otimes v). \end{aligned}$$

Il faut aussi vérifier la relation définissante de $c_{-,V}$, i.e.

$$c_{X \otimes Y,V}(x \otimes y \otimes v) = (c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,V})(x \otimes y \otimes v).$$

Le côté gauche est égal à

$$\tau_{X \otimes Y,V}((\triangle \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{K}G})(R)(x \otimes y \otimes v)).$$

Le côté droite est égal à $\tau_{X \otimes Y,V}(R_{13}R_{23}(x \otimes y \otimes v))$. Les deux côtés sont donc égaux grâce au Lemme 5.24. Ainsi $G(V) = (V, c_{-,V})$ est bien un objet de $\mathcal{Z}(\mathbb{K}G\text{–}\mathbf{mod})$.

Pour montrer que G est un foncteur, soit $f : V \to W$ un morphisme de $D(\mathbb{K}G)$-modules. Il faut vérifier que $G(f) = f$ est un morphisme dans $\mathcal{Z}(\mathbb{K}G\text{–}\mathbf{mod})$. D'abord, $G(f) = f$ est bien $\mathbb{K}G$-linéaire, puisque f est $D(\mathbb{K}G)$-linéaire. De plus, on a pour tous $x \in X$ et tous $v \in V$

$$\begin{aligned} ((f \otimes \mathrm{id}_X)c_{X,V})(x \otimes v) &= \tau_{X,W}(\mathrm{id}_X \otimes f)(R(x \otimes v)) \\ &= \tau_{X,W}(R(x \otimes f(v))) \\ &= (c_{X,V}(\mathrm{id}_X \otimes f))(x \otimes v). \end{aligned}$$

(5) On a clairement $FG = \mathrm{id}$. L'égalité $GF = \mathrm{id}$ se déduit du Lemme 5.27. On a donc montré l'équivalence de catégories monoïdales tressées entre $\mathcal{Z}(\mathbb{K}G\text{–}\mathbf{mod})$ et $D(\mathbb{K}G)\text{–}\mathbf{mod}$.

□

Remark 5.28. Les arguments de la démonstration ci-dessus marchent dans le cadre général du double d'une paire d'algèbres de Hopf compatibles, voir [9], Ch. XIII.5, p. 333. De plus, la même démonstration s'applique dans le cadre des modules de dimension finie.

5.8 Catégories monoïdales rigides

Référence: [4], Ch. 2.10, p. 40.

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, i)$ une catégorie monoïdale (où $i : I \otimes I \cong I$ est l'isomorphisme naturel), et soit X un objet de $\mathcal{C}$. Dans ce qui suit, nous allons omettre les contraintes d'unitalité à gauche et à droite l et r.

Definition 5.29. *Un objet X^* de $\mathcal{C}$ est appelé un dual à gauche de X s'il existent des morphismes $\mathrm{ev}_X : X^* \otimes X \to I$ et $\mathrm{coev}_X : I \to X \otimes X^*$, appelés évaluation et coévaluation, tels que les compositions suivantes*

$$X \overset{\mathrm{coev}_X \otimes \mathrm{id}_X}{\longrightarrow} (X \otimes X^*) \otimes X \overset{a_{X,X^*,X}}{\longrightarrow} X \otimes (X^* \otimes X) \overset{\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{ev}_X}{\longrightarrow} X$$

et

$$X^* \overset{\mathrm{id}_{X^*} \otimes \mathrm{coev}_X}{\longrightarrow} X^* \otimes (X \otimes X^*) \overset{a^{-1}_{X^*,X,X^*}}{\longrightarrow} (X^* \otimes X) \otimes X^* \overset{\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_{X^*}}{\longrightarrow} X^*$$

sont les identités de X resp. de X^*.

Definition 5.30. *Un objet ${}^*X$ de $\mathcal{C}$ est appelé un dual à droite de X s'il existent des morphismes $\mathrm{ev}'_X : X \otimes {}^*X \to I$ et $\mathrm{coev}'_X : I \to {}^*X \otimes X$ tels que les compositions suivantes*

$$X \overset{\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{coev}'_X}{\longrightarrow} X \otimes ({}^*X \otimes X) \overset{a^{-1}_{X,{}^*X,X}}{\longrightarrow} (X \otimes {}^*X) \otimes X \overset{\mathrm{ev}'_X \otimes \mathrm{id}_X}{\longrightarrow} X$$

et

$${}^*X \overset{\mathrm{coev}'_X \otimes \mathrm{id}_{{}^*X}}{\longrightarrow} ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*X \overset{a_{{}^*X,X,{}^*X}}{\longrightarrow} {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X) \overset{\mathrm{id}_{{}^*X} \otimes \mathrm{ev}'_X}{\longrightarrow} {}^*X$$

sont les identités de X resp. de ${}^*X$.

