Analyse 3

Gilles Carron, Université de Nantes

6 juillet 2018

Table des matières

Chapitre 1

Les séries : Rappel et compléments

1.1 Rappel de base

1.1.1 Définitions et notations

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels ou complexes, on note pour $p \leq q$:

$$\sum_{n=p}^{q} u_n = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_q$$

et lorsque $p > q$, on convient que

$$\sum_{n=p}^{q} u_n = 0.$$

On associe à cette suite une nouvelle suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n,$$

cette suite est la suite définie par la relation de récurrence :

$$S_n = S_{n-1} + u_n, \;\; et \;\; S_0 = u_0.$$

Symboliquement, cette suite est aussi parfois notée $\sum u_n$, mais on essayera ici d'éviter le recours à cette notation que vous pourrez néanmoins trouver dans certains ouvrages.

On appelle série associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie ; alors S_n est la n^{ieme} somme partielle de cette série et u_n est le terme général de la série. On dira aussi que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série de terme général u_n.

on remarquera alors la formule suivante :si $p \leq q$ alors

$$S_q - S_p = \sum_{n=p+1}^{q} u_n.$$

Lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $s \in \mathbb{C}$ on dira que la série de terme général u_n converge et que s est la somme de cette série ; on notera alors

$$s = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Et également

$$\sum_{k\geq n} u_k = \sum_{n=n}^{+\infty} u_k = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n}^{N} u_k = \lim_{N\to+\infty} S_N - S_{n-1} = s - S_{n-1}$$

Lorsque la série de terme générale u_n ne converge pas, on parlera de série divergente.

1.1.2 Convergence absolue

On commence par le résultat suivant :

Proposition 1.1.1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs. On suppose que à partir d'un certain rang* [1]

$$|u_n| \leq v_n \ ;$$

Si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n converge.

Qui appliqué au cas où $v_n = |u_n|$ implique le corollaire suivant :

Corollaire 1.1.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes tel que la série de terme général $|u_n|$ converge alors la série de terme général u_n converge.*

Définition 1.1.3. *On dit qu'une série de terme général u_n converge absolument si la série de terme général $|u_n|$ converge.*

Le corollaire précédent dit qu'une série qui converge absolument converge.
Démonstration de la proposition 1.1.1 : On vérifie que la suite $(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Pour $p \leq q$, on a par hypothèse :

$$|S_q - S_p| = \left|\sum_{n=p+1}^{q} u_n\right| \leq \sum_{n=p+1}^{q} |u_n| \leq \sum_{n=p+1}^{q} v_n$$

1. C'est à dire : il existe un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq v_n.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque la suite $(\sum_{k=0}^{n} v_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle est de Cauchy, il existe donc un entier n_0 tel que

$$q \geq p \geq n_0 \Rightarrow \left|\sum_{n=0}^{q} u_n - \sum_{n=0}^{p} u_n\right| = \sum_{n=p+1}^{q} v_n < \varepsilon.$$

Ainsi pour $q \geq p \geq n_0$ nous avons :

$$|S_q - S_p| \leq \sum_{n=p+1}^{q} v_n < \varepsilon.$$

La suite $(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy elle converge donc. □

1.1.3 Un critére de Cauchy et des applications

Pour utiliser cette proposition on rappelle la proposition suivante :

Proposition 1.1.4. *Soit $(v_n)_n$ une suite de réels **positifs**. La série de terme général v_n converge si et seulement si la suite de ces sommes partielles est majorée.*

En effet sous les hypothèses de cette proposition, la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n} v_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, elle converge donc si et seulement si elle est majorée. On a donc [2]

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\sum_{k=0}^{n} v_k\right\}.$$

En convenant que le supremum d'une partie non vide non majorée est $+\infty$ et que l'on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = +\infty$$

lorsque la série de terme général v_n diverge.

On a alors la proposition suivante qui est du à Cauchy :

Proposition 1.1.5. *Soit $(v_n)_n$ une suite **décroissante** de réels **positifs** . Alors la série de terme général v_n converge si et seulement la série de terme général*

$$2^n v_{2^n}$$

converge.

2. toujours sous l'hypothése que $v_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Démonstration. La suite croissante $(S_n)_n$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

converge si et seulement si la suite $(S_{2^\ell})_\ell$ est converge. Or on a

$$\begin{aligned} S_{2^\ell} =& v_0 \\ & + v_1 + v_2 \\ & + v_3 + v_4 \\ & + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 \\ & \vdots \\ & v_{2^{\ell-1}+1} + v_{2^{\ell-1}+2} + \ldots + v_{2^\ell} \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} S_{2^\ell} =& v_0 + v_1 \\ & S_2 - S_1 \\ & S_4 - S_2 \\ & S_8 - S_4 \\ & \vdots \\ & S_{2^\ell} - S_{2^{\ell-1}} \end{aligned}$$

ou encore

$$S_{2^\ell} = v_0 + v_1 + \sum_{k=1}^{\ell} (S_{2^k} - S_{2^{k-1}})$$

On a

$$S_{2^k} - S_{2^{k-1}} = v_{2^{k-1}+1} + v_{2^{k-1}+2} + \ldots + v_{2^k} = \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} v_n.$$

Et puisque la suite (v_n) est **décroissante**, on a

$$2^{k-1} + 1 \leq n \leq 2^k \Rightarrow v_{2^k} \leq v_n \leq v_{2^{k-1}+1}$$

Puisqu'il y a 2^{k-1} entiers entre $2^{k-1} + 1$ et 2^k on en déduit :

$$2^{k-1} v_{2^k} \leq S_{2^k} - S_{2^{k-1}} = \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} v_n \leq 2^{k-1} v_{2^{k-1}+1}.$$

On a donc

$$v_0 + v_1 + \sum_{k=1}^{\ell} 2^{k-1} v_{2^k} \leq S_{2^\ell} \leq v_0 + v_1 + \sum_{k=1}^{\ell} 2^{k-1} v_{2^{k-1}+1}$$

Or
$$v_0+v_1+\sum_{k=1}^{\ell}2^{k-1}v_{2^k}=v_0+v_1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\ell}2^k v_{2^k}$$
et puisque la suite (v_n) est décroissante :
$$\begin{aligned}v_0+v_1+\sum_{k=1}^{\ell}2^{k-1}v_{2^{k-1}+1}&=v_0+v_1+v_2+\sum_{k=2}^{\ell}2^{k-1}v_{2^{k-1}+1}\\&\leq v_0+v_1+v_2+\sum_{k=2}^{\ell}2^{k-1}v_{2^{k-1}}\end{aligned}$$
On a donc les estimations :
$$v_0+v_1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\ell}2^k v_{2^k}\leq S_{2^\ell}\leq v_0+v_1+v_2+\sum_{k=2}^{\ell}2^{k-1}v_{2^{k-1}}=v_0+v_1+v_2+\sum_{k=1}^{\ell-1}2^k v_{2^k}$$
qui permettent d'en déduire facilement le résultat.

Si la série de terme général $2^n v_{2^n}$ converge alors la suite
$$\left(v_0+v_1+v_2+\sum_{k=1}^{\ell-1}2^k v_{2^k}\right)_\ell$$
est majorée donc la suite croissante $(S_{2^\ell})_\ell$ est majorée donc convergente.

Vice versa si la suite la suite $(S_{2^\ell})_\ell$ est majorée, alors la suite $\left(\sum_{k=1}^{\ell}2^k v_{2^k}\right)_\ell$ est majorée donc la série de terme général $2^n v_{2^n}$ converge. $\square$

Une application aux séries de Riemann : Soit $p\in\mathbb{R}$, la série de terme général
$$\frac{1}{n^p},\ \ n\geq 1$$
converge si et seulement si
$$p>1\ \ .$$
En effet, on rappelle que le terme général d'une série convergente converge vers 0. Or pour $p\leq 0$ on a
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=\begin{cases}+\infty & \text{si } p<0\\ 1 & \text{si } p=0\end{cases}$$
Donc si $p\leq 0$, la série de terme général $\frac{1}{n^p}, n\geq 1$ diverge.
Supposons donc que $p>0$, alors la suite $\left(v_n=\frac{1}{n^p}\right\}_{n\geq 1}$ est positive décroissante. On peut utiliser le critère de Cauchy (1.1.5) ; or on a
$$2^\ell v_{2^\ell}=\frac{2^\ell}{(2^\ell)^p}=\frac{2^\ell}{2^{\ell p}}=2^{(1-p)\ell}=\left(2^{(1-p)}\right)^\ell$$

La série de terme général $\left(2^{(1-p)}\right)^{\ell}, \ell \geq 0$ converge [3] si et seulement si

$$\left|2^{(1-p)}\right| = 2^{(1-p)} < 1$$

c'est à dire si et seulement si

$$p > 1.$$

1.1.4 Test de convergence

Les critères suivants sont utiles lorsque le terme général se comporte comme une suite géométrique.

Critère de D'Alembert

Proposition 1.1.6. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes non nuls.*

— *Si'l existe un réel $q \in [0, 1[$ tel que à partir d'un certain rang :*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq q$$

alors la série de terme général u_n converge absolument.

— *Suppsons que la suite $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)_n$ soit convergente :*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$$

Si $\ell < 1$ alors la série de terme général u_n converge absolument et si $\ell > 1$, alors la série de terme général u_n diverge.

Critére de Cauchy

Proposition 1.1.7. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes.*

— *Si il existe un réel $q \in [0, 1[$ tel que à partir d'un certain rang :*

$$\sqrt[n]{|u_n|} \leq q$$

alors la série de terme général u_n converge absolument.

— *Suppsons que la suite $\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right)_n$ soit convergente :*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \ell$$

Si $\ell < 1$ alors la série de terme général u_n converge absolument et si $\ell > 1$, alors la série de terme général u_n diverge.

3. On utilise que lorsque $\zeta \in \mathbb{C}$ alors la série de terme général ζ^n converge si et seulement si $|\zeta| < 1$ et dans ce cas elle converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n = \frac{1}{1-\zeta}.$$

Critére de comparaison aux séries de Riemann

Proposition 1.1.8. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes, on suppose que pour un réel $p > 1$ la suite*

$$(n^p\, u_n)_n$$

converge alors la série de terme général u_n converge.

On remarque qu'il suffit en fait que la suite $(n^p\, u_n)_n$ soit bornée pour obtenir la même conclusion. Il est aussi vrai que si pour un réel $p \le 1$ la suite

$$(n^p\, u_n)_n$$

converge vers un nombre complexe **non nul** alors la série de terme général u_n diverge. Par exemple : La série de terme général $u_n = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1,\ n \ge 1$ converge car à l'aide des développements limités on montre que $\lim_{n\to\infty} n^2 u_n = \frac{1}{2}$. On aura aussi pu écrire

$$0 \le u_n = \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \le \frac{1}{n^2}.$$

1.1.5 L'exponentielle complexe

Définition 1.1.9. *Pour $z \in \mathbb{C}$, la série de terme général*

$$\frac{z^n}{n!}$$

converge absolument, on note

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

On emploie pour cela le critère de d'Alembert : pour $z \neq 0$:

$$\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} = \frac{z}{n+1}$$

tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la série de terme général $z^n/n!$ converge absolument. Le cas $z = 0$ est facile !

On définira de de même les fonctions

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

et

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Si $z = x + iy$ on a

$$\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y) \quad \text{et} \quad \sin(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y) \ .$$

1.2 Les séries à termes générales positifs

1.2.1 Comparaison de la la vitesse de convergence

Résultats :

Proposition 1.2.1. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels* ***strictement positifs****, on suppose que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

i) Si les séries de termes généraux u_n et v_n convergent, notons $s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\tilde{s} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, on introduit les restes de séries à savoir les suites définies par

$$R_n = s - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \text{ et } \tilde{R}_n = \tilde{s} - \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{\tilde{R}_n} = 1.$$

ii) Si les séries de termes généraux u_n et v_n divergent, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{\sum_{k=0}^{n} v_k} = 1.$$

Si cette proposition est intéressante, mais elle ne donne pas dans le premier cas une estimation de l'écart entre $\sum_{k=0}^{n} u_k$ et s.

Démonstration. Pour $\varepsilon = 1/2$, il existe un entier n_0 tel que

$$(n \geq n_0) \Rightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| < \frac{1}{2} \ .$$

Pour $n \geq n_0$, on a donc

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) v_n \leq u_n \leq \left(1 + \frac{1}{2}\right) v_n$$

soit
$$\frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n$$
Ce qui permet de conclure que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature à l'aide de la proposition (1.1.1). Plaçons d'abord dans le premier cas : Soit $\varepsilon \in]0,1[$, on sait qu'il existe un entier $n_0(\varepsilon)$ tel que
$$\big(n \geq n_0(\varepsilon)\big) \Rightarrow \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| < \varepsilon/2 \; .$$
Pour $n \geq n_0(\varepsilon)$, on a donc
$$(1-\varepsilon/2)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon/2)v_n.$$
Notons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $\tilde{S}_n = \sum_{k=0}^n v_k$. Soit $N \geq n \geq n_0(\varepsilon)$ alors on a
$$\begin{aligned}(1-\varepsilon/2)(\tilde{S}_N - \tilde{S}_{n-1}) = \sum_{k=n}^{N}(1-\varepsilon/2)v_k &\leq \sum_{k=n}^{N} u_k = S_N - S_{n-1} \\ &\leq \sum_{k=n}^{N}(1+\varepsilon/2)v_k = (1+\varepsilon/2)(\tilde{S}_N - \tilde{S}_{n-1}) \; .\end{aligned}$$
On fait maintenant tendre N vers $+\infty$ dans ces inégalités larges [4] on obtient pour $n \geq n_0(\varepsilon)$
$$(1-\varepsilon/2)\tilde{R}_n \leq R_n \leq (1+\varepsilon/2)\tilde{R}_n,$$
soit pour $n \geq n_0(\varepsilon)$:
$$\left|\frac{R_n}{\tilde{R}_n} - 1\right| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \; .$$
On a bien démontré le résultat voulu.

Plaçons nous maintenant dans le cas où les suites (S_n) et $(\tilde{S}_n)$ convergent vers $+\infty$.

Soit $\varepsilon \in]0,1[$, on sait qu'il existe un entier $n_0(\varepsilon)$ tel que
$$\big(n \geq n_0(\varepsilon)\big) \Rightarrow \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| < \varepsilon/2 \; .$$
Pour $n \geq n_0(\varepsilon)$, on a donc
$$|u_n - v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}v_n.$$

4. Remarquons que par définition :
$$\lim_{N\to+\infty}(\tilde{S}_N - \tilde{S}_{n-1}) = \tilde{R}_n \text{ et } \lim_{N\to+\infty}(S_N - S_{n-1}) = R_n.$$

Pour $n \geq n_0(\varepsilon)$, on a donc :

$$S_n - \tilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n_0(\varepsilon)-1} (u_k - v_k) + \sum_{k=n_0(\varepsilon)}^{n} (u_k - v_k).$$

Posons $M_\varepsilon = \left|\sum_{k=0}^{n_0(\varepsilon)-1}(u_k - v_k)\right|$, on a donc

$$\begin{aligned}
|S_n - \tilde{S}_n| &\leq M_\varepsilon + \sum_{k=n_0(\varepsilon)}^{n} |u_k - v_k| \\
&\leq M_\varepsilon + \sum_{k=n_0(\varepsilon)}^{n} |u_k - v_k| \\
&\leq M_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_0(\varepsilon)}^{n} v_k \\
&\leq M_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\tilde{S}_n \ .
\end{aligned}$$

Où on a utilisé que

$$\sum_{k=n_0(\varepsilon)}^{n} v_k \leq= \sum_{k=0}^{n} v_k \tilde{S}_n$$

On en déduit donc que pour $n \geq n_0(\varepsilon)$, on a

$$\frac{|S_n - \tilde{S}_n|}{\tilde{S}_n} \leq \frac{M_\varepsilon}{\tilde{S}_n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais $\lim_{n\to+\infty} \frac{M_\varepsilon}{\tilde{S}_n} = 0$ car $\lim_{n\to+\infty} \tilde{S}_n = +\infty$. Il y a donc un $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ que l'on peut choisir plus grand que $n_0(\varepsilon)$:$n_1(\varepsilon) \geq n_0(\varepsilon)$ tel que

$$\big(n \geq n_1(\varepsilon)\big) \Rightarrow \frac{M_\varepsilon}{\tilde{S}_n} < \varepsilon/2 \ .$$

Alors pour $n \geq n_1(\varepsilon)$ on a bien

$$\frac{|S_n - \tilde{S}_n|}{\tilde{S}_n} < \varepsilon.$$

□

Applications

Considérons $\alpha > -1$, et les suites $(u_n = n^\alpha)_n$ et $\left(v_n = \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)_n$. On a

$$\frac{v_n}{u_n} = n\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1}$$

et puisque $(1+h)^{\alpha+1} = 1 + (\alpha+1)h + h\epsilon(h)$, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1.$$

Et donc puisque les séries de termes généraux u_n et v_n sont divergentes et que

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} n^{\alpha}}{\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}} = 1\,.$$

On aurait aussi pu démontrer ce résultat à l'aide des sommes de Riemann :

Fixons toujours $\alpha > -1$, alors la fonction f définie sur $]0,1]$ par

$$f(x) = x^{\alpha}$$

est Riemann-Intégrable on a donc

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ce qui signifie que

$$\frac{1}{\alpha+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}\ .$$

Dans la proposition (1.2.1), il est important de vérifier que les séries soient à termes positifs. Par exemple si l'on considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n(\ln(n+1)} \ \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{n}\ .$$

Alors on sait que la série de termes général v_n converge. On sait que la série de terme général $u_n - v_n$ diverge [5] Ainsi

— La série de terme général v_n converge.

5. En effet, puisque $u_n - v_n = \frac{1}{n(\ln(n+1)}$, la suite $(u_n - v_n)_n$ est positive décroissante, et l'on a

$$2^{\ell}\left(u_{2^{\ell}} - v_{2^{\ell}}\right) = \frac{1}{(\ln(2^{\ell}+1)} = \frac{1}{\ell\,.\,\ln\left(2+2^{-\ell}\right)}$$

La comparaison au série de Riemann montre que la série de terme général

$$2^{\ell}\left(u_{2^{\ell}} - v_{2^{\ell}}\right)$$

diverge, le critère de Cauchy (1.1.5) implique qu'il en est de même de la série de terme général $u_n - v_n$.

— La série de terme général v_n diverge.

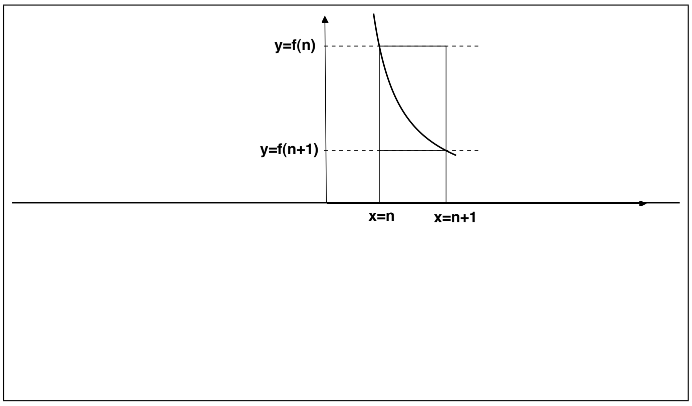
Mais
$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{(-1)^n}{(\ln(n+1)}$$
donc
$$u_n \sim_{n\to+\infty} v_n \ .$$

1.2.2 Comparaison Séries-intégrales

Résultat :

Proposition 1.2.2. *Soit $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction positive décroissante. La série de terme général $f(n)$ est de même nature que l'intégrale généralisée*
$$\int_1^{+\infty} f(t)dt.$$

Démonstration. Soit $n \geq 1$ alors puisque f est décroissante on a pour $t \in [n, n+1]$
$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$$



En intégrant ces inégalités sur $t \in [n, n+1]$, on obtient
$$f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1)dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) = \int_n^{n+1} f(n)dt.$$
En sommant ces inégalités pour $n = 1, \dots \ell$ on obtient :
$$\sum_{n=1}^{\ell} f(n+1) \leq \sum_{n=1}^{\ell} \int_n^{n+1} f(t)dt = \int_1^{\ell+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{\ell} f(n).$$
Ainsi si on pose
$$S_\ell = \sum_{n=1}^{\ell} f(n) \text{ et } I_\ell = \int_1^{\ell} f(t)dt$$

alors on a démontré

$$S_{\ell+1} - f(1) \leq I_{\ell+1} \leq S_\ell.$$

ce qui implique que la suite $(I_\ell)_\ell$ est majorée si et seulement si la suite $(S_\ell)_\ell$ est majorée. Puisque f est une fonction à valeurs positives on en déduit que ces suites sont croissantes et : la suite $(I_\ell)_\ell$ converge si et seulement si la suite $(S_\ell)_\ell$ converge. □

Exemples

La série de terme général $\frac{1}{n\ln(n)}$, $n \geq 2$ diverge mais la série de terme général $\frac{1}{n\ln^2(n)}$, $n \geq 2$ converge. En effet, les fonctions $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ et $g(x) = \frac{1}{x\ln^2(x)}$ sont continues décroissantes sur $[2, +\infty[$ et

$$\int_2^\infty f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{d}{dx}\left(\ln(\ln(x)\right) dx = \lim_{A\to+\infty} \ln\left(\frac{\ln(A)}{\ln(2)}\right) = +\infty.$$

Alors que

$$\int_2^\infty g(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\ln(x)}\right) dx = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(A)} = \frac{1}{\ln(2)}.$$

On aurait aussi pu utiliser le critère de Cauchy (1.1.5) car

$$2^n u_{2^n} = \frac{1}{n\ \ln(2)} \text{ et } 2^n v_{2^n} = \frac{1}{n^2\ \ln^2(2)}$$

1.3 Critére d'Abel et séries alternées

1.3.1 Une formule

On commence par démontrer la formule suivante que l'on peut interpréter comme une formule d'intégration par partie discréte :

Lemme 1.3.1. *Soient $(u_n)_n$ et $(a_n)_n$ deux suites de nombres complexes, on définit*

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

alors

$$\sum_{k=1}^n a_k u_k = A_{n-1}u_n - \sum_{k=1}^n A_{k-1}\left(u_k - u_{k-1}\right).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} A_{k-1}\left(u_k - u_{k-1}\right) &= \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} u_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} u_{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} A_{k-1} u_k + A_{n-1} u_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k u_k - A_0 u_0 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(A_{k-1} - A_k\right) u_k + A_{n-1} u_n - A_0 u_0 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(-a_k\right) u_k + A_{n-1} u_n - a_0 u_0 \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} a_k u_k + A_{n-1} u_n
\end{aligned}$$

□

1.3.2 Critére d'Abel

Théorème 1.3.2. *Soient $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes et $(u_n)_n$ une suite réelle **décroissante positive**. On suppose de plus que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

et que la suite $\left(A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\right)_n$ est bornée alors la série de terme général

$$a_n\, u_n$$

est convergente.

