

Résumé de cours S3M100

Topologie et calcul différentiel

(24h de cours, 32 h de TD)

Ce cours fait suite aux unités d'analyse enseignées à Nantes en première année de la licence. Il est destiné aux étudiants des filières mathématiques et mécanique. L'objectif de ce cours est d'étendre les notions fondamentales en mathématiques telles que convergence, continuité aux fonctions de deux ou trois variables réelles, et de les appliquer à l'étude des courbes planes paramétriques.

Pré-requis : Les contenues des deux unités d'analyse (S1M100 : Analyse de base, S2M100 : suites, séries et intégrales) en première année sont des pré-requis indispensables. Il est recommandé aux étudiants de les réviser avant la rentrée ou à tout début de l'année universitaire, en particulier, les parties concernant les propriétés des nombres réels, l'étude de la convergence de suites numériques, la limite et la continuité de fonctions d'une variable réelle et les intégrales.

I. Fonctions de deux variables réelles

Dans ce chapitre, on étudie les propriétés topologiques de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. On introduit les notions de normes, boules ouverte et fermée, et ensembles compacts. L'accent est mis sur le cas $n = 2$. On étudie la limite des suites dans \mathbb{R}^2 et démontre qu'une partie de \mathbb{R}^2 est compactes si et seulement si elle est fermée et bornée. Pour les fonctions de deux variables réelles, on commence par étudier les différentes limites de fonctions : limites directionnelles, limite double et limite successives, avant d'introduire la notion de la continuité. On montre les propriétés de fonctions continues sur un compact qui sont analogues à celles de fonctions d'une variable réelle.

II. Calcul différentiel

Dans ce chapitre, on définit les dérivées partielles et directionnelles d'une fonction de deux variables. On montre que contrairement aux fonctions d'une variable, l'existence de toutes les dérivées partielles d'une fonction à plusieurs variables n'implique pas forcément la continuité de cette fonction. On étudie les développements limités (formule de Taylor) d'ordre un ou deux et les applique à l'étude des extremum locaux. On démontre le théorème de Schwartz qui dit que pour les fonctions de classe C^2 , on peut intervertir l'ordre de dérivations. On démontre aussi les théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.

III. Courbes planes paramétriques

Cette partie consiste à étudier la géométrie des courbes dans \mathbb{R}^2 et des surfaces dans \mathbb{R}^3 . On commence par donner des formules pour les droites tangentes et normales de courbes planes et le plan tangent et la normale d'une surface représentée par $z = f(x, y)$ dans \mathbb{R}^3 . L'accent est mis sur les courbes planes paramétriques : longueur de courbe, paramétrisation normale, abscisse curviligne, courbure. On introduit le repère de Frenet, définit la courbure algébrique et donne les formules de calcul de la courbure dans les coordonnées cartésienne et polaire. On applique ces outils à l'étude locale de courbes planes, en particulier, position locale par rapport à la tangente et au cercle osculateur.

IV. Intégrales multiples

Le calcul des intégrales multiples pour les fonctions de deux ou trois variables est un outil indispensable en sciences. Ce chapitre est ajouté pour donner un minimum en la matière. On introduit les intégrales doubles pour des fonctions continues par subdivision de domaine et donne leur signification géométrique et mécanique. On montre les formules de changements de variables en les précisant en coordonnées spéciales telles les coordonnées polaires en dimension deux et les coordonnées sphériques en dimension trois.

References

- [1] Elie Azoulay, Jean Avignant, Guy Auliac, Mathématiques - Cours et exercices résolus, Vol. 3, Edisciences international, 1997. (Chapitres 1, 3, 4.)
- [2] Raymond Couty, Jacques Ezra, Analyse, Tome 2, M.P. deuxième année. Collection U, Armand Colin.
- [3] G. Debeaumarché, Manuel de mathématiques, Vol. 1. Ellipses.
- [4] Jacques Douchet, Bruno Zwahlen, Calcul différentiel et intégral 2. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles, Presse polytechniques romandes, 1986.