Remark 5.31. Si X^* est un dual à gauche de X, alors X est un dual à droite de X^* avec $\mathrm{ev}'_{X^*} = \mathrm{ev}_X$ et $\mathrm{coev}'_{X^*} = \mathrm{coev}_X$, et vice-versa. On a donc ${}^*(X^*) \cong X \cong ({}^*X)^*$ pour tout objet X qui admet des duaux à gauche et à droite. De même, dans toute catégorie monoïdale, on a $I^* = {}^*I = I$ avec morphismes d'évaluation et de coévaluation i et i^{-1} resp. .

Proposition 5.32. *Si un objet X dans une catégorie monoïdale admet un dual à gauche (resp. à droite), alors il est unique à isomorphisme unique près.*

Démonstration. Voir Proposition 2.10.5 dans [4] p. 41. □

Definition 5.33. *Un objet dans une catégorie monoïdale est appelé rigide s'il admets des duaux à gauche et à droite. Une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est appelée rigide si tout objet de $\mathcal{C}$ est rigide.*

6 Catégories tensorielles

Référence: [4], Ch. 4.1, p. 65.

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos (donc infini).

Definition 6.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie $\mathbb{K}$-linéaire, localement finie monoïdale rigide. On appelle $\mathcal{C}$ une catégorie multitensorielle sur $\mathbb{K}$ si le bifoncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est bilinéaire au niveau des morphismes. On dit que $\mathcal{C}$ est indécomposable si $\mathcal{C}$ n'est pas équivalente à une somme directe de catégories multitensorielles non-nulles. Si de plus $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(I) \cong \mathbb{K}$, on appelle $\mathcal{C}$ une catégorie tensorielle.*

Une catégorie multitensorielle qui est finie et semi-simple s'appelle une catégorie de multifusion. Si de plus $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(I) \cong \mathbb{K}$, on appelle $\mathcal{C}$ catégorie de fusion.

Exemple 6.2. *La catégorie des espaces vectoriels de dimension finie,* $\mathrm{Vect}^{\mathrm{fin}}$ *est une categorie de fusion. La catégorie G–***mod**$^{\mathrm{fin}}$ *des G-modules de dimension finie est une catégorie tensorielle. Il en est de même de la catégorie $\mathfrak{g}$–***mod**$^{\mathrm{fin}}$ *des $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie sur une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et de la catégorie* $\mathrm{Vect}_G^{\mathrm{fin},\omega}$ *des espaces vectoriels G-gradués de dimension finie où la contrainte d'associativité est donnée par un 3-cocycle ω. Si G est un groupe fini, alors G–***mod**$^{\mathrm{fin}}$ *est une catégorie de fusion pourvu que $\mathbb{K}$ soit de caractéristique nulle ou premier avec $|G|$ (le Théorème de Maschke assure alors la semi-simplicité).*

7 Représentations de modules croisés de groupes

Nous présentons ici les représentations de modules croisés d'après Bantay [2] en tant que généralisation de représentations du double de Drinfeld $D(G)$. Ces représentations forment bien encore une catégorie monoïdale tressée.

7.1 Modules croisés de groupes

Introduisons tout d'abord les objets algébriques dont on aimerait plus loin étudier les représentations:

Definition 7.1. *Un module croisé de groupes est un homomorphisme de groupes $\mu : H \to G$ avec une action de G sur H par automorphismes tels que pour tous $h, h' \in H$ et tout $g \in G$*

(a) $\mu(g \cdot h) = g\mu(h)g^{-1}$ *(équivariance de μ),*

(b) $\mu(h) \cdot h' = hh'h^{-1}$.