Démonstration. On va démontrer que la suite

$$\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k u_k\right)_n$$

est de Cauchy. Le formule précédente implique que pour $n \geq m$ on a

$$S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k u_k = A_{n-1} u_n - A_{m-1} u_m - \sum_{k=m+1}^{n} A_{k-1}\left(u_k - u_{k-1}\right).$$

Puisque la suite $(A_n)_n$ est bornée il y a un réel $R > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |A_n| \leq R.$$

On en déduit pour $n \geq m$:

$$|S_n - S_m| \leq R(|u_n| + |u_m|) + R \sum_{k=m+1}^{n} |u_k - u_{k-1}| .$$

La suite $(u_n)_n$ est décroissante positive donc pour $n \geq m$ on a

$$|u_n| = u_n \leq u_m$$

et

$$\sum_{k=m+1}^{n} |u_k - u_{k-1}| = \sum_{k=m+1}^{n} u_{k-1} - u_k = u_m - u_n \leq u_m.$$

On a donc démontrer que pour $n \geq m$ alors

$$|S_n - S_m| \leq 3Ru_m$$

Or $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc si $\varepsilon > 0$, il y a un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| = u_n \leq \frac{\varepsilon}{3R+1}.$$

Alors pour $n \geq m \geq n_0$, nous avons :

$$|S_n - S_m| \leq 3Ru_m \leq 3R\frac{\varepsilon}{3R+1} < \varepsilon.$$

Ce qui montre que la suite $(S_n)_n$ est de Cauchy, elle converge donc. □

1.3.3 Critére des séries alternées

Ce critère est un cas particulier du critère d'Abel :

Théorème 1.3.3. *Si $(u_n)_n$ est une suite **décroissante** de réels **positifs** convergent vers 0 :*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

alors la série de terme général

$$(-1)^n u_n$$

est convergente.

En effet avec la suite $(a_n)_n$ définie par

$$a_n = (-1)^n$$

on a

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

est bien une suite bornée.

On sait aussi que dans le cadre des hypothèses du théorème de convergence des séries alternées alors si

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$$

et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

alors pour tout entier n

$$S_{2n+1} \leq s \leq S_{2n}$$

et que

$$|S_n - S| \leq u_{n+1}$$

c'est à dire que l'écart de la somme partielle de la série à sa somme est toujours inférieur au terme suivant.

Un exemple classique d'utilisation du critère d'Abel : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ alors la série de terme général

$$\frac{\sin(n\theta)}{n} \quad , n \geq 1$$

converge.

En effet c est clair si θ est un multiple de π [6]car alors on aura pour tout entier n

$$\sin(n\theta) = 0.$$

Supposons donc $\sin(\theta) \neq 0$. La suite

$$(\frac{1}{n} \quad , n \geq 1$$

est bien une suite décroissante de réels positif qui converge vers 0. posons $a_n = \sin(n\theta)$ et démontrons que la suite

$$\left(A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta) \right)_n$$

6. C'est à dire si $\sin(\theta) = 0$.

est bornée.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta) &= \sum_{k=1}^{n} \mathcal{I}\mathrm{m}\left(e^{ik\theta}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathcal{I}\mathrm{m}\left(e^{ik\theta}\right) \\
&= \mathcal{I}\mathrm{m}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right) \\
&\text{On a une somme d'une suite gomtrique} \\
&= \mathcal{I}\mathrm{m}\left(e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) = \mathcal{I}\mathrm{m}\left(e^{i\theta}\frac{e^{in\theta/2}\left(e^{-in\theta/2}-e^{in\theta/2}\right)}{e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}\right)}\right) \\
&= \mathcal{I}\mathrm{m}\left(e^{i\theta}e^{i(n-1)\theta/2}\frac{2i\sin(n\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)}\right) \\
&= \mathcal{I}\mathrm{m}\left(e^{i(n+1)\theta/2}\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right) \\
&= \sin((n+1)\theta/2)\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}
\end{aligned}$$

Puisque la fonction sinus ne prend que des valeurs dans $[-1, 1]$, on en déduit que

$$|A_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)\right| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}.$$

La suite $\left(A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)\right)_n$ est donc bornée et le critère d'Abel implique donc que la série de terme général :

$$\frac{\sin(n\theta)}{n} \quad , n \geq 1$$

converge.

1.4 Produit de séries

1.4.1 Notations

Si I est un ensemble **fini** d'indices (I est par exemple une sous partie de $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^2$) [7] et $(u_i)_{i\in I}$ une suite de nombres complexes indexées par I [8], on note

$$\sum_{i\in I} u_i$$

7. Si A, B sont des ensembles, on note $A \times B$ l'ensemble des couples formés d'un élément de A et d'un élement de B : $A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}$, la notation A^2 désigne le produit cartésien $A \times A$; ainsi $\mathbb{N}^2$ est l'ensemble des couples d'entiers.

8. C'est à dire une application de I dans $\mathbb{C}$.

la somme des éléments de cette suite (finie). Nous avons deux propriétés (évidentes)

i) Si $I = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I_1} u_i + \sum_{i \in I_2} u_i.$$

ii) Si $I \subset J$ et si $(u_i)_{i \in J}$ une suite de **nombres réels positifs** indexés par J alors

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in J} u_i$$

1.4.2 Une formule

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes alors on a pour tout entier n :

$$\left(\sum_{0 \leq k \leq n} a_k\right)\left(\sum_{0 \leq k \leq n} b_k\right) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k} + \sum_{p=n+1}^{2n}\sum_{k=p-n}^{n} a_k b_{p-k}. \quad (1.4.1)$$

On a en effet

$$\left(\sum_{0 \leq k \leq n} a_k\right)\left(\sum_{0 \leq l \leq n} b_l\right) = \sum_{0 \leq k,l \leq n} a_k b_l = \sum_{(k,l) \in \{0,1,\ldots,n\}^2} a_k b_l.$$

Notons maintenant $I_p(n) = \{(k,l) \in \{0,1,...,n\}^2, k+l = p\}$, puisque

$$0 \leq k, l \leq n \Rightarrow 0 \leq k + l \leq 2n$$

On a

$$\{0,1,...,n\}^2 = \bigcup_{p=0}^{2n} I_p(n)$$

il est de plus évident que les ensembles $I_0(n), I_1(n), ..., I_{2n}(n)$ sont deux à deux disjoints en conséquence on a

$$\left(\sum_{0 \leq k \leq n} a_k\right)\left(\sum_{0 \leq l \leq n} b_l\right) = \sum_{p=0}^{2n}\sum_{(k,l) \in I_p(n)} a_k b_l = \sum_{p=0}^{n}\sum_{(k,l) \in I_p(n)} a_k b_l + \sum_{p=n+1}^{2n}\sum_{(k,l) \in I_p(n)} a_k b_l \quad (1.4.2)$$

Or on a

$$(k,l) \in I_p(n) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} 0 \leq k \leq n \text{ et } 0 \leq l \leq n \\ k + l = p \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} 0 \leq k \leq n \text{ et } 0 \leq l \leq n \\ l = p - k \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} 0 \leq k \leq n \text{ et } 0 \leq l = p - k \leq n \\ l = p - k \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} 0 \leq k \leq n \text{ et } k \leq p \text{ et } p - n \leq k \\ l = p - k \end{array}\right)$$

Or un entier k vérifie

$$0 \leq k \leq n \text{ et } k \leq p \text{ et } p-n \leq k$$

si et seulement si il se trouve dans l'intersection

$$[0,n] \cap [0,p] \cap [p-n,+\infty[$$

Lorsque $\mathbf{p} \leq \mathbf{n}$, on obtient donc

$$\big(0 \leq k \leq n \text{ et } k \leq p \text{ et } p-n \leq k\big) \Leftrightarrow \big(0 \leq k \leq p\big)$$

c'est à dire que pour $p \leq n$ on a $I_p(n) = \{(k,p-k), 0 \leq k \leq p\}$ et

$$\sum_{(k,l)\in I_p(n)} a_k b_l = \sum_{0\leq k\leq p} a_k b_{p-k} \tag{1.4.3}$$

Lorsque $\mathbf{p} \geq \mathbf{n}+\mathbf{1}$, on obtient donc

$$\big(0 \leq k \leq n \text{ et } k \leq p \text{ et } p-n \leq k\big) \Leftrightarrow \big(p-n \leq k \leq n\big)$$

c'est à dire que pour $p \geq n+1$ on a $I_p(n) = \{(k,p-k), p-n \leq k \leq n\}$ et

$$\sum_{(k,l)\in I_p(n)} a_k b_l = \sum_{p-n\leq k\leq n} a_k b_{p-k} \tag{1.4.4}$$

Les identités (1.4.2,1.4.3,1.4.4) mènent alors au résultat voulu.

1.4.3 Produit de Cauchy de séries

Théorème 1.4.1. *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes, on suppose que les séries de termes généraux a_n et b_n sont absolument convergentes :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty,$$

alors la série de terme général $c_n := \sum_{(k,l),k+l=n} a_k b_l = \sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k}$ est absolument convergente et

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

La suite $(c_n)_n$ ainsi définie s'appelle le produit de Cauchy (parfois aussi appelée produit de convolution) des deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Démonstration. Il est facile de démontrer que la série de terme général c_n est absolument convergente, en effet on a

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n} |c_p| &= \sum_{p=0}^{n} \left| \sum_{0\le k\le p} a_k b_{p-k} \right| \\
&\le \sum_{p=0}^{n} \sum_{0\le k\le p} |a_k||b_{p-k}| = \left(\sum_{0\le k\le n} |a_k| \right) \left(\sum_{0\le k\le n} |b_k| \right) - \sum_{p=n+1}^{2n} \sum_{k=p-n}^{n} |a_k||b_{p-k}| \\
&\le \left(\sum_{0\le k\le n} |a_k| \right) \left(\sum_{0\le k\le n} |b_k| \right) \\
&\le \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \right)
\end{aligned}$$

Ainsi la suite croissante $\left(\sum_{p=0}^{n} |c_p|\right)_n$ est majorée, elle est donc convergente.

Afin de montrer que la somme de série de terme général c_n a la valeur annoncée, on va montrer que la suite

$$\left(\left(\sum_{0\le k\le n} a_k \right) \left(\sum_{0\le k\le n} b_k \right) - \sum_{p=0}^{n} c_p \right)_n$$

converge vers zéro. Or la formule donnée ci dessus (1.4.1) montre que

$$\left(\sum_{0\le k\le n} a_k \right) \left(\sum_{0\le k\le n} b_k \right) = \sum_{p=0}^{n} c_p + \sum_{p=n+1}^{2n} \sum_{k=p-n}^{n} a_k b_{p-k}.$$

On doit donc majorée $\left|\sum_{p=n+1}^{2n} \sum_{k=p-n}^{n} a_k b_{p-k}\right|$, grâce à l'inégalité triangulaire, il suffira donc de majorer $\sum_{p=n+1}^{2n} \sum_{k=p-n}^{n} |a_k||b_{p-k}|$ Or cette somme vaut par construction :

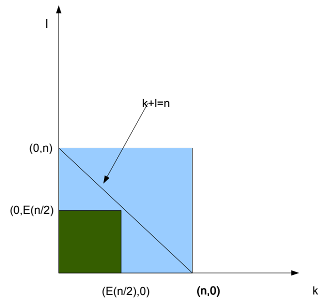
$$\sum_{(k,l)\in\{0,...,n\}^2, k+l\ge n+1}^{n} |a_k||b_l|$$

Or l'ensemble

$$\{(k,l) \in \{0,...,n\}^2, k+l \ge n+1\}$$

est inclus dans l'ensemble

$$\{(k,l) \in \{0,...,n\}^2, k \ge E(n/2) \text{ ou } l \ge E(n/2)\}$$



C'est à dire que si k et $l$sont deux entiers positifs ou nuls dont la somme vaut $n+1$, il y en a forcément un des deux qui est plus grand que la partie entière de $n/2$. Maintenant on a

$$\{0,...,n\}^2 = \{0,...,E(n/2)-1\}^2 \cup \{(k,l) \in \{0,...,n\}^2, k \geq E(n/2) \text{ ou } l \geq E(n/2)\}$$

Les deux parties étant disjointes. Si on note

$$u_n = \sum_{(k,l)\in\{0,...,n\}^2} |a_k||b_l| = \left(\sum_{0\leq k\leq n} |a_k|\right)\left(\sum_{0\leq k\leq n} |b_k|\right)$$

On a donc

$$u_n = u_{E(n/2)-1} + \sum_{(k,l)\in\{0,...,n\}^2, k+l\geq n+1}^{n} |a_k||b_l|$$

Puisque la suite $(u_n)_n$ est convergente, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{(k,l)\in\{0,...,n\}^2, k+l\geq n+1}^{n} |a_k||b_l| = 0$$

Ce qui permet d'en déduire le résultat voulu. □

1.4.4 Un résultat un peu plus général

Il existe un raffinement du résultat de Cauchy due à Mertens :

Théorème 1.4.2. *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes, on suppose que la série de terme général a_n converge et la série de terme b_n est absolument convergente $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$ alors la série de terme général $c_n := \sum_{(k,l),k+l=n} a_k b_l = \sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k}$ est convergente et*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Prenons l'exemple où

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, n \geq 1$$

alors les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes [9]. Mais la série de terme général $c_n = \sum_{1 \leq k \leq n-1} a_k b_{n-k}$ n'est pas convergente. En effet la suite (c_n) ne converge pas vers zéro [10] : car $|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$. Or puisque pour $k \in \{1, ..., n-1\}$ on a la majoration

$$k(n-k) \leq n^2;$$

on en déduit que

$$|c_n| \geq 1,$$

ce qui permet d'en déduire le résultat voulu.

Par ailleurs on a le résultat suivant

Soit r et s deux réels strictement positifs alors la série de terme général

$$c_n = \sum_{1 \leq k \leq n-1} \frac{(-1)^k}{k^r} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^s} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^r (n-k)^s}$$

est convergente si et seulement si $r + s > 1$.

Il est facile de voir que ce résultat pour $r > 1$ ou $s > 1$ [11] et également on peut voir que cette série diverge si $r + s \leq 1$. Les cas restant $r, s \in]0, 1]$ et $r + s > 1$ est beaucoup plus délicat [12].

1.5 Appendice : Séries doubles

1.5.1 Le problème

Soit $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une suite de nombres complexes indexées par $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. On veut savoir si l'on a

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}$$

i.e. si on note

$$s_{m,n} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} a_{k,l} = \sum_{0 \leq k \leq m, 0 \leq l \leq n} a_{k,l}$$

9. grâce au critère de convergence des séries alternées.
10. comme le devrait le terme général d'une série convergente
11. grâce aux résultats de Cauchy et Mertens
12. il faut décomposer c_n en la somme du terme général d'une série absolument convergente et du terme général d'une série alternée

On veut savoir si on a existence des limites $\lim_{n\to\infty} s_{m,n}$ et $\lim_{m\to\infty} s_{m,n}$ et si on peut affirmer que

$$\lim_{m\to\infty} m \lim_{n\to\infty} s_{m,n} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} s_{m,n}?$$

1.5.2 Deux exemples :

On considère la suite $(a_{m,n})_{(m\geq 1, n\geq 1}$ définie par

$$a_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{n^2-m^2} & \text{si } m \neq n, \\ 0 & \text{si } m = n. \end{cases}$$

à m fixé on peut calculer $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$. D'abord cette série converge bien car $\lim_{n\to\infty} n^2 a_{m,n} = 1$, le critère de comparaison aux séries de Riemann nous permet donc d'affirmer que cette série est bien convergente. Ensuite on a pour $n \neq m$:

$$\frac{1}{n^2-m^2} = \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{m-n} + \frac{1}{n+m}\right)$$

Pour $N > m$, on peut calculer la somme partielle

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_{m,n} &= \sum_{n=0}^{m-1} a_{m,n} + \sum_{n=m+1}^{N} a_{m,n} \\ &= \frac{1}{2m}\{\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+n} + \sum_{n=m+1}^{N} \frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+n}\}\end{aligned}$$

On a aussi

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{m-n} = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j}$$

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{m+n} = \sum_{j=m+1}^{2m-1} \frac{1}{j}$$

$$\sum_{n=m+1}^{N} \frac{1}{m-n} = -\sum_{j=1}^{N-m} \frac{1}{j}$$

$$\sum_{n=m+1}^{N} \frac{1}{m+n} = \sum_{j=2m+1}^{N+m} \frac{1}{j}$$

On a donc

$$\sum_{n=m+1}^{N} \frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+n} = -\sum_{j=1}^{2m} \frac{1}{j} + \sum_{j=N-m+1}^{N+m} \frac{1}{j}$$

Et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_{m,n} =& \frac{1}{2m}\{ \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j} + \sum_{j=m+1}^{2m-1} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{2m} \frac{1}{j} + \sum_{j=N-m+1}^{N+m} \frac{1}{j} \} \\ & \frac{1}{2m}\{ -\frac{1}{m} - \frac{1}{2m} + \sum_{j=N-m+1}^{N+m} \frac{1}{j} \} \\ & \frac{1}{2m}\{ -\frac{3}{4m} + \sum_{j=N-m+1}^{N+m} \frac{1}{j} \}\end{aligned}$$

Mais m étant fixé la somme

$$\sum_{j=N-m+1}^{N+m} \frac{1}{j} = \frac{1}{N-m+1} + \frac{1}{N-m+2} + ... + \frac{1}{N+m}$$

est une somme de $2m$ termes qui chacun tendent vers zéro lorsque N tend vers $+\infty$. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = -\frac{3}{4m^2}$$

et par symétrie on trouve de même :

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} = \frac{3}{4n^2}$$

D'où ici on a en fait

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} = -\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

Le second exemple est celui où on considère la suite définie par

$$b_{m,n} = (-1)^m x^{(2m+1)n}, m \geq 0, n \geq 1$$

où $x \in]-1,1[$. On calcule facilement

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^m x^{(2m+1)n} = (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{1-x^{2m+1}}$$

et

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^{(2m+1)n} = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

Donc [13]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^{(2m+1)n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x^6}+\ldots$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^m x^{(2m+1)n} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{1-x^{2m+1}} = \frac{x}{1-x}-\frac{x^3}{1-x^3}+\frac{x^5}{1-x^5}+\ldots$$

1.5.3 Cas des séries doubles à termes positifs

Dans ce cas on a le résultat suivant qui est très commode :

Théorème 1.5.1. *Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de réels* ***positifs ou nuls****, on pose*

$$s_{m,n} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{k,l} = \sum_{0\leq k\leq m, 0\leq l\leq n} a_{k,l}$$

On a alors équivalence entre les trois propriétés suivantes :

i) La suite double $(s_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est majorée, i.e. il existe un réel $M>0$ tel que

$$\forall (m,n)\in\mathbb{N}^2, s_{m,n}\leq M$$

ii) Pour tout m la série de terme général $a_{m,n}, n\in\mathbb{N}$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$,$m\in\mathbb{N}$ est le terme général d'une série convergente.

iii) Pour tout n la série de terme général $a_{m,n}, m\in\mathbb{N}$ converge et $\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}$, $n\in\mathbb{N}$ est le terme général d'une série convergente.