La condition (a) implique que l'image $\mathrm{im}(\mu)$ est un sous-groupe distingué de G, donc que le conoyau $\overline{G} := G/\mathrm{im}(\mu)$ est de nouveau un groupe. On l'appelle parfois $\pi_0(\mu : H \to G)$. La condition (b) implique que le noyau $K := \ker(\mu)$ est central dans H. On l'appelle parfois $\pi_1(\mu : H \to G)$. En fait, l'action de G sur H donne lieu à une action bien définie de $\overline{G}$ sur K (en choisissant une section de $G \to \overline{G}$; l'action de $\overline{G}$ sur K ne dépend pas du choix de la section).

Exemple 7.2. *Le morphisme identité* $\mathrm{id}_G : G \to G$ *est un module croisé de groupes.*

Exemple 7.3. *L'inclusion du sous-groupes distingué* $\mu : H \to G$ *est un module croisé. En fait, tout module croisé* $\mu : H \to G$ *où* μ *est injectif est isomorphe à l'inclusion d'un sous-groupe distingué.*

Exemple 7.4. *Une extension centrale* $\mu : \widehat{G} \to G$ *est un module croisé. En fait, tout module croisé où* μ *est surjectif est isomorphe à une extension centrale.*

Exemple 7.5. *Le morphisme* conj : $G \to \mathrm{Aut(G)}$ *défini par* $g \mapsto (g' \mapsto gg'g^{-1})$ *est un module croisé. Le noyau de* conj *est le centre* $Z(G)$ *de* G *et le conoyau de* conj *est le groupe des automorphismes extérieurs de* G.

Un *morphisme de modules croisés* $(\phi, \psi) : (\mu : H \to G) \to (\mu' : H' \to G')$ est la donnée de deux morphismes de groupes $\phi : H \to H'$ et $\psi : G \to G'$ tels que $\psi \circ \mu = \mu' \circ \phi$ et que pour tous $g \in G$ et $h \in H$, on ait

$$\phi(g \cdot h) = \psi(g) \cdot \phi(h).$$

7.2 Représentations de modules croisés de groupes

Suivant Bantay [1], on associe à un tel module croisé de groupes $\mu : H \to G$ où H et G sont des groupes finis une catégorie de représentations qui s'avère d'être monoïdale tressée. Dans la suite, nous allons étudier des représentations de groupes et de modules croisés sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. L'extension de ces constructions et résultats au cas d'un corps de caractéristique p est certainement un projet très intéressant. L'autre condition qui simplifie beaucoup les choses est que l'on considère uniquement des groupes *finis* G et H.

Definition 7.6. *Une représentation du module croisé* $\mu : H \to G$ *est un triplet* (V, P, Q) *consistant d'un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* V *qui porte une structure de* G*-module via un homomorphisme de groupes* $Q : G \to \mathrm{Gl}(V)$ *et qui porte aussi une* H*-graduation, i.e. il existe une application* $P : H \to \mathrm{End}(V)$ *telle que pour tous* $h, h' \in H$

(i) $P(h)P(h') = \delta_{h,h'}P(h)$ *(idempotents orthogonaux),*

(ii) $\sum_{h \in H} P(h) = \mathrm{id}_V$ *(dont la somme vaut l'identité).*

De plus, les structures de G-module et de H-graduation doivent être compatibles au sens que pour tout $g \in G$ et tout $h \in H$, on ait

$$Q(g)P(h)Q(g)^{-1} = P(g \cdot h).$$

La dimension d'un triplet (V, P, Q) est par définition la dimension de V. Un morphisme $f : (V, P, Q) \to (V', P', Q')$ est une application linéaire $f : V \to V'$ telle que pour tous $g \in G$, $Q'(g) \circ f = f \circ Q(g)$ et que pour tous $h \in H$, $P'(h) \circ f = f \circ P(h)$. On définit ainsi une *catégorie de représentations du module croisé* $\mu : H \to G$, notée $\mathcal{M}(\mu)$. Si l'on considère uniquement les représentations de dimension finie, on écrira $\mathcal{M}(\mu)^{\text{fin}}$.

Notons ici que les représentations du module croisé $\mathrm{id}_G : G \to G$ pour un groupe fini G sont exactement les $D(G)$-modules. De même, notons que les représentations du module croisé $\mu : 1 \to G$ sont simplement les G-modules. Ainsi la théorie des représentations de modules croisés de groupes englobe celle des représentation d'un groupe G et celle du double de Drinfeld de G.

Exemple 7.7. *Le triplet $I = (V, P, Q)$ avec $V = \mathbb{C}$, $P(h) = \delta_{h,1}\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ pour tout $h \in H$ et $Q(g) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ pour tout $g \in G$ est un objet de $\mathcal{M}(\mu)$. Il s'avère d'être l'unité du produit tensoriel.*

Exemple 7.8. *Le triplet $R = (V, P, Q)$ avec $V = \mathbb{C}[G \times H]$, l'espace vectoriel des applications sur $G \times H$ à valeurs complexes, $P(h)\phi : (g, h') \mapsto \delta_{h,g\cdot h'}\phi(g, h')$ et $Q(g)\phi : (g', h) \mapsto \phi(gg', h)$ pour tout $\phi \in V$, tous $h, h' \in H$ et tous $g, g' \in G$. On appelle cet objet la représentation régulière de μ. On a bien $\dim(R) = |H|\,|G|$.*

Exemple 7.9. *Le triplet $0 = (V, P, Q)$ avec $V = \mathbb{C}[K \times \overline{G}]$, $P(h)\phi : (k, \bar{g}) \mapsto \delta_{h,\bar{g}\cdot k}\phi(k, \bar{g})$ et $Q(g)\phi : (v, \bar{g'}) \mapsto \phi(v, g\bar{g'})$ pour tout $\phi \in V$, tout $k \in K = \ker(\mu)$, tout $h \in H$ et tous $\bar{g}, \bar{g'} \in \overline{G} = G/\operatorname{im}(\mu)$. On l'appelle l'objet du vide.*

La notion de la somme directe d'objets (V, P, Q) et (V', P', Q') est simplement

$$(V, P, Q) \oplus (V', P', Q') = (V \oplus V', P \oplus P', Q \oplus Q').$$

Le produit tensoriel d'objets (V_1, P_1, Q_1) et (V_2, P_2, Q_2) dans $\mathcal{M}(\mu)$ est par définition $(V_1 \otimes V_2, P_{12}, Q_{12})$ où $P_{12} : m \mapsto \sum_{h\in H} P_1(h) \otimes P_2(h^{-1}m)$ et $Q_{12} : g \mapsto Q_1(g) \otimes Q_2(g)$.

Proposition 7.10. *La catégorie $\mathcal{M}(\mu)$ est une catégorie monoïdale par rapport au produit tensoriel ci-dessus.*

Démonstration. On vérifie facilement que $(V_1 \otimes V_2, P_{12}, Q_{12})$ est bien de nouveau un objet de $\mathcal{M}(\mu)$. Les contraintes d'associativité et d'unitalité à gauche et à droite sont celles de la catégorie des espaces vectoriels, prolongées sur les application linéaires P et Q. Ainsi il est clair que $\mathcal{M}(\mu)$ est une catégorie monoïdale. □

Remarquons que le morphisme $\mu : H \to G$ n'est pas encore entré en jeu à ce stade. Tout ce qui précède repose uniquement sur les groupes G et H et l'action de G sur H, i.e. sur le produit semi-direct $H \rtimes G$. Le morphisme μ nous fournit en fait un tressage de la catégorie $\mathcal{M}(\mu)$:

Theorem 7.11 (Bantay)**.** *La donnée du morphisme $\mu : H \to G$ induit un tressage de la catégorie $\mathcal{M}(\mu)$ par la formule*

$$R_{12} : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1, \quad v_1 \otimes v_2 \mapsto \sum_{h \in H} Q_2(\mu(h))(v_2) \otimes P_1(h)(v_1).$$