De plus si on note

$$S = \sup\{s_{m,n}, (m,n)\in\mathbb{N}^2\}$$

alors on a

$$S = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{m,n} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} s_{m,n}$$

soit encore

$$S = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}.$$

Démonstration. On montre uniquement l'équivalence entre i) et ii) et on invite le lecteur à adapter les arguments pour démontrer que $i)\Leftrightarrow iii)$.

On suppose donc que $i)$ est vérifié et notons $S=\sup\{s_{m,n},(m,n)\in\mathbb{N}^2\}$. À m fixé, on a

$$\sum_{l=0}^{n} a_{m,l}\leq s_{m,n}\leq S$$

13. Il est facile de vérifier que les deux séries ci-dessous sont convergentes.

Donc la série de terme général $a_{m,n}, n \in \mathbb{N}$ converge car la suite de ses sommes partielles est majorée. De plus On a alors

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{k,l} = \lim_{n\to\infty} s_{m,n}$$

Par passage à la limite dans les inégalités larges on en conclut que

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l} = \lim_{n\to\infty} s_{m,n} \leq S.$$

Ainsi la série à terme général $\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{m,l}\right)_m$ est convergente puisque la suite de ses sommes partielles est majorée de plus par passage à la limite on a

$$\sum_{k=0} \infty \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{m,n} \leq S.$$

Il nous reste maintenant à démontrer l'inégalité

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{m,n} \geq S.$$

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}$ et puisque la suite $(s_{m,l})_{l\in\mathbb{N}}$ est croissante on a

$$s_{m,n} \leq \lim_{l\to\infty} s_{m,l}$$

De la même façon, la suite $(\lim_{l\to\infty} s_{k,l})_k$ est croissante donc

$$\lim_{l\to\infty} s_{m,l} \leq \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty} s_{k,l}$$

on a donc démontré que pour tout couple d'entier (m, n) : $s_{m,n} \leq \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty} s_{k,l}$
D'où

$$S = \sup\{s_{m,n}, (m, n) \in \mathbb{N}^2\} \leq \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty} s_{k,l}.$$

□

1.5.4 Séries doubles absolument convergentes

Le critère précédent nous permet d'en déduire le résultat suivant :

Théorème 1.5.2. *Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de nombres complexes, on suppose que la suite double $\sigma_{m,n} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} |a_{k,l}|$ est majorée, alors*

i) Pour tout m la série de terme général $a_{m,n}, n \in \mathbb{N}$ converge absolument et $u_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$ est le terme général d'une série absolument convergente.

ii) Pour tout n la série de terme général $a_{m,n}, m \in \mathbb{N}$ converge absolument et $v_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}$ est le terme général d'une série absolument convergente.

De plus on a alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{m=0}^{\infty} u_m = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}.$$

On dit dans ce cas que la série double de terme général $a_{m,n}$ est absolument convergente.

Démonstration. Soit donc $M > 0$ tel que pour tout m, n

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} |a_{k,l}| \leq M.$$

Alors pour m fixé on a

$$\sum_{l=0}^{n} |a_{m,l}| \leq \sigma_{m,n} \leq M$$

La série de terme général $a_{m,n}, n \in \mathbb{N}$ est donc absolument convergente et

$$\sum_{k=0}^{m}\left|\sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l}\right| = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\left|\sum_{l=0}^{n} a_{k,l}\right| \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0} m \sum_{l=0}^{n} |a_{k,l}| = \lim_{n\to\infty}\sigma_{m,n} \leq M$$

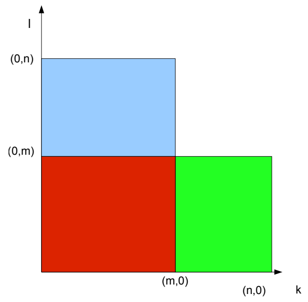
Ainsi la série de terme général $u_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$ est absolument convergente. Le ii) se démontre de la même façon. Pour conclure la preuve du théorème on va estimer la différence $s_{m,n} - s_{n,m}$ lorsque $n \geq m+1$ où on a noté comme précédemment $s_{m,n} = \sum_{k=0} m \sum_{l=0}^{n} a_{k,l}$ On remarque que dans ce cas là

$$\begin{aligned} s_{m,n} - s_{n,m} &= \sum_{0\leq k\leq m, 0\leq l\leq n} a_{k,l} - \sum_{0\leq k\leq n, 0\leq l\leq m} a_{k,l} \\ &= \sum_{(k,l)\in\{0,...,m\}\times\{0,...,n\}} a_{k,l} - \sum_{(k,l)\in\{0,...,n\}\times\{0,...,m\}} a_{k,l} \end{aligned}$$

Mais puisque $n \geq m+1$ on a

$$\{0,...,m\}\times\{0,...,n\} = \{0,...,m\}\times\{0,...,m\} \cup \{0,...,m\}\times\{m+1,...,n\}$$

$$\{0,...,n\}\times\{0,...,m\} = \{0,...,m\}\times\{0,...,m\} \cup \{m+1,...,n\}\times\{0,...,m\}$$



On a donc

$$\sum_{(k,l)\in\{0,\dots,m\}\times\{0,\dots,n\}} a_{k,l} = \sum_{(k,l)\in\{0,\dots,m\}\times\{0,\dots,m\}} a_{k,l} + \sum_{(k,l)\in\{0,\dots,m\}\times\{m+1,\dots,n\}} a_{k,l}$$

et

$$\sum_{(k,l)\in\{0,\dots,n\}\times\{0,\dots,m\}} a_{k,l} = \sum_{(k,l)\in\{0,\dots,m\}\times\{0,\dots,m\}} a_{k,l} + \sum_{(k,l)\in\{m+1,\dots,n\}\times\{0,\dots,m\}} a_{k,l}$$

D'où

$$\begin{aligned} s_{m,n} - s_{n,m} &= \sum_{(k,l)\in\{0,\dots,m\}\times\{m+1,\dots,n\}} a_{k,l} - \sum_{(k,l)\in\{m+1,\dots,n\}\times\{0,\dots,m\}} a_{k,l} \\ &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=m+1}^{n} a_{k,l} - \sum_{k=m+1}^{n}\sum_{l=0}^{m} a_{k,l} \end{aligned}$$

D'où en utilisant l'inégalité triangulaire et en passant à la limite $n \to \infty$ dans les inégalités larges :

$$\lim_{n\to\infty} |s_{m,n} - s_{n,m}| \leq \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=m+1}^{\infty} |a_{k,l}| + \sum_{k=m+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{m} |a_{k,l}|$$

Or

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=m+1}^{\infty} |a_{k,l}| = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{\infty} |a_{k,l}| - \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} |a_{k,l}|$$

et

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{m} |a_{k,l}| = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m} |a_{k,l}| - \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} |a_{k,l}|$$

Posons

$$S = \sup\{\sigma_{m,n}, (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$$

On en déduit

$$\lim_{n\to\infty} |s_{m,n}-s_{n,m}| \leq \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{\infty} |a_{k,l}|-\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} |a_{k,l}|+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m} |a_{k,l}|-\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} |a_{k,l}| \leq 2S-2\sigma_{m,m}$$

Pour conclure que

$$\lim_{m\to\infty} m \lim_{n\to\infty} s_{m,n} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{m,n}$$

ou encore que

$$\lim_{m\to\infty} m \lim_{n\to\infty} |s_{m,n} - s_{n,m}| = 0,$$

il nous suffit désormais de montrer que

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_{m,m} = S$$

Or par définition de S on a toujours $\sigma_{m,m} \leq S$, de plus si $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ et que $k = \max\{m,n\}$ on a toujours

$$\sigma_{m,n} \leq \sigma_{k,k} \leq \lim_{l\to\infty} \sigma_{l,l}$$

car la suite $(\sigma_{l,l})_l$ est croissante. □

1.5.5 Retour sur nos deux exemples

Dans le premier exemple la suite $\sigma_{m,n} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} |a_{k,l}|$ n'est pas majorée en effet

$$\begin{aligned}
\sigma_{n,n} &= \sum_{1\leq k,l\leq n, k\neq l} \left|\frac{1}{k^2-l^2}\right| \\
&\geq \sum_{1\leq k,l\leq n, k=l+1} \left|\frac{1}{k^2-l^2}\right| = \sum_{1\leq l\leq n-1} \frac{1}{(l+1)^2-l^2} = \sum_{1\leq l\leq n-1} \frac{1}{2l+1} \\
&\geq \sum_{1\leq l\leq n-1} \int_l^{l+1} \frac{1}{2x+1}dx = \int_1^n \frac{1}{2x+1}dx \\
&\geq \frac{1}{2}\ln\frac{2n+1}{3}.
\end{aligned}$$

Dans le second exemple, on étudie la série double de terme général

$$c_{m,n} = |b_{m,n}| = |x|^{(2m+1)n}$$

Puisque $|x|^{2m+1} < 1$, à m fixé, la série de terme général $c_{m,n}, n \geq 1$ est convergente et sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x|^{(2m+1)n} = \frac{|x|^{2m+1}}{1 - |x|^{2m+1}}$$

Puisque $|x| < 1$, le critère de Cauchy implique que la série de terme général $\frac{|x|^{2m+1}}{1-|x|^{2m+1}}$, $m \in \mathbb{N}$ converge. Le théorème (1.5.1) permet d'affirmer que la série double de terme général $b_{m,n}$ converge absolument que donc on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{1 - x^{2m+1}}$$

ou encore

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x^3}{1+x^6} + ... = \frac{x}{1-x} - \frac{x^3}{1-x^3} + \frac{x^5}{1-x^5} + ...$$

Chapitre 2

Exercices sur les Séries numériques

Exercice 1. *Donner la nature (convergente ou non convergente) des séries de terme général :*

a) $u_n = \frac{n^3}{3^n}$, $n \geq 0$,

b) $v_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\ln(n+2)}\right)$, $n \geq 0$,

c) $w_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$.

d) $\dfrac{(-1)^n}{n - \sqrt{n} \ + 1}$

e) $\dfrac{n^3 + 2^n}{n^2 + 3^n}$

f) $\dfrac{n^2 + 1}{(n^3 + 2)(\sqrt{n} + 2)}$

g) $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right), n \geq 1$

h) $\dfrac{n}{2^n}$

i) $\dfrac{2^n}{n!}$,

j) $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

k) $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $n \geq 1$

l) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}$,

m) $\dfrac{1}{\sqrt{n^3 + n}}$, $n \geq 1$

n) $\dfrac{\cosh(\alpha n)}{2^n}$, $\alpha > 0$.

o) $\left(\dfrac{3n}{4n+1}\right)^n$,

p) $e^{-\frac{n^2}{n+1}}$

q) $e^{-\sqrt{n}}$,

r) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$.

s) $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$, $n \geq 2$.

t) $\dfrac{1}{(\ln n)^{\sqrt{n}}}$, $n \geq 1$.

u) $\dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, $n \geq 2 \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}^*$.

v) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}}$

w) $\dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^{n-1} \ln n}$

Exercice 2. *Déterminer pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}_+$ la série de terme général*

$$\frac{a^n}{1 + a^{2n}}$$

est convergente.

Exercice 3. *a) La série de terme général*

$$\frac{e^{in\sqrt{2}}}{n}, n \geq 1$$

est-elle
- *absolument convergente ?*
- *convergente ?*

b) On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n e^{in\sqrt{2}}},\ n \geq 1$$

— *Démontrer que l'on a* [1]

$$\lim_{n\to+\infty} n^{5/4}\left(u_n - \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{e^{in\sqrt{2}}}{n}\right)\right) = 0.$$

— *En déduire que la série de terme général u_n est convergente.*

Exercice 4. *On considère une fonction $f : [0,+\infty[\to]0,+\infty[$ décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ telle que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = 0$$

a) Démontrer qu'alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_n^{n+1} f(x)dx}{f(n)} = 1.$$

b) Montrer que si l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge alors

$$\int_n^{\infty} f(x)dx \sim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} f(k).$$

c) Que se passe-t-il lorsque $f(x) = e^{-x}$?

Exercice 5. *On considère une fonction $f : [0,+\infty[\to]0,+\infty[$ continue et décroissante et on suppose que*

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx < +\infty\ .$$

a) Démontrer que

$$\lim_{h\to 0+} h\sum_{n=0}^{+\infty} f(hn) = \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

b) En déduire que [2]

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-tn^2} \sim_{t\to 0+} \sqrt{\frac{\pi}{4t}}$$

1. On pourra écrire

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1-(-1)^n \frac{e^{in\sqrt{2}}}{\sqrt{n}}}$$

et se servir de la majoration

$$\left|\frac{1}{1-h} - (1+h)\right| = \left|\frac{h^2}{1-h}\right| \le \frac{|h|^2}{1-|h|}$$

valable pour $h \in \mathbb{C}$ vérifiant $|h| < 1$.

2. On admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$.

c) En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \sim_{x\to 1-} \sqrt{\frac{\pi}{4(1-x)}}.$$

Exercice 6. *Énoncer la formule de Taylor-Lagrange.*

Exercice 7. *On considère la fonction* $f(x) = \ln(\cos(x))$ *définie sur* $]-\pi/4, \pi/4[$. *On utilisera que pour* $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ *alors on a* $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

a) Calculer les quatre premières dérivées de f ‡ savoir f', f'', f''' *et* $f^{(4)} = (f''')'$.

b) Montrer que l'on a

$$|x| < \pi/4 \Rightarrow -16 < f^{(4)}(x) \leq -2.$$

c) Gr,ce ‡ la formule de Taylor-Lagrange en déduire que pour $|x| < \pi/4$ *on a*

$$-\frac{x^2}{2} - \frac{2x^4}{3} \leq \ln(\cos(x)) \leq -\frac{x^2}{2}.$$

On pose alors

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{\sqrt{k}}{n}\right)\right) \text{ et } v_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2} \text{ et } w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^4}$$

d) Démontrer que[3]

$$\lim_{n\to\infty} v_n = -\frac{1}{4} \text{ et que } \lim_{n\to\infty} n w_n = \frac{1}{3}.$$

e) En déduire qu'il existe une constante C tel que pour $n \in \mathbb{N}^*$ $w_n \leq C/n$.

f) Montrer que $|u_n - v_n| \leq \frac{2}{3} w_n$ *et en déduire que*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -\frac{1}{4}.$$

Exercice 8. *On considère la fonction f définie sur* $]0, +\infty[$ *par* $f(x) = \sqrt{x}$

a) Pourquoi a-t-on

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1?$$

b) Calculer $f'(x)$ *et* $f''(x)$.

c) À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *on a*

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n\sqrt{n}} \leq f(n+1) - f(n) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8(n+1)\sqrt{n+1}}$$

3. On reconnaÓtra des sommes de Riemann.

d) En déduire que la série de terme général

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right),\ n \geq 1$$

est convergente.

e) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$$

est convergente.

Exercice 9. *On étudie la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin(u_n)$, $u_0 \in]0, \pi[$.*

a) Démontrer que cette suite converge vers 0 [4].

b) Démontrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)} = \frac{1}{3}.$$

c) En déduire que

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3}$$

d) En déduire que

$$u_n \sim_{n\to +\infty} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Exercice 10. Calcul de quelques décimales de $\sqrt{2}$ par une méthode due ‡ L. Euler (mathématicien suisse 1707-1783)

On étudie la série de terme général :

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{n!} \left(\frac{1}{100}\right)^n,$$

ainsi $u_0 = 1$, $u_1 = 1/100$ et $u_2 = \frac{1\times 3}{2!}\left(\frac{1}{100}\right)^2 = \frac{3}{20000}$. On a donc

$$u_n = \frac{2n-1}{100n} u_{n-1} \text{ et } u_0 = 1.$$

On note également $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle de cette série.

a) Montrer, ‡ l'aide du critère de d'Alembert que cette série converge.

On considère la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

4. On pourra démontrer qu'elle est positive et décroissante.

b) Démontrer que la dérivée n^{ieme} de f est

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}.\frac{5}{2}\dots\frac{2n-1}{2}(1-x)^{-n-1/2} \\ &= 2^{-n}\prod_{j=0}^{n-1}(2j+1)(1-x)^{-n-1/2} \\ &= \frac{(2n)!}{4^n\; n!}(1-x)^{-n-1/2} \end{aligned}$$

c) Avec la formule de Taylor-Lagrange en déduire que si $x \in [0,1[$ alors

$$\left| f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{4^j\;(j!)^2} x^j \right| \leq \frac{(2n+1))!}{4^{n+1}\;((n+1)!)^2}(1-x)^{-n-3/2}x^{n+1}$$

d) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \frac{5}{7}\sqrt{2}\,.$$

e) Quelle erreur obtient-on en estimant $\sqrt{2}$ par $\frac{7}{5}\,S_5$?

Exercice 11. Calcul de quelques décimales de π

a) Montrer que si $x \in [0,1]$ alors la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge.
On notera

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

la somme partielle de cette série.

b) Démontrer que si $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\left| \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} \right| \leq x^{2n+2}.$$

c) En déduire que si $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\left| \arctan(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

d) En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan(x),$$

Cette formule est due au mathématicien anglais Gregory.

e) Pourquoi a-t-on

$$|S_n(x) - \arctan(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \text{ ?}$$

f) Quelle erreur obtient-on en estimant π par $4S_{10}(1)$.

g) Quelle valeur de n faut-il choisir pour que $|4S_n(1) - \pi| \leq 10^{-5}$?

h) Montrer que

$$\frac{(5+i)^4}{239+i} = 2 + 2i.$$

i) Pourquoi l'argument de $(5+i)$ vaut il $\arctan(1/5)$ et pourquoi l'argument de $(239+i)$ vaut il $\arctan(1/239)$. En déduire que

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Cette formule est connu sous le nom de formule de Machin (du nom du Mathématicien anglais John Machin (1680-1751)).

j) A partir de la formule de Machin, quelle erreur fait on en estimant $\pi/4$ par $4S_2(1/5) - S_0(1/239)$.

Appendice : *Il existe de nombreuses formules pour calculer des décimales de π, par exemple il y a une formule de C.F. Gauss (mathématicien allemand 1777-1855) :*

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\left(\frac{1}{18}\right) + 8\arctan\left(\frac{1}{57}\right) - 5\arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

en effet

$$\frac{(18+i)^{12}(57+i)^8}{(239+i)^5} = 119209289550781250(1+i)!$$

Ou encore la célèbre formule de S. Plouffe (qui date de 1995 !)

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^k \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$

qui permet le calcul de bits de π c'est ‡ dire des entiers $b_k \in \{0,1\}$ tel que

$$\pi = 3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}.$$

Exercice 12. *Soit $x \in [0,1[$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = nx^n$ et la série de terme général u_n ; on note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n kx^k$ la n^{ieme} somme partielle de cette série.*

a) Montrer que la série de terme général nx^n est convergente. On notera $l = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$.

b) *Calculer le produit de Cauchy de la série de terme général* $v_n = x^n$ *par elle mÍme.* [5]

c) *En déduire la valeur de* $l = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$.

Exercice 13. a) *Les séries de terme général* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{1/3}}$ *et* $v_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{2/3}}$ *sont-elles convergentes. Sont-elles absolument convergente ?*

b) *Montrer le produit de Cauchy de la série de terme général* u_n *par celle de terme général* v_n *n'est pas une série convergente.* [6]*)*

Exercice 14. a) *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$, *déterminer la nature de la série de terme général* $\dfrac{e^{in\theta}}{\ln n}$, $n \geq 2$.

b) *Déterminer la nature de la série de terme général* $\dfrac{(1+i)^n}{2^n(n^2+1)}$

c) *Déterminer la nature de la série de terme général* $\dfrac{(1+i)^n}{2^n}$

5. i.e. calculer $w_n = \sum_{p=0}^{n} v_p v_{n-p}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$.

6. On pourra démontrer que la suite définie par $w_n = \sum_{p=1}^{n-1} u_p v_{n-p}$ ne converge pas vers zéro en minorant $|w_n|$.

Chapitre 3

Suites et séries de fonctions

3.1 Présentation des problémes

3.1.1

Supposons que l'on ait une suite de fonctions

$$f_0, f_1, \ldots$$

définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge. On peut alors définir une fonction $f_\infty : I \to \mathbb{R}$ par

$$f_\infty(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \ .$$

L'objet de cette leçon est de donner des outils qui permettent de savoir

— si la fonction f_∞ est continue,

— si la fonction f_∞ est dérivable,

— si étant donné $a, b \in I$:

$$\int_a^b f_\infty(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

3.1.2 Définition

Soient I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs complexes. Si pour tout $x \in I$ la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers $f_\infty(x)$, on dira que la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge simplement** vers f_∞.

3.1.3 Des exemples

On définit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \\ nx & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

On a
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f_∞ définie par
$$f_\infty(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$
Les fonctions f_n sont continues mais la fonction f_∞ n'est pas continue en 0 car
$$\lim_{x\to 0} f_\infty(x) = 1 \neq f_\infty(0) = 0 ,$$
autrement dit
$$\lim_{x\to 0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x).$$

On étudie la série de fonctions de termes générales
$$u_n(x) = xe^{-nx}, \ \ x \in \mathbb{R}_+ .$$
Il est facile de démontrer que pour tout réel positif ou nul x , la série de terme général $u_n(x)$ converge et on a
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(0) = 0 \ \text{ et } \ \text{pour } \ x > 0, \ \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} .$$
On a
$$\lim_{x\to 0+} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 \neq 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to 0+} u_n(x) .$$

On définit maintenant la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ chacune définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$$
La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers la fonction nulle. Chaque fonction g_n est dérivable et la fonction nulle est dérivable. Cependant pour $x \in \mathbb{R}$, la suite numérique $(g'_n(x) = \sqrt{n}\ \cos(nx))_n$ ne converge pas [1].

1. En effet s'il existe un réel x tel que cette suite converge, on obtient que la suite $(\cos(nx))_n$ converge vers 0. et en se servant de l'identité $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$, on obtient que la suite $\left(\cos(nx)^2\right)_n$ devrait tendre vers $1/2$, ce qui contredit le fait que la suite $(\cos(nx))_n$ converge vers 0. On peut démontrer de la même façon que si pour un réel x la suite $(\cos(nx))_n$ converge vers ℓ

On définit $(h_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par :

$$h_n(x) = nx(1 - x^2)^n \ .$$

Il est aisé de remarquer que la suite de fonctions $(h_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle. Cependant on a [2]

$$\int_0^1 h_n(x)dx = \frac{n}{2}\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{n}{2(n+1)}.$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 h_n(x)dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} h_n(x) \right) dx.$$

Que se passe-t-il ?

Dans le premier cas si on évalue la différence :

$$f_\infty(x) - f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \\ 1 - nx & \text{si } \ x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

Ainsi on a toujours

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_\infty(x) - f_n(x)| = 1 \ .$$

---

alors en utilisant les identités :

$$\cos(2nx) = 2\cos^2(x) - 1 \ \text{ et } \ \cos(3nx) = 3\cos^3(x) - 2\cos(nx)$$

on obtient que forcement

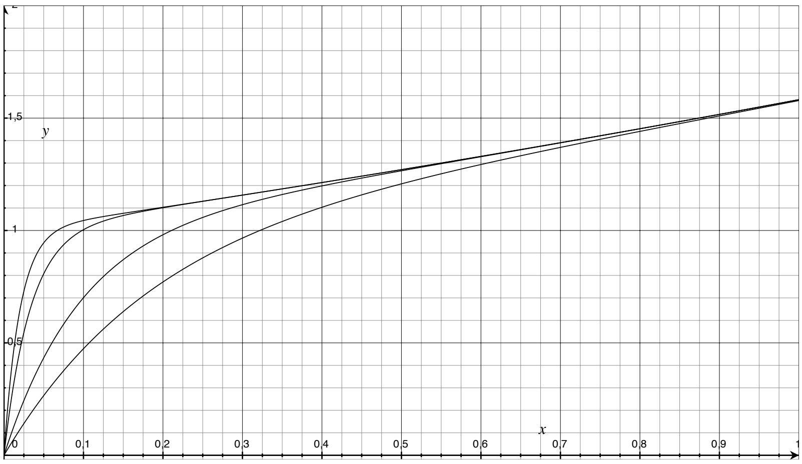
$$\ell = 2\ell^2 - 1 \text{ et } \ell = 3\ell^3 - 2\ell$$

ce qui implique $\ell = 1$ et donc également la suite $(\sin(nx))_n$ converge vers 0. En faisant alors tendre n vers l'infini dans la formule

$$\cos((n+1)x) = \cos(nx)\cos(x) - \sin(nx)\sin(x)$$

on obtient alors que $\cos(x) = 1$, c'est à dire que x est un multiple de 2π auquel cas la suite $(\cos(nx))_n$ est la suite constante égale ‡ 1.

2. avec le changement de variables $t = x^2$.

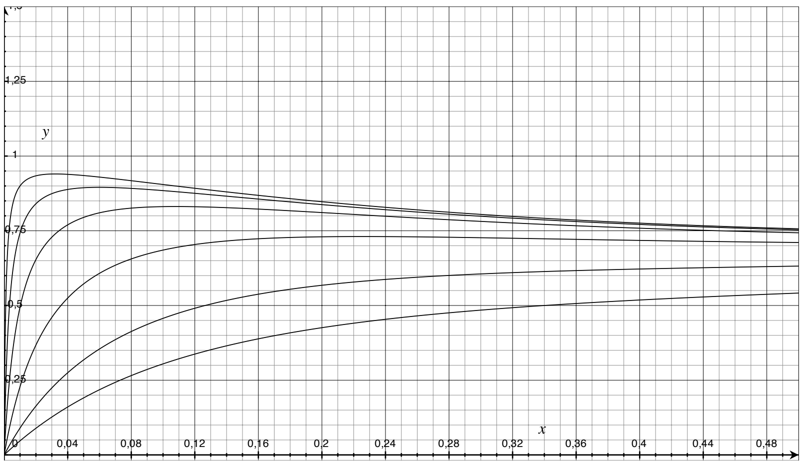


Dans le deuxième cas on a pour $x > 0$:

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k(x) = x\frac{e^{-nx}}{1-e^{-x}}.$$

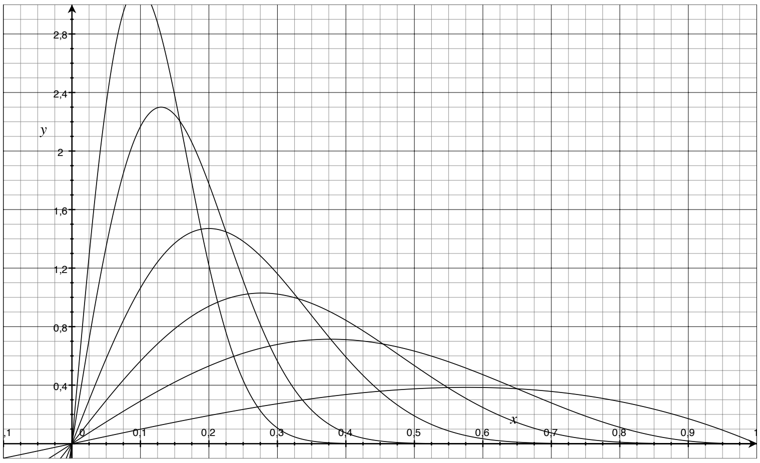
Ainsi en $x_n = 1/n$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} u_k(x_n) = e^{-1} \neq 0$$



Dans le dernier cas il est facile de démontrer que le maximum de la fonction h_n est atteint en $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ Et on a

$$\max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = n\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n \sim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2}}e^{-1/2} .$$



3.2 Convergence uniforme et continuité

On peut caractériser la convergence simple à l'aide des quantificateurs :

Une suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur I converge simplement vers f_∞ si et seulement si

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists n_0(x,\epsilon) \in \mathbb{N}, \text{tel que } n \geq n_0(x,\epsilon) \Rightarrow |f_\infty(x) - f_n(x)| < \epsilon \ .$$

Dans le premier exemple donné ci dessus : on peut prendre $n_(x,\epsilon) = E\left(\frac{1-\epsilon}{x}\right) + 1$, si $x \neq 0$. La bonne notion pour la continuité d'une limite de fonctions est celle de convergence uniforme :

3.2.1 Définition

On dire qu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur I et à valeurs complexes **converge uniformément** vers une fonction f_∞ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}, \text{tel que } n \geq n_0(\epsilon) \text{ et } x \in I, \Rightarrow |f_\infty(x) - f_n(x)| < \epsilon \ .$$

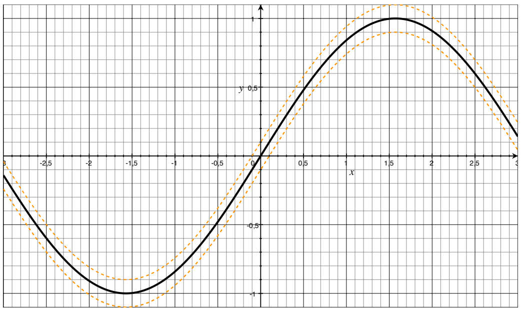
Ou de façon équivalente, $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f_∞ si lorsque

$$M_n = \sup_{x \in I} |f_\infty(x) - f_n(x)|$$

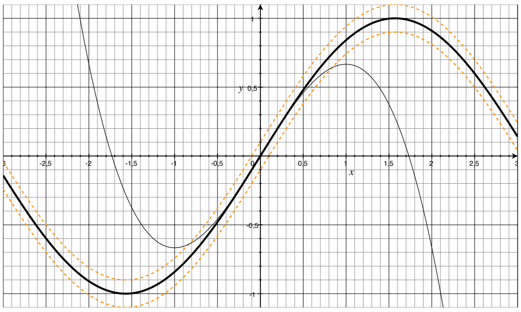
alors la suite $(M_n)_n$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Graphiquement, ceci signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il y a un rang n_0 à partir duquel le graphe de f_n est situé dans un $\epsilon-$épaississement du graphe de f_∞.

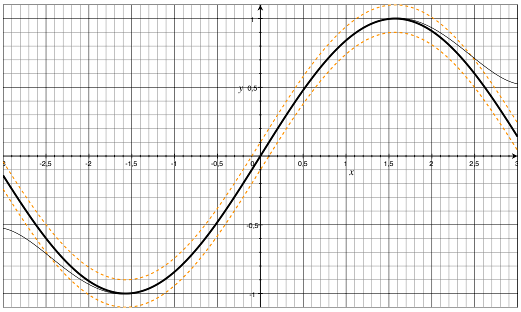
On commence par le graphe de la fonction $f(x) = \sin(x)$ et un $0,1$ épaississement de celui ci :



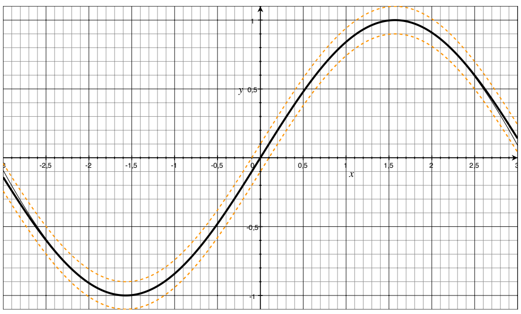
On compare au graphe de la fonction $x \mapsto x - \frac{x^3}{3}$



Puis on compare au graphe de la fonction $x \mapsto x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120}$



Puis on compare au graphe de la fonction $x \mapsto x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$



3.2.2 Quelques remarques élémentaires

Convergence simple vs converge uniforme

Il est évident que la convergence uniforme implique la convergence simple mais la découverte des exemples donnés précédemment montre que la réciproque n'est pas vraie.

Un critère de Cauchy

Proposition 3.2.1. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs complexes. On suppose que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}, \text{tel que } \big(n, m \geq n_0(\epsilon) \text{ et } x \in I\big) \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \ .$$

ou de façon équivalente :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}, \text{tel que } \big(n, m \geq n_0(\epsilon)\big) \Rightarrow \sup_{x \in I} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \ .$$

Alors pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers un nombre complexe $f_\infty(x)$ et la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f_∞.

3.2.3 Convergence uniforme et continuité

Théorème 3.2.2. *Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs complexes et f_∞ une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. On suppose*

— *la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f_∞,*

— *Chaque fonction f_n est continue en x_0,*

Alors f_∞ est continue en x_0.

On en déduit le corollaire immédiat suivant

Corollaire 3.2.3. *Ue limite uniforme de fonctions continues est continue ; autrement dit soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur I et à valeurs complexes et f_∞ une fonction définie sur I. On suppose la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f_∞, alors la fonction f_∞ est continue.*

La preuve du théorème ci dessus est la prototype des preuves de type "intervention de limites". On sera amené à utiliser souvent l'argument élaboré dans cette preuve.

Démonstration. On se place dans les hypothèses du théorème et on fixe un réel strictement positif

$$\epsilon > 0$$

On veut trouver un réel strictement positif δ tel que

$$|x - x_0| < \delta, x \in I \Rightarrow |f_\infty(x) - f_\infty(x_0)| < \epsilon.$$

Or pour tout entier n on a grâce à l'inégalité triangulaire

$$|f_\infty(x) - f_\infty(x_0)| \leq |f_\infty(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_\infty(x_0)| \tag{3.2.1}$$

Grâce au fait que la suite (f_n) converge uniformément vers f_∞, on trouve un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x\in I} |f_\infty(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

On en déduit donc avec l'inégalité (3.2.1) appliquée pour $n = n_0$

$$|f_\infty(x) - f_\infty(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{2} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \ .$$

Mais la fonction f_{n_0} est continue en x_0 donc il existe un réel strictement positif δ tel que

$$|x - x_0| < \delta, x \in I \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

On en déduit alors facilement

$$|x - x_0| < \delta, x \in I \Rightarrow |f_\infty(x) - f_\infty(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}. + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

$\square$

3.2.4 Cas des séries de fonctions

Définitions

À une suite de fonctions

$$u_0, u_1, \ldots$$

définies sur un intervalle I et à valeurs complexes, on associe la série de fonctions de terme général u_n qui est la suite de fonctions $(S_n)_n$ définie sur I par

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k \ .$$

Cette suite est parfois noté dans la littérature

$$\sum u_n \ .$$

On dit que la série de terme général u_n **converge normalement** si la série de terme général

$$M_n = \sup_{x\in I} |u_n(x)|$$

converge .

Résultats : lien avec la convergence uniforme

Proposition 3.2.4. *On considère une suite de fonctions $(u_n)_n$ chacune définie sur I un intervalle et on suppose que la série de terme général u_n converge normalement alors*

i) Pour tout $x \in I$, la série de terme général $u_n(x)$ converge absolument. Notons
$$S_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell(x) \ \text{ et } \ S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

ii) La suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément vers S.

Démonstration. On se place dans les hypothèses de la proposition et on note
$$M_n = \sup_{x \in I} |u_n(x)| \ .$$
Alors pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on a
$$|u_n(x)| \leq M_n$$
Par hypothése, la série de terme général M_n converge donc la série de terme général u_n converge absolument. De plus pour $N \geq n$ et $x \in I$ on a
$$|S_N(x) - S_n(x)| \leq \sum_{\ell=n+1}^{N} |u_\ell(x)| \leq \sum_{\ell=n+1}^{N} M_\ell \leq \sum_{\ell=n+1}^{\infty} M_\ell \ .$$
Ainsi en passant à la limite lorsque N tend vers l'infini dans ces inégalités larges, on obtient :
$$n \in \mathbb{N}, \ x \in I \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| \leq \sum_{\ell=n+1}^{\infty} M_\ell \ .$$
Ainsi on a
$$\sup_{x \in I} |S(x) - S_n(x)| \leq \sum_{\ell=n+1}^{\infty} M_\ell \ .$$
Puisque $\lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=n+1}^{\infty} M_\ell = 0$, on en déduit que
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in I} |S(x) - S_n(x)| = 0$$
c'est à dire la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément vers S. □

On en déduit alors le corollaire suivant

Corollaire 3.2.5. *On considère une suite de fonctions continues* $(u_n)_n$ *chacune définie sur* I *un intervalle et on suppose que la série de terme général* u_n *converge normalement alors la fonction* S *définie sur* I *par*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

est continue.

Si on reprend l'exemple donné au début de la leçon où

$$u_n(x) = xe^{-nx}$$

On a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |u_n(x)| = \frac{e^{-1}}{n}$$

qui n'est pas le terme général d'une série convergente. Par contre si on fixe $\epsilon > 0$ alors on a pour $n \geq 1/\epsilon$

$$\sup_{x \geq \epsilon} |u_n(x)| = \epsilon \frac{e^{-\epsilon n}}{n} \leq e^{-\epsilon n}$$

est bien le terme général d'une série convergente, le corollaire ci dessus montre que la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} xe^{-nx}$ est continue sur $[\epsilon, +\infty[$. Ce qui implique que cette fonction est continue sur

$$\mathbb{R}_+^* = \cup_{\epsilon > 0} [\epsilon, +\infty[\ .$$

Des exemples

i) La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$. En effet soit R un réel strictement positif et démontrons que la série de terme général

$$\frac{x^n}{n!}$$

converge normalement sur l'intervalle $[-R, R]$. Pour $x \in [-R, R]$, nous avons la majoration évidente :

$$\left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq \frac{R^n}{n!}$$

ainsi

$$\sup_{x \in [-R,R]} \left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq \frac{R^n}{n!}.$$

Puisque $\frac{R^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente, on en déduit que la la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge normalement sur l'intervalle $[-R, R]$. Chacune des fonctions

$$x \mapsto \frac{x^n}{n!}$$

est continue sur $[-R, R]$ donc la fonction exponentielle définie par

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

est continue sur $[-R, R]$.

Ceci implique que la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ [3]

ii) La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$ par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} \tag{3.2.2}$$

est continue. On ne démontre d'abord la continuité sur l'intervalle $]-1, 1[$ et on expliquera ensuite comment obtenir la continuité sur les intervalles de la formes $]k, k+1[$ et $]-k-1, -k[$ lorsque k est un entier strictement positif.

On fixe un réel δ vérifiant $0 < \delta < 1$. Et on a pour $x \in [-1+\delta, 1-\delta]$ et $n \geq 1$

$$\left| \frac{1}{n^2 - x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2 - (1-\delta)^2}$$

Donc

$$\sup_{x \in [-1+\delta, 1-\delta]} \left| \frac{1}{n^2 - x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2 - (1-\delta)^2}$$

Puisque la série de terme général $\frac{1}{n^2-(1-\delta)^2}$ est convergente, on en déduit que la série de fonctions de terme général

$$x \in [-1+\delta, 1-\delta] \mapsto \frac{1}{n^2 - x^2}$$

converge normalement. Puisque le terme général de cette série est continue, on en déduit que la fonction f définie par (3.2.2) est continue sur l'intervalle $[-1+\delta, 1-\delta]$.

Finalement l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ est la réunion des intervalles fermés $\{[-1+\delta, 1-\delta]\}_{\delta \in]0,1[}$, donc f est continue sur $]-1, 1[$.

On considère maintenant un entier naturel k non nul et un réel $\delta \in]0, 1/2[$. Pour $n \geq k+1$ et $x \in [k+\delta, k+1-\delta] \cup [-k-1+\delta, -k-\delta]$, on a la majoration :

$$\left| \frac{1}{n^2 - x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2 - (k+1-\delta)^2}$$

qui permet d'utiliser les m êmes arguments pour démontrer la continuité de f sur $]k, k+1[\cup]-k-1, -k[$.