Observons que ce tressage spécialise bien au tressage donné par la R-matrice dans le cas du module croisé $\mathrm{id}_G : G \to G$ où il s'agit de la catégorie des représentations du double de Drinfeld $D(G)$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que R_{12} est bien un morphisme dans $\mathcal{M}(\mu)$. Pour cela, on montre que R_{12} commute avec les matrices P_{12} et Q_{12}:

$$\begin{aligned} R_{12}\, P_{12}(m)(v_1 \otimes v_2) &= R_{12}(\sum_{h \in H} P_1(h)(v_1) \otimes P_2(h^{-1}m)(v_2)) \\ &= \sum_{h,h' \in H} Q_2(\mu(h'))\, P_2(h^{-1}m)(v_2) \otimes P_1(h')\, P_1(h)(v_1) \\ &= \sum_{h \in H} Q_2(\mu(h))\, P_2(h^{-1}m)(v_2) \otimes P_1(h)(v_1) \\ &= \sum_{h \in H} Q_2(\mu(h))\, P_2(h^{-1}mhh^{-1})(v_2) \otimes P_1(h)(v_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{h \in H} Q_2(\mu(h))\, P_2(\mu((h^{-1}) \cdot m)h^{-1})Q_2(\mu(h)^{-1})Q_2(\mu(h))(v_2) \otimes P_1(h)(v_1) \\ &= \sum_{h \in H} P_2(\mu(h) \cdot (\mu((h^{-1}) \cdot m))\mu(h) \cdot h^{-1})Q_2(\mu(h))(v_2) \otimes P_1(h)(v_1) \\ &= \sum_{h \in H} P_2(mh^{-1})Q_2(\mu(h))(v_2) \otimes P_1(h)(v_1) \\ &= \sum_{h,h' \in H} P_2(mh^{-1})Q_2(\mu(h'))(v_2) \otimes P_1(h)P_1(h')(v_1) \\ &= (\sum_{h \in H} P_2(mh^{-1}) \otimes P_1(h))R_{12}(v_1 \otimes v_2) \\ &= (\sum_{k \in H} P_2(k) \otimes P_1(k^{-1}m))R_{12}(v_1 \otimes v_2) \\ &= P_{21}(m)\, R_{12}(v_1 \otimes v_2). \end{aligned}$$

De même, on calcule la commutation avec Q_{12}:

$$\begin{aligned} R_{12}\, Q_{12}(g)(v_1 \otimes v_2) &= R_{12}(Q_1(g)(v_1) \otimes Q_2(g)(v_2)) \\ &= \sum_{h \in H} Q_2(\mu(h))Q_2(g)(v_2) \otimes P_1(h)Q_1(g)(v_1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{h\in H} Q_2(g)Q_2(g)^{-1}Q_2(\mu(h))Q_2(g)(v_2)\otimes Q_1(g)Q_1(g)^{-1}P_1(h)Q_1(g)(v_1)\\
&= \sum_{h\in H} Q_2(g)Q_2(g^{-1}\mu(h)g)(v_2)\otimes Q_1(g)P_1(g^{-1}\cdot h)(v_1)\\
&= \sum_{h\in H} Q_2(g)Q_2(\mu(g^{-1}\cdot h))(v_2)\otimes Q_1(g)P_1(g^{-1}\cdot h)(v_1)\\
&= \sum_{k\in H} Q_2(g)Q_2(\mu(k))(v_2)\otimes Q_1(g)P_1(k)(v_1)\\
&= Q_{21}(g)\, R_{12}(v_1\otimes v_2).
\end{aligned}
$$

La naturalité de R_{12} provient du fait que les morphismes dans $\mathcal{M}(\mu)$ commutent avec toutes les matrices $P(h)$ et $Q(g)$: soient $f: V_1 \to W_1$ et $g: V_2 \to W_2$ deux morphismes dans $\mathcal{M}(\mu)$. On calcule:

$$
\begin{aligned}
R_{12}(f\otimes g)(v_1\otimes v_2) &= \sum_{h\in H} Q_2(\mu(h))(g(v_2))\otimes P_1(h)(f(v_1))\\
&= \sum_{h\in H} g(Q_2(\mu(h))(v_2))\otimes f(P_1(h)(v_1))\\
&= (g\otimes f)(\sum_{h\in H} Q_2(\mu(h)(v_2)\otimes P_1(h)(v_1)\\
&= (g\otimes f)R_{12}(v_1\otimes v_2).
\end{aligned}
$$