3. Il faut ici se souvenir que la continuité est une notion locale, et donc une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur chaque intervalle $[-R, R]$ est continue ; il suffit pour cela de remarquer que si $x_0 \in \mathbb{R}$ alors on trouve $R = |x_0| + 1$ tel que $x_0 \in]-R, R[$ et alors l'hypothése de continuité de f sur l'intervalle $[-R, R]$ implique que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Un raisonement identique montre que si que f est une fonction définie sur $]a, b[$ et continue sur tout intervalle fermé de la forme $[a+\epsilon, b-\epsilon]$ avec $\epsilon \in]0, (b-a)/2[$ alors f est continue sur $]a, b[$.

iii) On va maintenant construire une fonction définie sur $\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable on peut énumérer $\mathbb{Q}$[4] On trouve une suite injective $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\mathbb{Q} = \{r_n, n \in \mathbb{N}\} \ .$$

On définit alors la fonction

$$u_n = \frac{1}{2^n} \mathbb{1}_{[r_n,+\infty[}$$

Où si A est une partie de $\mathbb{R}$, on note $\mathbb{1}_A$ la fonction caractéristique de A, c'est à dire la fonction valant 1 sur A et 0 sur le complémentaire de A. Ici on a

$$u_n(x) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } \ x \geq r_n \\ 0 & \text{si } \ x < r_n \end{cases} \ .$$

Il est clair que que la fonction u_n est croissante et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{r_n\}$. Donc en particulier u_n est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Maintenant puisque

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)| = \frac{1}{2^n}$$

la série de fonctions de terme général u_n converge normalement, on peut donc définir la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \ .$$

---

4. On commence pour cela à bâtir une injection

$$\varphi \,:\, \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$$

de la façon suivante si

$$r = \epsilon\frac{p}{q} \ \text{ avec } \ \epsilon = \pm 1, \ \ p \in \mathbb{N} \ \text{ et } \ q \in \mathbb{N}^*$$

est la décomposition irréductible d'un nombre rationnel r alors on définit

$$\varphi(r) = 2^p \,.\, 3^q \, 5^{\frac{1+\epsilon}{2}} \,.$$

Il est clair que

$$\varphi(r) = \varphi(r') \Rightarrow r = r'$$

Maintenant l'ensemble $J = \varphi(\mathbb{Q})$ est une partie de $\mathbb{N}$ et

$$\varphi \,:\, \mathbb{Q} \to J$$

est une bijection. Nous pouvons énumérer $J = \{j_n, n \in \mathbb{N}\}$ avec

$$j_0 < j_1 < j_2 < \ \ldots$$

i.e. j_0 est le plus petit entier de J, j_1 le second, ... Il suffit alors de considèrer $r_n = \varphi^{-1}(j_n)$.

On sait que f est limite uniforme de la suite de fonctions $(S_n)_n$ définie par

$$S_n(x) = \sum -\ell = 0^n u_\ell(x)$$

C'est une fonction croissante, elle admet donc des limites à gauche et à droite en tout réel. [5]. *On commence par remarquer que f est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: si $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors chaque fonction u_n est continue en x_0, donc f est continue en x_0.

Puis on montre que f est discontinue en tout rationnel. Soit donc $r_{n_0} \in \mathbb{Q}$. On considère la suite de fonctions

$$(S_n - u_{n_0})_{n \geq n_0}$$

C'est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers la fonction $f - u_{n_0}$. Donc la fonction $f - u_{n_0}$ est continue en r_0. On a donc

$$\lim_{x \to r_0+} f(x) - u_{n_0}(x) = \lim_{x \to r_0-} f(x) - u_{n_0}(x)$$

mais

$$\lim_{x \to r_0+} u_{n_0}(x) = \frac{1}{2^{n_0}} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to r_0-} u_{n_0}(x) = 0$$

ainsi

$$\lim_{x \to r_0+} f(x) - \lim_{x \to r_0-} f(x) = \frac{1}{2^{n_0}} \ ,$$

la fonction f n'est donc pas continue en r_0.

3.2.5 Appendice : une paraphrase de ce qui a été dit ici.

On fixe $[a, b]$ un intervalle non vide fermé de $\mathbb{R}$.

Définition 3.2.6. *Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$, on définit*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

la norme uniforme de f.

Proposition 3.2.7. *La norme uniforme vérifie les propriétés suivantes :*

i) $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$.

ii) Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors $\|\lambda . f\|_\infty = |\lambda| . \|f\|_\infty$.

iii) Si $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ alors $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

5. On a aussi la formule

$$f(x) = \sum_{n \text{ tel que } r_n \leq x} \frac{1}{2^n}$$

Démonstration. Seule la dernière propriété mérite d' être démontrée. Soient donc $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ pour $x \in [a,b]$ on a donc

$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

donc

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \ .$$

□

On peut alors paraphraser les définitions précédentes :

Une suite de fonctions $(f_n)_n$ continues sur $[a,b]$ et à valeurs complexes converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

Ou encore si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty < \epsilon \ .$$

La norme uniforme est à la convergence uniforme des fonctions continues ce qu'est le module pour la convergence des nombres complexes.

De la m ême façon, si $(u_n)_n$ est une suite de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ alors la série de terme général u_n converge normalement si la série de terme général $\|u_n\|_\infty$ converge.

3.3 Convergence uniforme et intégration

3.3.1 suites

Sur un intervalle borné

Théorème 3.3.1. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ qui converge uniformément vers f_∞. Alors on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f_\infty(t)dt \ .$$

Démonstration. En se servant de l'égalité valable pour chaque $t \in [a,b]$,

$$|f_n(t) - f_\infty(t)| \leq \sup_{s\in[a,b]} |f_n(s) - f_\infty(s)| \quad ,$$

on évalue la différence

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f_\infty(t)dt \right| &= \leq \left| \int_a^b (f_n(t) - f_\infty(t))\, dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f_\infty(t)|\, dt \\ &\leq (b-a) \sup_{s\in[a,b]} |f_n(s) - f_\infty(s)| \quad . \end{aligned}$$

Ainsi l'hypothése :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in[a,b]} |f_n(s) - f_\infty(s)| = 0$$

implique bien que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f_\infty(t)dt \ .$$

□

Remarque 3.3.2. *Si il y a une subdivision $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{N-1} < a_N = b$ telle que chaque fonction f_n soit continue sur chaque intervalle $]a_j, a_{j+1}[$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$ en admettant une limite à droite et à gauche en chaque point alors la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ vers f_∞ implique aussi la convergence de $\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)_n$ vers $\int_a^b f_\infty(t)dt$.*

Un exemple plus élaboré

Lemme 3.3.3. *Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on considère la fonction f_n définie sur $]0, n\pi[$ par*

$$f_n(x) = \frac{\sin(x)}{n\sin(x/n)}$$

et prolongée par continuité en 0 par $f_n(0) = 1$ et la fonction f définie sur $]0, \infty[$ par s

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x},$$

de m ême prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 1$.

Soit $T > 0$ alors la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur l'intervalle $[0, T]$.

Démonstration. L'outil fondamental pour démontrer ce résultat est la formule de Taylor-Lagrange : pour $y > 0$, il y a un réel $c \in]0, y[$ tel que [6]

$$\sin(y) = y - \frac{y^3}{6}\cos(c) \ .$$

En appliquant ceci à $y = x/n$, on en déduit que pour $x > 0$ on a

$$-\frac{x^3}{6n^2} \leq n\sin(x/n) - x \leq \frac{x^3}{6n^2}.$$

Prenons n assez grand pour que $n > \frac{2T}{\pi}$ alors la fonction f_n est continue sur $[0, T]$ et pour $x \in]0, T]$, l'on a la majoration :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left|\frac{\sin(x)}{n\sin(x/n)} - \frac{\sin(x)}{x}\right| = \left|\frac{\sin(x)}{xn\sin(x/n)}\,(x - n\sin(x/n))\right| \\ &\leq \left|\frac{\sin(x)}{xn\sin(x/n)}\right| \frac{x^3}{6n^2} = \left|\frac{\sin(x)}{x}\,\frac{x/n}{\sin(x/n)}\right| \frac{x^2}{6n^2} \ . \end{aligned}$$

6. On rappelle que $\frac{d^3}{dy^3}\sin(y) = -\cos(y)$ et $\sin(0) = 0 = \sin''(0)$ et $\sin'(0) = 1$.

On utilise alors le fait que pour tout $x > 0$ on a

$$|\sin(x)| \leq |x|$$

et que par concavité de la fonction $\sin$ sur $[0, \pi/2]$, on sait que pour tout $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\sin(y) \geq \frac{2}{\pi} y,$$

ainsi pour $n > \frac{2T}{\pi}$ et $x \in [0, T]$:

$$\sin\left(\frac{x}{n}\right) \geq \frac{2x}{\pi n},$$

D'où lorsque $x \in]0, T]$ et que $n > \frac{2T}{\pi}$ on a

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq \left| \frac{\sin(x)}{x} \frac{x/n}{\sin(x/n)} \frac{x^2}{6n^2} \right| \\ &\leq 1 \times \frac{2}{\pi} \times \frac{T^2}{6n^2} . \end{aligned}$$

Cette derniére estimation est également vraie en $x = 0$, on a donc démontré que

$$\sup_{x \in [0,T]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{T^2}{3\pi n^2},$$

ce qui montre le résultat. □

Convergence d'intégrale généralisée

Il est aussi commode d'avoir un critère qui permette de traiter la convergence d'intégrale généralisée. Vous verrez en L3 un résultat beaucoup plus général le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Ici on se contente du théorème suivant

Théorème 3.3.4. Petit théorème de convergence dominée : *Soient I un intervalle de R, (f_n) une suite de fonctions continues sur I, f_∞ une fonction continue sur I, et g une fonction positive continue sur I, on suppose que*

- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leq g(x)$.
- *L'intégrale généralisée de g sur I converge.*
- *Pour chaque intervalle fermé borné $[a, b] \subset I$, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f_∞ sur $[a, b]$.*

Alors les intégrales généralisées de f_n et de f_∞ sur I convergent et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f_\infty(t) dt \ .$$

Démonstration. On se place dans le cas où $I = [a, \omega[$ avec $\omega \in]a, +\infty[\cup \{+\infty\} =]a, +\infty]$ les cas où$I =]\alpha, \omega[$ ou $I =]\alpha, b]$ se traiteraient de la m ême façon.

Soit $n \in \mathbb{N}$, l'hypothèse

$$\forall x \in I, \ |f_n(x)| \leq g(x) \tag{3.3.1}$$

et le fait que l'intégrale généralisée de g sur I converge implique que pour l'intégrale généralisée de f_n sur I converge absolument.

La dernière hypothèse implique que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers f_∞ sur I. Ainsi par passage à la limite dans les inégalités larges de la première hypothèse, on en déduit

$$\forall x \in I, \ |f_\infty(x)| \leq g(x) \tag{3.3.2}$$

et la convergence absolue de l'intégrale généralisée de f_∞ sur I .

Soit $\epsilon > 0$, on sait trouver $b \in]a, \omega[$ tel que

$$\int_b^\omega g(t)dt = \int_a^\omega g(t)dt - \int_a^b g(t)dt \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

On en déduit avec les majorations (3.3.1 et 3.3.2) que

$$\int_b^\omega |f_n(t)|dt \leq \frac{\epsilon}{3} \text{ et } \int_b^\omega |f_\infty(t)|dt \leq \frac{\epsilon}{3} \ .$$

On a de plus

$$\begin{aligned}\int_a^\omega (f_n(t) - f_\infty(t))\,dt &= \int_a^b (f_n(t) - f_\infty(t))\,dt + \int_b^\omega (f_n(t) - f_\infty(t))\,dt \\ &= \int_a^b (f_n(t) - f_\infty(t))\,dt + \int_b^\omega f_n(t)dt - \int_b^\omega f_\infty(t)dt\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left|\int_a^\omega f_n(t)dt - \int_a^\omega f_\infty(t)dt\right| &\leq \left|\int_a^b (f_n(t) - f_\infty(t))\,dt\right| + \left|\int_b^\omega f_n(t)dt\right| + \left|\int_b^\omega f_\infty(t)dt\right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f_\infty(t)|\,dt + \int_b^\omega |f_n(t)|\,dt + \int_b^\omega |f_\infty(t)|\,dt \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f_\infty(t)|\,dt + \frac{2\epsilon}{3} \ .\end{aligned}$$

$\left(f_n|_{[a,b]}\right)_n$ converge uniformément vers la restriction de f_∞ à l'intervalle $[a, b]$. On en déduit donc qu'il y a un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$ alors

$$\sup_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f_\infty(t)| \leq \frac{\epsilon}{3(b-a)+1}$$

Et donc pour $n \geq n_0$, nous avons la majoration :

$$\left|\int_a^\omega f_n(t)dt - \int_a^\omega f_\infty(t)dt\right| \leq (b-a)\frac{\epsilon}{3(b-a)+1} + \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon \ .$$

□

Un exemple d'application, la formule de Gauss pour la fonction Γ.

Pour $x > 0$, on définit

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

ceci est bien défini [7]. De plus on a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-t} dt = \lim_{A \to +\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^A = \lim_{A \to +\infty} -e^{-A} + 1 = 1$$

et en intégrant par parties, nous trouvons la relation de récurrence

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \ ,$$

car pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^A t^x e^{-t} dt &= \big[-t^x e^{-t} \big]_0^A + \int_0^A (t^x)' e^{-t} dt \\ &= -A^x e^{-A} + \int_0^A x\, t^x e^{-t} dt \ . \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \lim_{A \to +\infty} \int_0^A t^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{A \to +\infty} \left(-A^x e^{-A} + \int_0^A x\, t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\ &= \int_0^{+\infty} x\, t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x) \ . \end{aligned}$$

On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\Gamma(n) = (n-1)! \ .$$

On va démontrer en utilisant le petit théorème de convergence dominée que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \ . \tag{3.3.3}$$

On considère, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > n \\ t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } x \in]0, n] \end{cases}$$

7. Vérifiez le vous m ême !

et on définit les fonctions f_∞ et g sur $]0,+\infty[$ par

$$f_\infty(t) = g(t) = t^{x-1}e^{-t}.$$

Les intégrales généralisées des fonctions f_n, g, f_∞ sur $]0,+\infty[$ sont bien absolument convergente. De plus la formule de Taylor-Lagrange montre que si $t \in \mathbb{R}_+^*$ alors il y a un réel $\theta \in]0,1[$ tel que

$$e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2}e^{-\theta t}$$

On en déduit que pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ alors

$$1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$$

Et donc

$$1 - \frac{t}{n} \leq e^{-\frac{t}{n}} \leq 1 - \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n^2}.$$

et pour $t \in [0,n]$ on en déduit [8] que

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \left(e^{-\frac{t}{n}}\right)^n = e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n^2}\right)^n.$$

On en déduit facilement pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$ alors

$$|f_n(t)| \leq g(t).$$

Pour finir de démontrer la formule (3.3.3), on doit démontrer que si $[a,b]$ est un intervalle inclus dans $]0,+\infty[$ alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f_∞ sur $[a,b]$. Fixons $t \in [0,n]$.

Nous avons

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n^2}\right)^n - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

Or pour tout $u, v \geq 0$, la formule de Taylor-Lagrange fournit la majoration [9]

$$(u+v)^n - u^n \leq n(u+v)^{n-1}v$$

On applique cette inégalité à $u = 1 - \frac{t}{n}$ et $v = \frac{t^2}{2n^2}$ pour obtenir

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{2n}\left(1 - \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n^2}\right)^{n-1}$$

8. Car la fonction $u \mapsto u^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$
9. Car il existe un réel $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$(u+v)^n - u^n = n(u+\theta v)^{n-1}bv\ .$$

Or la fonction $s \mapsto 1 - s + \frac{s^2}{2}$ est décroissante sur $[0,1]$ et donc pour $t \in [0,n]$,

$$0 \leq 1 - \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n^2} \leq 1 \ .$$

Ce qui permet d'obtenir que pour tout $t \in [0,n]$:

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{2n}$$

Ce qui permet d'obtenir pour $t \in [a,b]$ et $n \geq b$ la majoration

$$0 \leq f_\infty(t) - f_n(t) \leq \max\{b^{x-1}, a^{x-1}\}\frac{b^2}{2n}.$$

Ce qui montre que

$$\sup_{t\in[a,b]} |f_\infty(t) - f_n(t)| \leq \max\{b^{x-1}, a^{x-1}\}\frac{b^2}{2n}$$

et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers f_∞ sur l'intervalle $[a,b]$. Le petit théorème de convergence dominée permet alors d'affirmer alors que la formule (3.3.3) est valide.

Il se trouve qu'avec le changement de variables $t = ns$ on obtient

$$\int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = n^x \int_0^1 s^{x-1}\,(1-s)^n\,ds \ .$$

Puis si on note

$$I(x,n) = \int_0^1 s^{x-1}\,(1-s)^n\,ds \ ,$$

une intégration par parties montre que pour $x > 0$ et $n \geq 1$:

$$I(x,n) = \big[\frac{s^x}{x}\,(1-s)^n\,\big]_0^1 + \int_0^1 \frac{s^x}{x} n\,.\,(1-s)^{n-1}\,ds = \frac{n}{x} I(x+1, n-1).$$

Ainsi :

$$I(x,n) = \frac{n}{x}\,.\,\frac{n-1}{x+1}\,.\,\ldots\,.\,\frac{1}{x+n-1} I(x+n, 0)$$

Mais $I(x+n,0) = \int_0^1 s^{x+n-1} ds = \frac{1}{x+n}$ d'où

$$I(x,n) = \frac{n!}{x(x+1)\,\ldots\,(x+n)}$$

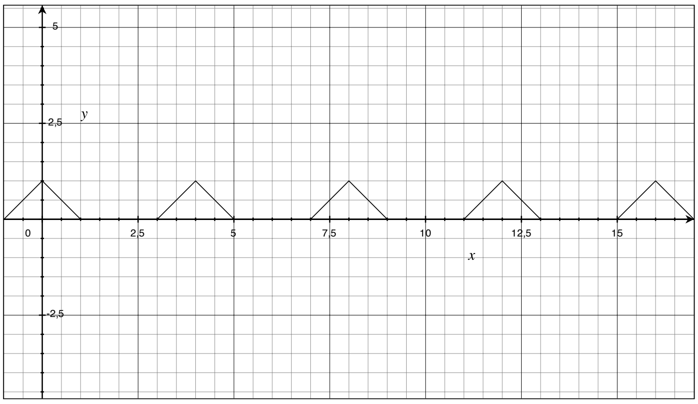
nous avons donc obtenu la formule suivante due à Gauss :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x\ n!}{x(x+1)\,\ldots\,(x+n)} \ .$$

Un exemple où on ne peut appliquer le petit théorème de convergence dominée.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définies par

$$f_n(t) == \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [n-1, n+1] \\ 1 - |t-n| & \text{si } t \notin [n-1, n+1] \end{cases}$$



Pour chaque entier n, l'intégrale généralisée de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ est bien définie et l'on a

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(t)dt = 1 \ .$$

De plus si $[a, b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ alors pour $n \geq b+1$, on sait que

$$\sup_{t \in [a,b]} |f_n(t)| = 0$$

ainsi la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur l'intervalle $[a, b]$. Mais nous n'avons pas de fonctions g dont l'intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$ converge qui domine chaque f_n et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)dt \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to +\infty} f_n(t)dt \ .$$

Un autre exemple

On va ici démontrer en complément de (3.3.3) que :

Lemme 3.3.5.

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{n \sin(x/n)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Démonstration. On a démontré (cf. la preuve de 3.3.3) que lorsque $n > \frac{2T}{\pi}$ alors

$$\left|\int_0^T [f_n(x) - f(x)]dx\right| \leq \int_0^T |f_n(x) - f(x)]|\, dx \leq T \times \frac{T^2}{3\pi n^2} = \frac{T^3}{3\pi n^2}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et posons

$$T_{\varepsilon,n} = n^{2/3}\varepsilon^{1/3}$$

On a alors

$$\left|\int_0^{T_{\varepsilon,n}} [f_n(x) - f(x)]dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{3.3.4}$$

En intégrant par partie, on obtient :

$$\int_{T_{\varepsilon,n}}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_{T_{\varepsilon,n}}^{\infty} - \int_{T_{\varepsilon,n}}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}dx$$

Or

$$\left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_{T_{\varepsilon,n}}^{\infty} = \frac{\cos(T_{\varepsilon,n})}{T_{\varepsilon,n}}$$

et

$$\left|\int_{T_{\varepsilon,n}}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}dx\right| \leq \int_{T_{\varepsilon,n}}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{T_{\varepsilon,n}}$$

On en déduit donc grâce à l'inégalité triangulaire

$$\left|\int_{T_{\varepsilon,n}}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx\right| \leq \frac{2}{T_{\varepsilon,n}} \tag{3.3.5}$$

En effectuant le changement de variables $x = nt$ on obtient

$$\int_{T_{\varepsilon,n}}^{n\pi/2} \frac{\sin(x)}{n\sin(x/n)}dx = \int_{T_{\varepsilon,n}/n}^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}dt$$

puis en intégrant par parties, on a l'égalité :

$$\int_{T_{\varepsilon,n}/n}^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}dt = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\frac{1}{\sin(t)}\right]_{T_{\varepsilon,n}/n}^{\pi/2} - \int_{T_{\varepsilon,n}/n}^{\pi/2} \frac{\cos(nt)}{n}\frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}dt$$

Or

$$\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\frac{1}{\sin(t)}\right]_{T_{\varepsilon,n}/n}^{\pi/2} = -\frac{\cos(n\pi/2)}{n} + \frac{\cos(T_{\varepsilon,n})}{n\sin(T_{\varepsilon,n}/n)}$$

Donc

$$\left|\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\frac{1}{\sin(t)}\right]_{T_{\varepsilon,n}/n}^{\pi/2}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sin(T_{\varepsilon,n}/n)}\,.$$

On remarque que notre choix de $T_{\varepsilon,n}$ implique que

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(T_{\varepsilon,n}/n) = +\infty,$$

En effet $\lim_{n\to\infty} n^{-1/3}\sin(T_{\varepsilon,n}/n) = \varepsilon^{1/3}$.

De m ême on obtient la majoration

$$\left|\int_{T_{\varepsilon,n}/n}^{\pi/2} \frac{\cos(nt)}{n}\frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}dt\right| \le \frac{1}{n}\int_{T_{\varepsilon,n}/n}^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}dt,$$

or

$$\int_{T_{\varepsilon,n}/n}^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}dt = \left[-\frac{1}{\sin(t)}\right]_{T_{\varepsilon,n}/n}^{\pi/2} = -1 + \frac{1}{\sin(T_{\varepsilon,n}/n)}$$

Ainsi

$$\left|\int_{T_{\varepsilon,n}/n}^{\pi/2} \frac{\cos(nt)}{n}\frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}dt\right| \le \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sin(T_{\varepsilon,n}/n)}$$

Donc finallement

$$\left|\int_{T_{\varepsilon,n}}^{n\pi/2} \frac{\sin(x)}{n\sin(x/n)}dx\right| \le \frac{2}{n} + \frac{2}{n\sin(T_{\varepsilon,n}/n)} \tag{3.3.6}$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} n\sin(T_{\varepsilon,n}/n) = +\infty$, les estimations (3.3.5,3.3.6) impliquent que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{T_{\varepsilon,n}}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{T_{\varepsilon,n}}^{n\pi/2} \frac{\sin(x)}{n\sin(x/n)}dx = 0$$

On peut donc trouver un entier n_0 tel que pour tout $n \ge n_0$ on ait

$$\left|\int_{T_{\varepsilon,n}}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\left|\int_{T_{\varepsilon,n}}^{n\pi/2} \frac{\sin(x)}{n\sin(x/n)}dx\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Alors la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire implique

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{n\sin(x/n)}dx - \int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx\right| \le & \left|\int_0^{T_{\varepsilon,n}} \frac{\sin(x)}{n\sin(x/n)}dx - \int_0^{T_{\varepsilon,n}}\frac{\sin(x)}{x}dx\right| \\ & + \left|\int_{T_{\varepsilon,n}}^{n\pi/2} \frac{\sin(x)}{n\sin(x/n)}dx\right| \\ & + \left|\int_{T_{\varepsilon,n}}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx\right| \ ;\end{aligned}$$

et l'estimation (3.3.4) implique que pour $n \geq n_0$, on a :

$$\left| \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{n\sin(x/n)}dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx \right| < \varepsilon.$$

□

Le lemme suivant impliquera que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Lemme 3.3.6. *Lorsque n est un entier impair, on a*

$$\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{n\sin(x/n)}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration. En effet on a

$$\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{n\sin(x/n)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}dt.$$

et

$$\sin(nt) = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$$

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Donc

$$\frac{\sin(nt)}{\sin(t)} = \frac{e^{int} - e^{-int}}{e^{it} - e^{-it}} = \frac{e^{-int}\left(e^{i2nt} - 1\right)}{e^{-it}\left(e^{2it} - 1\right)} = e^{-i(n-1)t}\frac{e^{i2nt} - 1}{e^{2it} - 1}$$

Or on reconnait ici la somme partielle d'une série géométrique de raison e^{i2t} :

$$\frac{e^{i2nt} - 1}{e^{2it} - 1} = \frac{1 - e^{2int}}{1 - e^{2it}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ikt}$$

D'où

$$\frac{\sin(nt)}{\sin(t)} = e^{-i(n-1)t}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ikt} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k-n+1)t},$$

et en prenant la partie réelle de cette identité, nous obtenons :

$$\frac{\sin(nt)}{\sin(t)} = \sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k - n + 1)t)$$

Or

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2k-n+1)t)dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n-1=2k \\ \left[\frac{\sin((2k-n+1)t)}{2k-n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin((2k-n+1)\pi/2)}{2k-n+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Or lorsque n est un entier impair , alors pour tout entier $k \in \{0, ...n-2\}$, $(2k-n+1)$ est un entier pair et $\sin((2k-n+1)\pi/2) = 0$. Donc finallement

$$\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{n\sin(x/n)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2k-n+1)t)dt = \frac{\pi}{2}.$$

□

3.3.2 Le cas des séries

On dispose d'abord du théorème suivant qui est une conséquence facile de la proposition 3.2.4 et du théorème 3.3.1 :

Théorème 3.3.7. *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ on suppose que la série de terme général u_n converge normalement sur $[a, b]$ alors*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(t)dt.$$

Et on dispose aussi du résultat suivant dont on va voir qu'il découle du petit théorème de convergence dominé :

Théorème 3.3.8. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ une suite de fonctions continues sur I, on suppose*

- *Pour chaque entier n, l'intégrale généralisée de u_n sur I est absolument convergente.*
- *La série de terme général $\int_I |u_n(t)|dt$ est absolument convergente.*
- *Pour chaque intervalle $[a, b]$ inclus dans I, la série de terme général u_n converge normalement sur $[a, b]$*

Alors

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n(t)dt.$$

Démonstration. Posons pour $x \in I$, on sait donc que la série de terme général

$$|u_n(x)|$$

est convergente. Notons

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(x)| \ .$$

On définit également la suite de fonctions $(f_n)_n$ par

$$f_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell(x) \ , x \in I$$

On définit aussi

$$f_\infty(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

On va vérifier que l'on peut utiliser le petit théorème de convergence dominée. On sait que les fonctions f_n sont continues. Par l'hypothèse $iii)$, on sait que pour chaque intervalle $[a,b]$ inclus dans I, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f_∞ sur $[a,b]$. Ceci montre que la fonction f_∞ est continue. Un argument identique montre que la fonction g est également continue. De plus si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ alors

$$|f_n(x)| \leq \sum_{\ell=0}^{n} |u_\ell(x)| \leq \sum_{\ell=0}^{+\infty} |u_\ell(x)| = g_\infty(x) \ .$$

Il nous reste donc à vérifier que l'intégrale généralisée de g sur I converge. La fonction g étant positive, il nous suffit de trouver un réel M tel que pour tout intervalle $[a,b]$ inclus dans I alors

$$\int_a^b g(x)dx \leq M \ .$$

Puisque la série de terme général $|u_n|$ converge normalement sur $[a,b]$, on sait que

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int_a^b |u_\ell(x)|dx$$

De plus on sait que pour chaque $\ell \in \mathbb{N}$ alors

$$\int_a^b |u_\ell(x)|dx \leq \int_I |u_\ell(x)|dx \ ;$$

L'hypothèse $ii)$ permet d'en déduire que si l'on pose

$$M = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int_I |u_\ell(x)|dx$$

alors

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int_a^b |u_\ell(x)|dx \leq M \ .$$

$\square$

Un exemple

Nous allons démontré la formule suivant qui relie la fonction ζ de Riemann [10] à la fonction Γ d'Euler

Lemme 3.3.9. *Si* $s > 1$ *alors*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(s) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \ .$$

-

Démonstration. On remarque d'abord que si $t > 0$ alors $0 < e^{-t} < 1$ et donc

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = e^{-t} \sum_{\ell=0}^{+\infty} e^{-\ell t} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} e^{-(\ell+1)t} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}.$$

On pose $u_n(t) = t^{s-1} e^{-nt}$. Il n'est pas difficile de voir que pour chaque entier n, l'intégrale généralisée de $u_n = |u_n|$ sur $]0, +\infty[$ converge et le changement de variables $u = nt$ montre que

$$\int_0^{+\infty} |u_n|(t) dt = \int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-nt} dt = n^{-s} \int_0^{+\infty} u^{s-1} e^{-u} ds = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$$

donc la série de terme général $\int_0^{+\infty} |u_n|(t) dt$ est convergente. Pour appliquer notre théorème (3.3.8) nous devons encore vérifier que si $[a, b]$ est un intervalle de $]0, +\infty[$ alors la série de terme général u_n converge normalement sur $[a, b]$.

Or pour $t \in [a, b]$, nous avons :

$$|u_n(t)| = u_n(t) \leq \max\{a^{s-1}, b^{s-1}\}\, e^{-na}$$

Donc

$$\sup_{t \in [a,b]} |u_n(t)| \leq \max\{a^{s-1}, b^{s-1}\}\, e^{-na}$$

or la série de terme général $\max\{a^{s-1}, b^{s-1}\}\, e^{-na}$ converge. Donc la série de terme général $\sup_{t\in[a,b]} |u_n(t)|$ converge donc la série de terme général u_n converge normalement sur $[a, b]$.

Le théorème (3.3.8) implique donc que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} \ .$$

□

10. La fonction définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

.

3.3.3 Convergence uniforme et primitivation

Primitives

Proposition 3.3.10. *Soient I un intervalle **borné** de $\mathbb{R}$ et $a \in I$, $C \in \mathbb{C}$. On suppose que $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continue sur I qui converge uniformément vers une fonction f_∞ [11] .Alors la suite de fonctions (F_n) définie par*

$$F_n(x) = C + \int_a^x f_n(t)dt$$

converge uniformément vers la fonction F_∞ définie par

$$F_\infty(x) = C + \int_a^x f_\infty(t)dt.$$

Démonstration. En effet si R est tel que

$$I \subset [-R, R]$$

alors pour tout $x \in I$ nous avons :

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F_\infty(x)| = \left| \int_a^x (f_n(t) - f_\infty(t))dt \right| &\leq \int_a^x |f_n(t) - f_\infty(t)|\, dt \\ &\leq |x - a| \sup_{t \in I} |f_n(t) - f_\infty(t)| \\ &\leq 2R \ \sup_{t \in I} |f_n(t) - f_\infty(t)| \end{aligned}$$

On a donc obtenu :

$$\sup_{x \in I} |F_n(x) - F_\infty(t)|\, 2R \ \sup_{t \in I} |f_n(t) - f_\infty(t)| \ ,$$

ce qui montre bien le résultat énoncé. □

Régularité $\mathcal{C}^1$

En lisant cette proposition à l'envers, on obtient le résultat suivant :

Proposition 3.3.11. *Soit I un intervalle **borné** de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on suppose que*
- *La suite des dérivées $(f'_n)_n$ converge uniformément vers une fonction g.*
- *Il y a un réel x_0 de I tel que la suite $(f_n(x_0))_n$ converge :*

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x_0) = \ell$$

Alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f_∞ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

---

11. Ainsi f_∞ est une fonction continue.

— $f_\infty(x_0) = \ell$
— $f'_\infty = g$.

Démonstration. Lorsque l'on définit

$$f_\infty(x) = \ell + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

et

$$\tilde{f}_n(x) = \ell + \int_{x_0}^{x} f_n\prime(t)dt = \ell - f_n(x_0) + f_n(x)$$

La proposition précédente (5.5.1) nous informe que la suite $(\tilde{f}_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f_∞. Mais puisque

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f_\infty(x)| \leq |\ell - f_n(x_0)| + \sup_{x\in I} \left|\tilde{f}_n(x) - f_\infty(x)\right| .$$

la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f_∞ et par définition de f_∞, nous avons bien

$$f_\infty(x_0) = \ell \text{ et } f'_\infty = g \ .$$

□

On en déduit le corollaire suivant

Corollaire 3.3.12. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on suppose que*
— *la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f_∞*
— *La suite des dérivées $(f'_n)_n$ converge uniformément vers une fonction g.*
Alors la fonction f_∞ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'_\infty = g$.

Nous avons un résultat analogue concernant les séries :

Proposition 3.3.13. *Soit I un intervalle* ***borné*** *de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on suppose que*
— *La série de terme général u'_n converge normalement.*
— *Pour un $x_0 \in I$, la série de terme général $u_n(x_0)$ converge absolument.*
Alors la série de terme général $u_n(x)$ converge normalement et la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x) \ .$$

Démonstration. Puisque l'on a

$$|u_n(x)| = \left|u_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} u'_n(t)dt\right| \leq |u_n(x_0)| + |x - x_0| \sup_{t\in I} \left|u'_n(t)\right| \ .$$

Et puisque l'on peut trouver R tel que $I \subset [-R, R]$, on en déduit la majoration

$$\sup_{x\in I} |u_n(x)| \leq |u_n(x_0)| + 2R \sup_{t\in I} \left|u_n'(t)\right| \ .$$

Ce qui montre que la série de terme général u_n converge normalement. La proposition précédente appliquée à g définie par $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)$ et $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$, nous informe que (f_n) converge uniformément vers une fonction f_∞ de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$f_\infty' = g \ .$$

Ceci montre que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que l'on a

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) \ .$$

□

On en déduit le corollaire suivant

Corollaire 3.3.14. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on suppose que*

- *La série de terme général u_n converge normalement.*
- *La série de terme général u_n' converge normalement.*

Alors la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) \ .$$

Il faut bien comprendre qu'ici les hypothèses portent sur la convergence uniforme (ou normale) des dérivées.

Régularité $\mathcal{C}^k$

Un raisonnement par récurrence nous permet facile de démontrer les résultats suivant :

Proposition 3.3.15. *Soient I un intervalle **borné** de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. On considère $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, et on suppose*

- *La suite des dérivées k^{ieme} $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément vers une fonction g.*
- *Il y a un réel x_0 de I tel que pour tout $\ell \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, les suites $(f_n^{(\ell)}(x_0))_n$ convergent :*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n^{\ell}(x_0) = a_\ell$$

Alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f_∞ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que

— *pour tout* $\ell \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $f_\infty^{(\ell)}(x_0) = a_\ell$

— *pour tout* $\ell \in \{1, \ldots, k\}$, *la suite de fonctions* $(f_n^{(\ell)})_n$ *converge uniformément* $f_\infty^{(\ell)}$.

et son corollaire

Corollaire 3.3.16. *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $k \in \mathbb{N}$. *On considère* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* I, *et on suppose que pour tout* $\ell \in \{0, 1, \ldots, k\}$ *la suite des dérivées* ℓ^{ieme} $(f_n^{(\ell)})_n$ *converge uniformément vers une fonction* g_ℓ. *Alors la fonction* g_0 *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *et pour tout* $\ell \in \{1, \ldots, k\}$,

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell} g_0 = g_\ell \ .$$

Et on a un résultat analogue concernant les séries de fonctions :

Proposition 3.3.17. *Soit* I *un intervalle* ***borné*** *de* $\mathbb{R}$ *et* $(u_n)_n$ *une suite de fonctions de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* I, *on suppose que*

— *La série de terme général* $u_n^{(k)}$ *converge normalement.*

— *Pour un* $x_0 \in I$, *et pour tout* $\ell \in \{0, \ldots, k-1\}$ *la série de terme général* $u_n^{(\ell)}(x_0)$ *converge absolument.*

Alors la série de terme général $u_n(x)$ *converge normalement , de plus la fonction* $x \mapsto \sum_{n=0}^\infty u_n(x)$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *et pour tout* $\ell \in \{1, \ldots, k\}$, *l'on a*

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(\sum_{n=0}^\infty u_n(x)\right) = \sum_{n=0}^\infty u_n^{(\ell)}(x) \ .$$

et son corollaire

Corollaire 3.3.18. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $(u_n)_n$ *une suite de fonctions de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* I, *on suppose que pour tout* $\ell \in \{0, \ldots, k\}$, *la série de terme général* $u_n^{(\ell)}$ *converge normalement.*

Alors la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^\infty u_n(x)$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *et pour tout* $\ell \in \{1, \ldots, k\}$, *l'on a*

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(\sum_{n=0}^\infty u_n(x)\right) = \sum_{n=0}^\infty u_n^{(\ell)}(x) \ .$$

Quelques exemples

Proposition 3.3.19. *La fonction* exp *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et de plus*

$$\exp' = \exp .$$

Démonstration. Soit $R > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. On va démontrer que $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-R, R]$ et que $\exp' = \exp$. Ce qui montrera que la fonction $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ On considère donc la fonction

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

Il est évident que u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et que la série de terme général $u_n(0)$ est absolument convergente.

Il est facile de remarquer que si $n \geq 1$ alors

$$u_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Ainsi pour $n \geq 1$:

$$\sup_{x\in[-R,R]} \left|u_n'(x)\right| \leq \frac{R^{n-1}}{(n-1)!} \ .$$

Puisuqe $R^{n-1}/(n-1)!$ est le terme général d'une série convergente, la série de terme général u_n' converge normalement sur $[-R, R]$. En appliquant la proposition (3.3.13), on obtient que la fonction $\exp$ définie par

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-R, R]$ et pour $x \in [-R, R]$, nous avons

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$

Ceci étant vrai sur chaque intervalle de la forme $[-R, R]$ on en déduit que la fonction $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\exp' = \exp$. $\square$

Vous pouvez également démontrer les résultat suivants :

Proposition 3.3.20. *La fonction* $\sin$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ .$$

est de $\mathcal{C}^\infty$*. De la même façon, la fonction* $\cos$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ .$$

est de $\mathcal{C}^\infty$*. De plus*

$$\sin' = \cos \ \text{ et } \ \cos' = -\sin .$$

Chapitre 4

Exercices sur les séries de fonctions

Exercice 15. $\boxed{*}$ *Etudier la convergence simple et la convergence uniforme, sur les intervalles de $\mathbb{R}$ indiqué, de chacune des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ suivantes.*

a) $f_n(x) = \dfrac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}$ *sur* $I = [0, +\infty[$ *et sur* $J = [a, +\infty[$ *avec* $a > 0$.

b) $f_n(x) = e^{x+\frac{1}{n}}$ *si* $x \in [-n, n]$, $\quad f_n(x) = 0$ *sinon, sur* $I = \mathbb{R}$ *et sur* $J =]-\infty, A]$ *avec* $A \in \mathbb{R}$.

c) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(x+n)^2}$ *sur* $I = \mathbb{R}$ *et sur* $J = [A, +\infty[$ *pour* $A \in \mathbb{R}$

d) $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x^2}$ *sur* $I = [0, 1]$

Exercice 16. $\boxed{*}$ *Etudier la convergence simple et la convergence uniforme, sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ indiqué, de chacune des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ suivantes.*

a) $I = [0, 1],\ f_n(x) = nx^n(1-x)$

b) $I = [0, +\infty[,\ f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

c) $I = [0, 1],\ f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$

d) Dans les trois exemples précédents, a-t-on :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx\ ?$$

Exercice 17. *On considère la suite de fonctions*

$$\begin{array}{rccc} f_n & : & [0, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sin^n x \end{array}$$

a) Etudier la convergence simple de la suite (f_n).

b) A-t-on convergence uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ *?*

c) Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle $[0, a]$ *avec* $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.

d) A-t-on convergence uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ *?*

Exercice 18. $\boxed{*}$

a) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur* $[A, +\infty[$. *On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction* f_∞ *et que pour chaque* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0;$$

En minant une preuve du cours, démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f_\infty(x) = 0.$$

b) Comparer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{n}{x+n^2}\right) \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{x+n^2}\right)$$

c) Comparer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{n}{x+n}\right) \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{x+n}\right)$$

d) Etudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ *de* $x \mapsto \dfrac{n}{x+n^2}$ *et de* $x \mapsto \dfrac{n}{x+n}$ *puis conclure.*

Exercice 19. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur* I*, convergeant uniformément sur* I *vers une fonction* f *continue sur* I.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* I *convergeant vers* $l \in I$*, montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(l)$.

Exercice 20. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions dérivables sur l'intervalle* $I = [a, b]$ $(a < b)$ *convergeant simplement sur* I *vers la fonction nulle, et telle que :*

$\exists M > 0 |\ \forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N} :\ |f_n'(x)| \leq M.$

Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I.

Indication : on pourra considérer une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq p}$ *de* $I = [a, b]$ *et appliquer l'inégalité des accroissements finis.*

Exercice 21. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par*

$$f_n(x) = \frac{x \arctan(nx)}{1+x}.$$

a) démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{x}{1+x}$$

On pose $f_\infty(x) = \frac{\pi}{2} \frac{x}{1+x}$.
On rappelle que pour tout $a > 0$, $\arctan(a) + \arctan\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$

b) démontrer que pour tout $x > \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

c) Pour $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ démontrer que

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$$

d) En déduire que la suite de fonction (f_n) converge uniformément vers f_∞ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 22. *a) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3, démontrer que pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$ on a :*

$$\theta - \frac{\theta^3}{6} \leq \sin(\theta) \leq \theta$$

Si $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x+1}$$

b) démontrer que pour tout $x \in [0,1]$ et $n \geq 1$:

$$|f_n(x) - x/(x+1)| \leq \frac{1}{6n^2}$$

c) Que peut on en déduire sur la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
Si $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x+1}$$

d) démontrer que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto x/(x+1)$.

e) Soit $x_n = n\pi$. Calculer $g_n(x_n)$. Est ce que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $x \mapsto x/(x+1)$ sur $[0, +\infty[$?