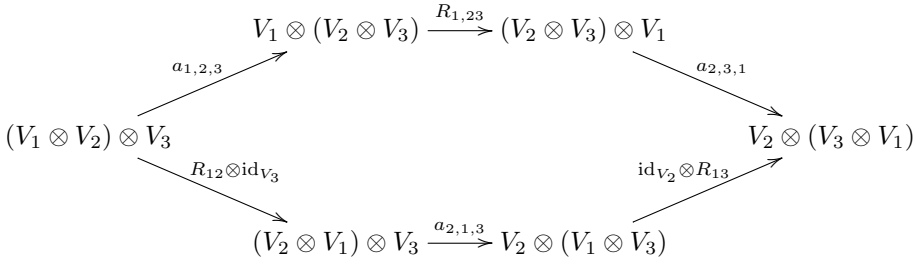
Montrons que R_{12} est un isomorphisme, i.e. que R_{12} est inversible: pour cela, on définit

$$
R_{12}^{-1}: V_2\otimes V_1 \to V_1\otimes V_2, \quad v_2\otimes v_1 \mapsto \sum_{h\in H} P_1(h)(v_1)\otimes Q_2(\mu(h)^{-1})(v_2).
$$

On a bien

$$
\begin{aligned}
R_{12}^{-1}R_{12}(v_1\otimes v_2) &= R_{12}^{-1}(\sum_{h\in H} Q_2(\mu(h))(v_2)\otimes P_1(h)(v_1))\\
&= \sum_{h,h'\in H} P_1(h')P_1(h)(v_1)\otimes Q_2(\mu(h')^{-1})Q_2(\mu(h))(v_2)\\
&= \sum_{h\in H} P_1(h)(v_1)\otimes Q_2(\mu(h)^{-1})Q_2(\mu(h))(v_2)\\
&= \sum_{h\in H} P_1(h)(v_1)\otimes v_2\\
&= v_1\otimes v_2
\end{aligned}
$$

On montre de la même façon que R_{12}^{-1} est un inverse à droite de R_{12}. On a donc montré que R_{12} est un isomorphisme naturel de $\mathcal{M}(\mu)$. Il reste à montrer les deux hexagones, on va se contenter ici du premier:



Par les trois flèches au-dessus, un élément $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ est envoyé sur

$$\sum_{h \in H} Q_{23}(\mu(h))(v_2 \otimes v_3) \otimes P_1(h)(v_1) = \sum_{h \in H} Q_2(\mu(h))(v_2) \otimes Q_3(\mu(h))(v_3) \otimes P_1(h)(v_1).$$

Par les trois flèches en-dessous, l'élément $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ est envoyé sur

$$\sum_{h,h' \in H} Q_2(\mu(h))(v_2) \otimes Q_3(\mu(h'))(v_3) \otimes P_1(h')P_1(h)(v_1).$$

On voit donc que le diagramme est commutatif grâce au fait que $P_1(h')P_1(h) = \delta_{h,h'} P_1(h)$. □

7.3 Objets simples dans la catégorie $\mathcal{M}(\mu)$

Étant donné un objet (V, P, Q) de $\mathcal{M}(\mu)$, on appelle un sous-espace vectoriel $W \subset V$ *invariant* (ou un *sous-module*) si pour tout $g \in G$, tout $h \in H$ et tout $w \in W$, on a $Q(g)(w) \in W$ et $P(h)(w) \in W$. Un objet (V, P, Q) de $\mathcal{M}(\mu)$ est appelé *irréductible* (ou *simple*) s'il ne possède pas de sous-module non-trivial.

Il est intéressant de classifier les modules irréductibles dans la catégorie des $D(G)$-modules (voir e.g. Theorem 3.2.1, p. 61, dans [3]):

Theorem 7.12. *Les objets simples de $D(G)$–***mod** *sont indexés par les paires $(\bar{g}, \pi)$ où $\bar{g}$ est une classe de conjugaison d'un élément g dans G et π est une représentation (irréductible de dimension finie) du centralisateur $Z(g)$. La paire $(\bar{g}, \pi)$ induit un $D(G)$-module en prenant le $D(G)$-module induit par π.*

Démonstration. En effet, soit V un $D(G)$-module de dimension finie et $v \in V$ non-nul. Le sous-module engendré par v est

$$D(G)v = \sum_{g \in G} \mathbb{K}G \ \delta_g v = \sum_{g \in G} \bigoplus_{xgx^{-1} \in \bar{g}} x \ \mathbb{K}Z(g) \ \delta_g v.$$