Convergence normale :

Exercice 23. $\boxed{*}$ *Etudier la convergence simple, la convergence normale et la convergence uniforme des séries de fonctions de termes géneraux u_n, v_n et w_n suivantes :*

$$\begin{array}{lcll} x & \mapsto & u_n(x) = x^n(1-x)^n & ; \quad x \in [0,1] \\ x & \mapsto & v_n(x) = x^n(1-x^n) & ; \quad x \in [0,1] \\ x & \mapsto & w_n(x) = x^n(1-x) & ; \quad x \in [0,1] \end{array}$$

Exercice 24. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin^2(nx)}{n\sin(x)} & \text{si } x \neq 0\ . \end{cases}$$

a) *Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.*

b) *En considèrant la suite $\left(u_n = \frac{\pi}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément.*

Exercice 25. $\boxed{*}$ *On considère pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $x \geq 0$*

$$u_n(x) = \left(1 - x\frac{\ln n}{n}\right)^n.$$

a) *démontrer que $\lim_{n\to\infty} n^x u_n(x) = 1$.*

b) *En déduire que la série de terme général $u_n(x)$ converge si et seulement si $x > 1$.*

c) *Pour $x > 1$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Soit $b > a > 1$ démontrer que la série de fonctions de terme général $x \mapsto u_n(x)$ converge normalement sur $[a,b]$.* [1]

d) *En déduire que la fonction f est continue sur $]1,+\infty[$.*

Exercice 26. *On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par*

$$\begin{aligned} u_n\ &: [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto e^{-n^2 t} \end{aligned}$$

a) *démontrer que la série de terme général e^{-n^2t} converge si et seulement si $t > 0$.*

b) *démontrer que pour tout $a > 0$, la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur l'intervalle $[a,+\infty[$.*

c) *En déduire que*

$$\int_0^{+\infty}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2t}\right]dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

On énoncera le théorème utilisé.

1. On pourra démontrer qu'il existe un $n(b) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n(b) \Rightarrow 0 \leq u_n(b) \leq u_n(a)$.

Exercice 27. Théorème de J. Tannery[2] *Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère une suite finie $u_0(n), u_1(n), ..., u_n(n)$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k(n)$. On suppose :*

— *qu'il y a une suite (M_k) de réels positifs tels que la série de terme général M_k soit convergente ($\sum_k M_k < \infty$) et que pour tout $0 \leq k \leq n$, on ait*

$$|u_k(n)| \leq M_k$$

— *Qu'il y a une suite (v_k) telle que que pour tout entier k, la suite $(u_k(n)_{n \geq k}$ converge lorsque n tend vers l'infini vers v_k : $\lim_{n\to\infty} u_k(n) = v_k$*

Vous allez démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

a) *Montrer que pour tout entier k, $|v_k| \leq M_k$; en déduire que la série de terme général v_k est absolument convergente.*

b) *Soit $\varepsilon > 0$, trouver n_0 tel que pour $n \geq n_0$:*

$$\left|\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k(n)\right| = \left|S_n - \sum_{k=0}^{n_0} u_k(n)\right| \leq \varepsilon/3$$

$$\text{et } \left|\sum_{k=n_0+1}^{\infty} v_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} v_k - \sum_{k=0}^{n_0} v_k\right| \leq \varepsilon/3$$

c) *Conclure*[3]

Exercice 28. *Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on définit la fonction $u_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ par*

$$u_n(x) = \frac{\ln(1+nx^2)}{n^2}.$$

a) *démontrer que la série de terme général u_n converge normalement.*

b) *démontrer que si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ alors*

$$\frac{|x|}{1+nx^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

c) *démontrer que la série de terme général u_n' converge normalement.*

d) *Que pouvez vous en déduire sur la fonction $S : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+nx^2)}{n^2} ?$$

2. Mathématicien français 1848-1910, a notamment écrit un livre d'"Introduction à la théorie des fonctions d'une variable" disponible en ligne sur le portail Gallica.

3. Il faudra utiliser et vérifier que pour $n \geq n_0$, $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k(n) - \sum_{k=0}^{\infty} v_k\right| \leq 2\frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=0}^{n_0} |u_k(n) - v_k|$.

Limites de fonctions et intégration

Exercice 29. $\boxed{*}$ *En utilisant le théorème de convergence dominée,*

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}dx$

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{n}(1-\frac{x}{n})^n dx.$

Exercice 30. *On considère la suite de fonctions*

$$\begin{array}{cccc} f_n & : & [0,\frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & n\cos^n x\sin x \end{array}$$

a) Etudier la convergence simple de la suite (f_n).

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx.$

c) A-t-on convergence uniforme sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ *de la suite* (f_n) *?*

Exercice 31. $\boxed{*}$ *On considère les fonctions* $u_n, n\in\mathbb{N}$ *définies par*

$$u_0\ :\ [0,1]\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto 1$$

et pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n\ :\ [0,1]\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\begin{cases}\frac{x^n(\ln x)^n}{n!} & \text{si } x\in]0,1]\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ *converge normalement sur* $[0,1]$.

Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$*, on considère l'intégrale* $I_{p,q}=\displaystyle\int_0^1 x^p(\ln x)^q dx.$

b) Déterminer une relation entre $I_{p,q}$ *et* $I_{p,q-1}$ *; en déduire la valeur de* $J_n=I_{n,n}$ *pour* $n\in\mathbb{N}$.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}.$

Exercice 32. *a) Montrer que la fonction* f *définie par* $f(x)=\ln x\ln(1-x)$ *est intégrable sur* $[0,1]$

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}.$ [4]

---

4. On rappelle que $\forall x\in[0,1[,\ \ln(1-x)=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}.$

Exercice 33. *a) démontrer que pour $k \in \mathbb{N}$ alors*

$$\int_0^1 t^k \ln(t)dt = -\frac{1}{(k+1)^2}$$

b) démontrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}dt = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Exercice 34. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n\ :]0,1] \to \mathbb{R}$ par*

$$f_n(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{1}{(nt+1)}$$

a) Soit $\varepsilon > 0$, démontrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur l'intervalle $[\varepsilon, 1]$

b) démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{1}{(nt+1)}dt = 0.$$

Exercice 35. *On fixe $\theta \in]0, \pi[$. Et on considère pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $t \in [0,1]$,*

$$u_n(t) = t^{n-1}\sin(n\theta).$$

On définit également

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \int_0^1 u_p(t)dt.$$

a) En posant $e^\tau = t$, calculer[5]

$$\sum_{p=1}^{n} u_p(t)\ .$$

b) En vous aidant de la formule obtenu en a), montrer que

$$\left|\sum_{p=1}^{n} u_p(t) - \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2\cos(\theta)t + 1}\right| \leq \frac{2t^n}{\sin^2(\theta)}$$

c) démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2\cos(\theta)t + 1}dt.$$

d) Calculer $\int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2-2\cos(\theta)t+1}dt$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$.[6]

5. On remarquera $\sum_{p=1}^{n} u_p(t) = \frac{1}{t}\sum_{p=1}^{n} \operatorname{Im} e^{p(\tau+i\theta)}$.

6. On rappele les identités $1-\cos(\theta) = 2\sin^2(\theta/2)$ et $\sin(\theta) = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ ainsi que la formule suivante valable pour $v > 0$:$\arctan(v) + \arctan(1/v) = \pi/2$.

Exercice 36. *On considère la suite de fonctions* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$\begin{aligned} u_n \ : \ [0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \arctan(x+n)-\arctan(n) \end{aligned}$$

a) *démontrer que la série de fonctions de terme général* u'_n *converge normalement sur* $[0,+\infty[$.

b) *La série de terme général* $u_n(0)$ *converge. Citer le théorème qui vous permet d'affirmer que la série de fonctions de terme général* u_n *converge uniformément sur tout intervalle* $[0,R]$, $R>0$ *et que la fonction* $S\ :\ [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *définie par* $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ *est* $\mathcal{C}^1$.

c) *En utilisant les arguments contenus dans la preuve du théorème permettant de comparer convergence de série et convergence d'intégrale généralisée : démontrer que pour* $x>0$ *:*

$$\frac{\pi}{2}-\arctan(x)=\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(x+y)^2+1}\leq S'(x)$$

d) *Calculer* $S(1)$ *et en déduire que pour* $x\geq 1$, *on a* $S(x)\geq\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\ln(x)$.
Indication : On pourra se servir du fait que pour $a>0$ *on a* $\pi/2=\arctan(a)+\arctan(1/a)$ *et que pour* $a\in[0,1]$, $\arctan(a)\geq a/2$.

Exercice 37. $\boxed{*}$ *On rappelle que* $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. *Soit* $x\in[0,1[$, *justifier les calculs suivants, il faudra notamment citer le (ou les) théorème(s) utilisé(s).*

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sinh(xt)}{\sinh(t)}dt &= \int_0^{+\infty}\frac{e^{xt-t}-e^{-xt-t}}{1-e^{-2t}}dt \\ &= \int_0^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}e^{xt-t-2nt}-e^{-xt-t-2nt}\right]dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left[e^{xt-t-2nt}-e^{-xt-t-2nt}\right]dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2x}{(2n+1)^2-x^2}\end{aligned}$$

Exercice 38. a) *En utilisant le théorème des accroissements finis (c'est à dire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre* 1*) : démontrer que si* $\theta\in\mathbb{R}_+$ *alors*

$$0\leq\theta-\arctan(\theta)\leq\theta^3.$$

b) *En déduire que si* $x\geq 0$ *alors*

$$\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\leq\frac{x}{n}\text{ et }0\leq x-n\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\leq\frac{x^3}{n^2}.$$

c) *Qu'est ce qu'il vous faut vérifier pour affirmer que*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{x^4+1}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^4+1}dx\ ?$$

d) *démontrer que l'on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{x^4+1}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^4+1}dx.$$

Limites de fonctions de dérivabilités

Exercice 39. $\boxed{*}$ *Soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *la suite de fonctions définie sur* $I=\mathbb{R}$ *par :* $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$.

Montrer que la suite des fonctions dérivées $(f_n')_{n\geq 1}$ *converge simplement et uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* f *à déterminer.*

Peut-on écrire que $\forall x\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)=(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n)'(x)$ *?*

Exercice 40. *On considère la fonction* f *définie par :* $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2+1}$

Déterminer son ensemble de définition; étudier sa continuité et sa dérivabilité. Montrer que $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=1$.

Exercice 41. a) *Montrer que la série de fonctions de terme général* $x\mapsto u_n(x)=\dfrac{e^{-nx^2}}{(n^2+1)}$ *converge simplement sur* $[0,+\infty[$ *vers sa somme notée* S.

b) *Montrer que* S *est continue sur* $[0,+\infty[$ *et dérivable sur* $]0,+\infty[$.

c) *Donner l'expression de* $S'(x)$, $x\in]0,+\infty[$.

Exercice 42. $\boxed{*}$ *On considère la série de fonction de terme général* $u_n, n\geq 1$ *où :*

$$u_n(x)=\frac{e^{-nx}}{n^2}.$$

a) *Montrer que pour* $x\geq 0$, *la série de terme général* $u_n(x)$ *est convergente. On définit alors*

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$$

b) *Montrer que* S *est continu sur* $[0,+\infty[$ *et deux fois dérivable sur* $]0,+\infty[$;

c) *calculer* $S''(x)$ *pour* $x\in]0,+\infty[$.

d) *En déduire qu'il existe deux réels* α *et* β *tels que :* $\forall x > 0,\ S(x) = \alpha x + \beta + \int_1^x \ln(1-e^{-t})dt.$

e) *Déterminer la nature de l'intégrale généralisée :*

$$\int_1^{+\infty} \ln(1-e^{-t})dt.$$

f) *Montrer que* $\lim_{x\mapsto+\infty} S(x) = 0$*, puis en déduire que :*

$$\forall x > 0,\ S(x) = -\int_x^{+\infty} \ln(1-e^{-t})dt.$$

g) *Retouver cette formule à l'aide de la formule*

$$-\ln(1-v) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{v^{k+1}}{k+1}$$

valide pour $v \in [-1, 1[$.

Exercice 43. $\boxed{*}$ *Fonction* ζ *de Riemann.*

C'est la fonction définie sur $]1, +\infty[$ *par* $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

a) *démontrer que* $\lim_{x\to1^+} \zeta(x) = +\infty$ *et que* $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.

b) *démontrer que* ζ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]1, +\infty[$ *et exprimer, pour* $k \in \mathbb{N}$, $\zeta^{(k)}(x)$ *comme la somme d'une série.*

c) *Montrer que* ζ *est strictement décroissante et convexe sur* $]1, +\infty[$.

d) *Tracer sa courbe représentative.*

Exercice 44. *On rappelle que la constante d'Euler dénotée* γ *est définie par*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1).$$

a) *démontrer que les séries* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $\zeta_p(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s}$ *et* $\zeta_i(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^s}$ *converge si* $s > 1$

b) *démontrer que la série de terme générale* $\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ *converge si* $s > 0$. *On notera*

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

c) Soit $\varepsilon > 0$ *démontrer que si* $s \in [\varepsilon, +\infty[$ *et* $N \in \mathbb{N} \cap [e^{\frac{1}{\varepsilon}}, \infty[$ *alors*

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}\ln(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln(n)}{n^s}\right| \leq \frac{\ln(N+1)}{(N+1)^{\varepsilon}}.$$

d) En déduire que la fonction η *est de classe* C^1 *sur* $]0, \infty[$ *et que*

$$\eta'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^s}.$$

e) démontrer que pour $s > 1$ *on a* $\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ [7]

f) démontrer que la fonction définie par

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) dx$$

est bien définie pour $s > 0$ *et que* f *est une fonction continue sur* $]0, \infty[$.

g) Montrer que pour $s > 1$ $f(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ *et que* $f(1) = \gamma$.

h) Montrer que pour $h > 0$ *:* $\zeta(1+h) = \frac{1}{h} + \gamma + \varepsilon(h)$ *avec* $\lim_{h\to 0+} \varepsilon(h) = 0$.

i) En déduire que $\eta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

j) En déduire la valeur de $\eta'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$.

Exercice 45. *Pour* $x \in [0, \pi/2[$ *et* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *on définit*

$$u_n(x) = \frac{\sin^n(x)}{n}.$$

a) Démontrer que la série de terme général $u_n(x), n \geq 1$ *converge.*

On pose alors pour $x \in [0, \pi/2[$,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

b) Démontrer que S *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0, \pi/2[$ [8], *on citera le théorème utilisé.*

c) Démontrer que $S'(x) = \frac{\cos(x)}{1-\sin(x)}$.

d) En déduire une expression pour $S(x)$.

7. Remarquez que $\zeta_p(s) = 2^{-s}\zeta(s)$, $\zeta(s) = \zeta_p(s) + \zeta_i(s)$ et $\eta(s) = \zeta_i(s) - \zeta_p(s)$.
8. On pourra démontrer d'abord que si $\varepsilon \in]0, \pi/2[$ alors S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon[$.

Chapitre 5

Intégrales dépendant d'un paramètre.

5.1 Présentation des problémes

On va ici étudier les fonctions de la formes

$$H(x) = \int_a^b h(x,t)dt \ ou \ H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,t)dt \ ,$$

et leurs propriétés de continuité et de dérivabilité.

5.1.1

Ce genre de fonctions interviennent régulièrement en mathématique et aussi en physique.

Par exemple, lorsque $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée représentant la répartition de température sur une barre métallique infinie alors la température $T(t,x)$ de la barre au point d'abscisse x et au temps t est donnée par l'équation de la chaleur découverte par J. Fourier :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}T(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}T(t,x) = 0, & \text{sur } (t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ T(0,x) = f_0(x). \end{cases}$$

Et la solution de cette équation est donnée par

$$T(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{|x-y|^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} f_0(y)dy \ .$$

Si on veut vérifier que cette fonction est bien solution de l'équation de la chaleur, il faut savoir dériver une intégrale à paramètre.

5.1.2

Concernant la continuité des fonctions de la forme :

$$H(x) = \int_a^b h(x,t)dt$$

on sait qu'une telle fonction est continue sur un intervalle J si et seulement si pour toutes suites (x_n) de J convergente vers $x_\infty \in J$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} H(x_n) = H(x_\infty) \ .$$

C'est à dire si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b h(x_n,t)dt = \int_a^b h(x_\infty,t)dt.$$

Ce sera par exemple le cas lorsque la suite de fonction $\big(t \mapsto f_n(t) = h(x_n,t)\big)_n$ converge uniformément vers la fonction $\big(t \mapsto f_\infty(t) = h(x_\infty,t)\big)$.

5.2 Retour sur la convergence uniforme

On va démontrer le résultat suivant sur la convergence uniforme de fonctions continues sur un intervalle fermé borné.

Théorème 5.2.1. *Soient (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et f_∞ une fonction continue sur $[a,b]$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) La suite (f_n) converge uniformément vers f_∞.

ii) Pour toute suite (u_n) de l'intervalle $[a,b]$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \big(f_n(u_n) - f_\infty(u_n)\big) = 0.$$

iii) Pour toute suite convergente (u_n) de l'intervalle $[a,b]$, on a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(u_n) = f_\infty\big(\lim_{n\to\infty} u_n\big) \ .$$

Il est important de noter que l'on a ici fait l'hypothèse très forte que toutes les fonctions f_n et f_∞ sont **continues**.

Démonstration. On commence par démontrer l'implication $ii) \Rightarrow i)$:
On suppose que l'assertion ii) est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, puisque la fonction $|f_n - f_\infty|$ est continue sur l'intervalle $[a,b]$, elle y est bornée et atteint ses bornes, en particulier il y a $u_n \in [a,b]$ tel que

$$|f_n - f_\infty|(u_n) = |f_n(u_n) - f_\infty(u_n)| = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_\infty(x)|.$$

Ainsi gr,ce à l'hypothèse ii) on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_\infty(x)| = 0$$

c'est à dire que la suite (f_n) converge uniformément vers f_∞.

Démontrons maintenant l'implication $i) \Rightarrow iii)$:
Supposons donc que (f_n) converge uniformément vers f_∞.
Posons $M_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_\infty(x)|$. Soit (u_n) une suite convergente de l'intervalle $[a, b]$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

On a alors

$$|f_n(u_n)-f_\infty(\ell)| \leq |f_n(u_n)-f_\infty(u_n)|+|f_\infty(u_n)-f_\infty(\ell)| \leq M_n+|f_\infty(u_n)-f_\infty(\ell)| \ ,$$

alors par hypothèse

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = 0$$

et par continuité de f_∞ on a

$$\lim_{n\to+\infty} |f_\infty(u_n) - f_\infty(\ell)| = 0 \ .$$

Démontrons maintenant l'implication $iii) \Rightarrow ii)$:
On va raisonner par contraposition, on suppose que ii) n'est pas vraie : on considère une suite (u_n) de l'intervalle $[a, b]$ et on suppose que la suite $(w_n = f_n(u_n) - f_\infty(u_n))_n$ ne converge pas vers 0 et on va construire une suite convergente (x_n) telle que la suite $\big(f_n(x_n)\big)_n$ ne converge pas vers $f_\infty\big(\lim_{n\to+\infty} x_n\big)$. Puisque la suite (w_n) ne converge pas vers 0, il y a un $\varepsilon > 0$ et une partie infinie $J \subset \mathbb{N}$ tel que

$$j \in J \Rightarrow |w_j| \geq \varepsilon \ .$$

Gr,ce au théorème de Bolzano-Weierstrass [1], nous pouvons trouver une partie $I \subset J$ infinie tel que la suite $(u_i)_{i\in I}$ converge vers ℓ. On peut énumerer cette partie

$$I = \{i_0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_k < i_{k+1} < \ldots\}.$$

On définit alors la suite (x_n) par

$$x_n = u_{i_k} \ si \ n \in]i_{k-1}, i_k]$$

avec la convention que $i_{-1} = -1$. Il est facile [2] de vérifier que la suite $(x_n)_n$ converge vers ℓ. Cependant pour tout $n \in I$, nous avons

$$|f_n(x_n) - f_\infty(x_n)| = |f_n(u_n) - f_\infty(u_n)| \geq \varepsilon$$

1. On consultera l'appendice pour plus de précisions.
2. Faites le vous mÍme.

Et puisque

$$|f_n(u_n) - f_\infty(u_n)| \leq |f_n(u_n) - f_\infty(\ell)| + |f_\infty(u_n) - f_\infty(\ell)| \ ,$$

par continuité de f_∞ , la suite $(|f_n(x_n) - f_\infty(\ell)|)_n$ ne peut pas converger vers 0. $\square$

5.3 Continuité des intégrales à paramètres

5.3.1 Sur un segment

Théorème 5.3.1. *Soient J et $[a,b]$ des intervalles et $h : J \times [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue alors la fonction $H : J \to \mathbb{C}$ définie par*

$$H(x) = \int_a^b h(x,t)dt$$

est continue[3].