Ici, $\bar{g}$ est la classe de conjugaison de $g \in G$ et $Z(g)$ est le centralisateur. Il faut comprendre ce calcul comme suit: on fait agir un élément de $\mathbb{K}G$ sur $\delta_g v$. Les éléments du centralisateur $Z(g)$ ne changent pas l'indice de la fonction delta, car ils commutent avec g (Rappelez vous le produit dans $D(G)$!). Les autres éléments (que l'on peut donc prendre parmi les représentants des classes à gauche de $Z(g)$: $\mathbb{K}G$ se décompose en réunion disjointe des $xZ(g)$ où x est un

tel représentant) changent l'indice de la fonction delta, i.e. envoient le résultat dans une autre composante graduée du $\mathbb{K}G$-module G-gradué V. On trie alors sur les vecteurs obtenus suivant les composantes de la G-graduation, et dans chaque composante, on a un $Z(g)$-module $\mathbb{K}Z(g)\delta_g v$. Ceci montre qu'un $D(G)$-module irréductible consiste d'un choix d'une classe de conjugaison $\bar{g}$ pour un $g \in G$ et d'un $Z(g)$-module π que l'on place dans chaque composante gradué, indexée par un représentant x des classes à gauche de $Z(g)$ dans G.

Réciproquement, un tel $Z(g)$-module π donne par induction un $\mathbb{K}G$-module. Ce $\mathbb{K}G$-module est bien la somme directe

$$\bigoplus_{xgx^{-1} \in \bar{g}} x\pi.$$

□

En adaptant la démonstration, on trouve les objets simples dans $\mathcal{M}(\mu)$ pour un module croisé $\mu : H \to G$ arbitraire:

Theorem 7.13. *Les objets simples de $\mathcal{M}(\mu)$ pour un module croisé $\mu : H \to G$ de groupes finis H et G sont indexés par les paires $(\mathcal{O}_h, \pi)$ où $\mathcal{O}_h$ est l'orbite d'un élément $h \in H$ sous l'action de G et π est une représentation (irréductible de dimension finie) du stabilisateur $\mathrm{Stab}_h \subset G$ de h sous l'action de G. La paire $(\mathcal{O}_h, \pi)$ induit une représentation du module croisé en prenant le G-module H-gradué $V = \bigoplus_{h \in \mathcal{O}} V_h$ obtenu en insérant la représentation π dans toutes les composantes graduées $V_h = \pi$ ou (ce qui revient au même) de prendre le G-module induit par π.*

Exemple 7.14. *Le groupe $G = S_3$ admet exactement huit représentations irréductibles dans la catégorie des $D(S_3)$-modules. En effet, d'après le théorème précédent, il suffit de prendre les trois classes de conjugaison dans S_3 et de calculer pour chacune le centralisateur $Z(g)$, prendre les représentations irréductibles du centralisateur et d'induire.*

(a) Pour la classe de conjugaison $\{\mathrm{id}\}$, le centralisateur est S_3 tout entier et les représentations irréductibles du centralisateur sont donc les modules irréductibles de S_3, à savoir la représentation triviale U, la représentation signature $\bar{U}$ et la représentation standard V.

(b) Pour la classe de conjugaison des trois transpositions $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, le centralisateur est $C_i = \{\mathrm{id}, \tau_i\}$ pour $i = 1, 2, 3$. C_i admet deux représentations irréductibles (de dimension 1), et les représentations de S_3 induites par ces deux représentations sont $U \oplus V = \mathbb{C}^3$ et $\bar{U} \oplus V$ (se déduit par une analyse des caractères).

(c) Pour la classe de conjugaison $\{c, c^2\}$ où c est un 3-cycle, on a le centralisateur $C = \{\mathrm{id}, c, c^2\}$, qui a trois représentations irréductibles données par les 3 racines troisièmes de l'unité. Les S_3-modules induits sont $U \oplus \bar{U}$ et V.

Les matrices données par l'application Q sont celles donnant la structure de S_3-module. Il reste à définir des matrices $P(h)$ pour $h \in S_3$ compatibles. Les $D(S_3)$-modules du cas (a) sont simplement donnés par $P(1) = \mathrm{id}$ et nul pour les autres éléments de S_3. Ensuite (cas (c)), il y a encore P à définir pour deux autres représentations standard V de S_3. Là, on peut prendre $P(c) = \mathrm{proj}_1$, la projection sur la première composante, $P(c^2) = \mathrm{proj}_2$ et tous les autres $P(h) = 0$. Pour la deuxième copie de V, on inverse les rôles de c et c^2. Dans le cas (b), il y a deux représentations de dimension 3. Là, on peut encore s'en tirer avec des projections standard, cette fois-ci attribuées aux transpositions. Le cas le plus intéressant est celui de $U \oplus \bar{U}$, car c'est le seul où les matrices P ne sont pas diagonales dans la même base que celles de images de Q. En fait, dans ce cas, on prend

$$P(c) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad P(c^2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Je ne connais pas d'algorithme qui construit ces matrices $P(h)$ pour une représentation de S_n donnée afin de la transformer en $D(S_n)$-module.

Un analogue d'un Théorème de Maschke nous assure que la catégorie $\mathcal{M}(\mu)^{\mathrm{fin}}$ est semi-simple, i.e. que tout objet de $\mathcal{M}(\mu)^{\mathrm{fin}}$ se décompose en somme direct d'objets simples. Rappelons que nos hypothèses sont que le corps de base est $\mathbb{C}$ et que les groupes G et H sont finis.

Theorem 7.15 (Maschke)**.** *Soit (V, P, Q) un objet de $\mathcal{M}(\mu)^{\mathrm{fin}}$ et W un sous-espace invariant de V. Alors W admet un supplémentaire W' invariant, et on a donc $V = W \oplus W'$, somme direct d'objets de $\mathcal{M}(\mu)^{\mathrm{fin}}$.*

Démonstration. On s'inspire de la description des modules simples: un module (V, P, Q) sur le module croisé $\mu : H \to G$ est un espace vectoriel H-gradué

$$V = \bigoplus_{h \in H} V_h = \bigoplus_{i=1}^{l} \bigoplus_{h \in \mathcal{O}_i} V_h,$$

où $\mathcal{O}_i$ est une orbite d'un $h \in H$ sous l'action de G,

$$H = \mathcal{O}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{O}_l,$$

et chaque composante gradué V_h est une représentations du stabilisateur Stab_h de h sous l'action de G.

Soit donc W un μ-sous-module de V, i.e. $W = \bigoplus_{i=1}^{l} \bigoplus_{h \in \mathcal{O}_i} W_h$ où W_h est un Stab_h-sous-module de V_h. Par le Théorème de Maschke ordinaire (où en faisant la somme sur tout $g \in \mathrm{Stab}_h$ pour rendre équivariante la projection $\pi : V_h \to W_h$), on peut supposer que W_h admet un supplémentaire Stab_h-invariant noté W_h' dans V_h. La somme directe $W' := \bigoplus_{i,h} W_h'$ des W_h' est un sous-espace invariant de V en somme directe avec W. □

References

[1] P. Bantay, *Characters of Crossed Modules and Premodular Categories* LMS Lecture Notes Series **372** (2010), `math.QA/0512542`

[2] D. J. Benson, *Representations and Cohomology I: Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras* Cambridge University Press 1991

[3] Bojko Bakalov, Alexander Kirillov Jr. *Lectures on Tensor Categories and Modular Functors*, AMS University Lecture Series **21**, AMS 2001

[4] Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych, Victor Ostrik *Tensor categories* AMS Math. Surveys and Monographs **205**, AMS 2015

[5] Sergei Gelfand, Yuri Manin *Methods of Homological Algebra* Springer Heidelberg Tokyo New York 1996

[6] Alexander Grothendieck *Sur quelques points d'algèbre homologique* Tohoku J. Math. **9** (1957) 119–221

[7] Peter Hilton, Urs Stammbach *A Course in Homological Algebra* Graduate Texts in Mathematics **4**, Second Edition, Springer Heidelberg Tokyo New York 1996

[8] Nathan Jacobson, *Basic Algebra II*, Second Edition, Freeman and Company, New York 1989

[9] Christion Kassel, *Quantum Groups* Graduate Texts in Mathematics **155**, Springer Heidelberg Tokyo New York 1995

[10] Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician* Graduate Texts in Mathematics **5**, second edition, Springer Heidelberg Tokyo New York 1997

[11] Charles Weibel, *An introduction to homological algebra* Cambridge Studies in advanced mathematics **38**, Cambridge University Press 1994