Démonstration. Soit $x_0 \in J$, on va montrer que H est continue en x_0. On considère donc (ξ_n) une suite de J et on va montrer que la suite $(H(\xi_n))_n$ converge vers $H(x_0)$. Or

$$H(\xi_n) = \int_a^b h(\xi_n,t)dt = \int_a^b f_n(t)dt \text{ avec } f_n(t) = h(\xi_n,t)$$

et

$$H(x_0) = \int_a^b h(x_0,t)dt = \int_a^b f_\infty(t)dt \text{ avec } f_\infty(t) = h(x_0,t)$$

Les fonctions f_n, f_∞ sont continues on va donc employer le critère (5.2.1,iii) pour démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f_∞.
Soit donc (t_n) une suite convergente de $[a,b]$:

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \ell.$$

Alors on a bien

$$\lim_{n\to+\infty} (\xi_n, t_n) = (x_0, \ell)$$

et donc par continuité de la fonction h en (x_0,ℓ) on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} h(\xi_n, t_n) = h(x_0, \ell)$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t_n) = f_\infty(\ell).$$

3. Remarquez bien que l'hypothèse de continuité faite sur h implique, en particulier, que pour tout $x \in J$ la fonction $t \in [a,b] \mapsto h(x,t)$ est continue et ainsi H est bien définie

On peut utiliser le critère (5.2.1,iii) et affirmer que la suite (f_n) converge uniformément vers f_∞. En application du théorème (II.3.1), on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f_\infty(t)dt$$

C'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} H(\xi_n) = H(x_0).$$

On a donc démontré que H est continue en x_0. $\square$

5.3.2 Intégrales généralisées

Théorème 5.3.2. *Soient J et I des intervalles et $h : J \times I \to \mathbb{C}$ une fonction continue . On suppose qu'il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}_+$ continue telle que*

i) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I g(t)dt$ converge .

ii) $\forall (x,t) \in J \times I$, $|h(x,t)| \leq g(t)$,

alors la fonction $H : J \to \mathbb{C}$ définie par

$$H(x) = \int_I h(x,t)dt$$

est continue [4].

Démonstration. On ne démontre ce théorème que dans le cas oˇ l'intervalle $I = [a,\omega[$ oˇ $\omega \in]a,+\infty]$. On considère une suite croissante (b_n) qui converge vers ω. Et on définit la fonction $H_n : J \to \mathbb{C}$ définie par

$$H_n(x) = \int_a^{b_n} h(x,t)dt\,.$$

D'après le théorème précédent (5.3.1), la fonction H_n est continue sur J. De plus pour $x \in J$ on a :

$$\begin{aligned}
|H(x) - H_n(x)| &= \left|\int_a^\omega h(x,t)dt - \int_a^{b_n} h(x,t)dt\right| \\
&= \left|\int_{b_n}^\omega h(x,t)dt\right| \\
&\leq \int_{b_n}^\omega |h(x,t)|dt \\
&\leq \int_{b_n}^\omega g(t)dt\ .
\end{aligned}$$

4. Notez que les hypothèses faites implique que l'intégrale généralisée $H(x) = \int_I h(x,t)dt$ converge absolument.

Ceci étant valable pour tout $x \in J$, nous obtenons :

$$\sup_{x \in J} |H(x) - H_n(x)| \leq \int_{b_n}^{\omega} g(t)dt \ .$$

Et puisque $\lim_{n \to +\infty} \int_{b_n}^{\omega} g(t)dt = 0$ [5], nous en déduisons que la suite de fonctions continues (H_n) converge uniformément vers H, la fonction H est donc continue.

□

5.4 Dérivabilité des intégrales à paramètres

5.4.1 Sur un segment

Théorème 5.4.1. *Soient J et $[a, b]$ des intervalles et $h : J \times [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que la dérivée partielle de h par rapport à x existe* [6] *et que la fonction $\dfrac{\partial h}{\partial x} : J \times [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue alors la fonction $H : J \to \mathbb{C}$ définie par*

$$H(x) = \int_a^b h(x, t)dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$H'(x) = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)dt \ .$$

Démonstration. On démontre que si $x \in J$ alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{H(x+h) - H(x)}{h} = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)dt \ .$$

Ceci montrera que la fonction H est dérivable en x et que

$$H'(x) = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)dt \ .$$

Alors en application du théorème (5.3.1), on saura que la fonction H' est continue et donc que H est de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit donc (h_n) une suite de réels non nuls tel que pour tout n : $x + h_n \in J$ et démontrons que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{H(x+h_n) - H(x)}{h_n} = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)dt \ .$$

Or

$$\frac{H(x+h_n) - H(x)}{h_n} = \int_a^b \frac{h(x+h_n, t) - h(x, t)}{h_n} dt = \int_a^b D_n(t)dt$$

5. Notez que $\int_{b_n}^{\omega} g(t)dt = \int_a^{\omega} g(t)dt - \int_a^{b_n} g(t)dt$.
6. C'est à dire pour tout $t \in [a, b]$, la fonction $x \in J \mapsto h(x, t)$ est dérivable.

o˘

$$D_n(t) = \frac{h(x+h_n,t)-h(x,t)}{h_n}.$$

Posons $D_\infty(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$. Les fonctions D_n et D_∞ sont continues sur le segment $[a,b]$ Comme précédement, on va montrer à l'aide du (5.2.1,iii) que la suite (D_n) converge uniformément vers D_∞.
Soit donc (t_n) une suite convergente de $[a,b]$:

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \ell.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$: La fonction $\theta \mapsto h(x+\theta h_n, t_n)$ est dérivable sur l'intervalle $[0,1]$, et sa dérivée est la fonction $\theta \mapsto h_n \frac{\partial h}{\partial x}(x+\theta h_n, t_n)$. Gr,ce à l'égalité des accroissements finis, nous en déduisons l'existence d'un réel $\theta_n \in]0,1[$ tel que :

$$h(x+h_n,t_n) - h(x,t_n) = h_n \frac{\partial h}{\partial x}(x+\theta_n h_n, t_n).$$

Soit

$$D_n(t_n) = \frac{h(x+h_n,t_n)-h(x,t_n)}{h_n} = \frac{\partial h}{\partial x}(x+\theta_n h_n, t_n).$$

Or puisque $\theta_n \in]0,1[$, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} (x+\theta_n h_n, t_n) = (x,\ell)$$

et par continuité de la fonction $\frac{\partial h}{\partial x}$ nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x+\theta_n h_n, t_n) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,\ell)$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} D_n(t_n) = D_\infty(\ell).$$

On peut utiliser le critère (5.2.1,iii) et affirmer que la suite (D_n) converge uniformément vers D_∞. En application du théorème (II.3.1), on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b D_n(t)dt = \int_a^b D_\infty(t)dt$$

C'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{H(x+h_n)-H(x)}{h_n} = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt\ .$$

Ceci permet d'affirmer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{H(x+h)-H(x)}{h} = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt\ .$$

□

5.4.2 Intégrales généralisées

Théorème 5.4.2. *Soient J et I des intervalles et $h : J \times I \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que la dérivée partielle de h par rapport à x existe et que la fonction $\dfrac{\partial h}{\partial x} : J \times I \to \mathbb{C}$ est continue. On suppose de plus qu'il existe des fonctions g_0, g_1 $I \to \mathbb{R}_+$ continue telle que*

i) Les intégrales généralisées $\displaystyle\int_I g_0(t)dt$ et $\displaystyle\int_I g_1(t)dt$ convergent.

ii) $\forall (x,t) \in J \times I$, $|h(x,t)| \leq g_0(t)$,

iii) $\forall (x,t) \in J \times I$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq g_1(t)$,

Alors la fonction $H : J \to \mathbb{C}$ définie par

$$H(x) = \int_I h(x,t)dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$H'(x) = \int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt \ .$$

Démonstration. On ne démontre ce théorème que dans le cas oˇ l'intervalle $I = [a, \omega[$ oˇ $\omega \in]a, +\infty]$. On considère une suite croissante (b_n) qui converge vers ω. Et on définit la fonction $H_n : J \to \mathbb{C}$ par

$$H_n(x) = \int_a^{b_n} h(x,t)dt \, .$$

D'après le théorème précédent (5.4.1), la fonction H_n est $\mathcal{C}^1$ sur J et pour $x \in J$:

$$H_n'(x) = \int_a^{b_n} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt \, .$$

Posons

$$G(x) = \int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt \ .$$

D'après le théorème (5.3.2), la fonction G est continue sur J. De plus le mÍme raisonement que précédement montre que

$$\sup_{x \in J} |H(x) - H_n(x)| \leq \int_{b_n}^{\omega} g_0(t)dt$$

$$\sup_{x \in J} |G(x) - H_n'(x)| \leq \int_{b_n}^{\omega} g_1(t)dt$$

Ainsi la suite de fonctions (H_n) converge uniformément vers H et la suite de fonctions (H_n') converge uniformément vers G en appliquant le corollaire II.3.12, on en déduit que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$H' = G.$$

Ce qui est exactement ce qu'il fallait démontrer. □

5.5 Un exemple

On va démontrer que la fonction $H\ :\ [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par

$$H(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt$$

est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Soit $\varepsilon>0$ et démontrons d'abord que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $[\varepsilon,+\infty[$. Posons $h(x,t)=\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}$. La fonction définie par

$$u(0)=1\ ,\ u(t)=\frac{\sin(t)}{t}\ \text{si}\ t\neq 0$$

est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, on sait de plus que Pour tout $t\in\mathbb{R}$: $|u(t)|\leq 1$. On en déduit que la fonction h est continue sur $[\varepsilon,+\infty[\times[0,+\infty[$ [7].
La dérivée partielle de h par rapport x existe et vaut :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)=-\sin(t)e^{-xt}.$$

Posons $g_\varepsilon(t)=e^{-\varepsilon t}$. On sait que g_ε est continue et que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty}g_\varepsilon(t)dt$ converge. Alors on a pour tout $(x,t)\in[\varepsilon,+\infty[\times[0,+\infty[$:

$$|h(x,t)|=\left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right|\leq e^{-xt}\leq e^{-\varepsilon t}=g_\varepsilon(t)\ ;$$

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|=\left|\sin(t)e^{-xt}\right|\leq e^{-\varepsilon t}=g_\varepsilon(t)\ .$$

Nous en déduisons que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon,+\infty[$ et que pour $x\geq\varepsilon$:

$$H'(x)=\int_0^{+\infty}-\sin(t)e^{-xt}dt\ ;$$

ceci étant valide pour tout $\varepsilon>0$, on en déduit que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que pour $x>0$:

$$H'(x)=\int_0^{+\infty}-\sin(t)e^{-xt}dt\ .$$

Or

$$\sin(t)e^{-xt}=\mathcal{I}\mathrm{m}\left(e^{(i-x)t}\right)=\frac{d}{dt}\mathcal{I}\mathrm{m}\left(\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right)=\frac{d}{dt}\mathcal{I}\mathrm{m}\left(\frac{e^{(i-x)t}(-i-x)}{1+x^2}\right)$$

7. En effet , h est le produit de deux fonctions :

$$h(x,t)=u(t)\times g(x,t)$$

o˘ $g=\exp\circ p$ avec $p(x,t)=-xt$. La fonction exp est continue et la fonction p est une fonction continue car polynomiale donc g est une fonction continue. Il est aussi facile de vérifier que la continuité de u sur $\mathbb{R}$ entraine la continuité de $(x,t)\mapsto u(t)$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Et puisque

$$\mathcal{I}\mathrm{m}\left(e^{(i-x)t}(-i-x)\right) = e^{-xt}\left(-\cos(t) - x\sin(t)\right)$$

on obtient

$$\sin(t)e^{-xt} = -\frac{d}{dt}\left(e^{-xt}\frac{\cos(t)+x\sin(t)}{1+x^2}\right). \tag{5.5.1}$$

$$\begin{aligned} H'(x) &= \int_0^{+\infty} -\sin(t)e^{-xt}dt \\ &= \lim_{A\to+\infty}\left[e^{-xt}\frac{\cos(t)+x\sin(t)}{1+x^2}\right]_0^A \\ &= -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Ainsi il existe une constante c telle que pour tout $x > 0$:

$$H(x) = c - \arctan(x).$$

Or pour $x > 0$, nous avons l'estimée

$$|H(x)| \leq \int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| e^{-xt}dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} H(x) = 0$$

et on en déduit que $c = \pi/2$, c'est à dire que pour tout $x > 0$, nous avons :

$$H(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x). \tag{5.5.2}$$

Il nous reste à démontrer que H est continue sur $[0, +\infty[$, c'est à dire que H est continue en 0 c'est à dire que

$$\lim_{x\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt = H(0) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt.$$

On pose pour cela

$$H_0(t) = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt \ et\ H_1(t) = \int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt.$$

Il est facile de démontrer que la fonction H_0 est continue sur $[0, +\infty[$ en appliquant le théorème (5.3.1).
Gr,ce au calcul fait dans 5.5.1, nous pouvons intégrer par parties pour exprimer $H_1(x)$ autrement et obtenir :

$$H_1(x) = \left(e^{-x}\frac{\cos(1)+x\sin(1)}{1+x^2}\right) - \int_1^{+\infty}\left(e^{-xt}\frac{\cos(t)+x\sin(t)}{1+x^2}\frac{1}{t^2}\right)dt.$$

La fonction $f(x,t) = e^{-xt}\frac{\cos(t)+x\sin(t)}{1+x^2}\frac{1}{t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[\times[1,+\infty[$ de plus [8] on a pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[\times[1,+\infty[$

$$|f(x,t)| = \left|e^{-xt}\frac{\cos(t)+x\sin(t)}{1+x^2}\frac{1}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}.$$

La fonction $t \in [1,+\infty[\mapsto 1/t^2$ est continue et l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$$

converge, on peut en déduire que la fonction

$$x \in [0,+\infty[\mapsto -\int_1^{+\infty}\left(e^{-xt}\frac{\cos(t)+x\sin(t)}{1+x^2}\frac{1}{t^2}\right)dt$$

est continue. Ainsi H est une somme de fonctions continues sur $[0,+\infty[$, c'est donc une fonction continue sur $[0,+\infty[$.

Ceci et l'expression (5.5.2) trouvée pour H permette de démontrer l'égalité

$$H(0) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

5.6 Dérivées d'ordre supérieure

Une récurrence facile permet de démontrer les deux résultats suivants :

5.6.1 Sur un segment

Théorème 5.6.1. *Soient J et $[a,b]$ des intervalles, $k \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ et $h : J \times [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que toutes les dérivées partielles de h par rapport à x jusqu'à l'ordre k existent et que pour tout $\ell \in \{1,\ldots,k\}$, la fonction $\dfrac{\partial^\ell h}{\partial x^\ell} : J\times[a,b] \to \mathbb{C}$ est continue. Alors la fonction $H : J \to \mathbb{C}$ définie par*

$$H(x) = \int_a^b h(x,t)dt$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ et pour tout $\ell \in \{1,\ldots,k\}$:

$$H^{(\ell)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^\ell h}{\partial x^\ell}(x,t)dt\ .$$

8. On remarquera pour cela que l'on a toujours : : $|\cos(t)+x\sin(t)| \leq \sqrt{1+x^2}$.

5.6.2 Intégrales généralisées

Théorème 5.6.2. *Soient J et I des intervalles et $h : J \times I \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que toutes les dérivées partielles de h par rapport à x jusqu'à l'ordre k existent et que pour tout $\ell \in \{1, \ldots, k\}$, la fonction $\dfrac{\partial^\ell h}{\partial x^\ell} : J \times [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue. On suppose de plus qu'il existe des fonctions $g_0, g_1, \ldots g_k : I \to \mathbb{R}_+$ continues telle que*

i) Les intégrales généralisées $\int_I g_0(t)dt$, $\int_I g_1(t)dt, \ldots,$ $\int_I g_k(t)dt$ convergent .

ii) $\forall \ell \in \{0, 1, \ldots, k\}, \forall (x, t) \in J \times I$, $\left|\dfrac{\partial^\ell h}{\partial x^\ell}(x, t)\right| \leq g_\ell(t)$,

Alors la fonction $H : J \to \mathbb{C}$ définie par

$$H(x) = \int_I h(x, t)dt$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ et pour tout $\ell \in \{1, \ldots, k\}$:

$$H^{(\ell)}(x) = \int_I \frac{\partial^\ell h}{\partial x^\ell}(x, t)dt \ .$$

5.7 Le théorème de Fubini

5.7.1 Le théorème

Vous en verrez en L3, une version plus élaborée et très simple [9] :

Théorème 5.7.1. *Soit $f : [c, d] \times [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue alors :*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, t)dt\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t)dx\right) dt.$$

Démonstration. On introduit les fonctions E_1 et E_2 définie sur $[c, d]$ par

$$E_1(x) = \int_c^x \left(\int_a^b f(\xi, t)dt\right) d\xi$$

$$E_2(x) = \int_a^b \left(\int_c^x f(\xi, t)d\xi\right) dt \ .$$

D'après le théorème 5.3.1, on sait que la fonction

$$x \in [c, d] \mapsto \int_a^b f(x, t)dt$$

9. Mais nécéssitant des concepts plus difficiles.

est continue, et donc E_1 est une primitive de cette fonction on en déduit que E_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout $x \in [c,d]$ on a :

$$E_1'(x) = \int_a^b f(x,t)dt \ .$$

On introduit ensuite la fonction F définie sur $[c,d] \times [a,b]$ par

$$F(x,t) = \int_c^x f(\xi,t)d\xi.$$

Démontrons que cette fonction est continue. La fonction f étant continue sur le produit d'intervalles fermés bornés $[c,d] \times [a,b]$, elle y est donc bornée :posons

$$M = \sup_{(x,t)\in[c,d]\times[a,b]} |f(x,t)| \, .$$

On obtient donc pour $(x,t) \in [c,d] \times [a,b]$ et $(x',t') \in [c,d] \times [a,b]$:

$$|F(x,t) - F(x',t')| \leq |F(x,t) - F(x',t)| + |F(x',t) - F(x',t')|$$

Or

$$|F(x,t) - F(x',t)| = \left|\int_{x'}^x f(\xi,t)dt\right| \leq \left|\int_{x'}^x |f(\xi,t)|dt\right| \leq M\,|x'-x|.$$

On sait gr,ce au théorème (5.3.1) que si x' est fixé alors la fonction $t \mapsto \int_c^{x'} f(\xi,t)d\xi$ est continue. Ainsi si (x_n,t_n) est une suite de $[c,d]\times[a,b]$ convergent vers (x_∞,t_∞) alors

$$|F(x_n,t_n) - F(x_\infty,t_\infty)| \leq M|x_n - x_\infty| + |F(x_\infty,t_n) - F(x_\infty,t_\infty)|$$

Par continuité de la fonction $t \mapsto F(x_\infty,t) = \int_c^{x_\infty} f(\xi,t)d\xi$, on en déduit gr,ce au théorème des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty} |F(x_n,t_n) - F(x_\infty,t_\infty)| = 0 \ .$$

On a donc démontré que F est continue sur $[c,d] \times [a,b]$.
De plus la dérivée partielle de F par rapport à x existe et vaut f elle est donc continue. Avec le théorème 5.4.1, on peut donc affirmer que la fonction E_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$E_2'(x) = \int_a^b f(x,t)dt.$$

Les fonctions E_1 et E_2 sont donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[c,d]$, elles valent toutes les deux 0 pour $x = c$ et leurs dérivées coincidents, on en conclut donc que ces deux fonctions sont égales :

$$\forall x \in [c,d]\,,\ E_1(x) = E_2(x).$$

Cette égalité pour $x = d$ est exactement le théorème de Fubini. □

5.7.2 Une application

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,t) = e^{-t(1+x^2)}.$$

C'est un fonction continue ainsi on en déduit, gr,ce au théorème de Fubini, que pour tout $R > 0$:

$$I(R) = \int_0^R \left(\int_0^R f(x,t)dt \right) dx = \int_0^R \left(\int_0^R f(x,t)dx \right) dt.$$

Exprimons d'abord $\int_0^R \left(\int_0^R f(x,t)dt \right) dx$:

$$\begin{aligned}
\int_0^R \left(\int_0^R e^{-t(1+x^2)}dt \right) dx &= \int_0^R \left[-\frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2} \right]_0^R dx \\
&= \int_0^R \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{e^{-R(1+x^2)}}{1+x^2} \right) dx \\
&= \int_0^R \frac{1}{1+x^2}dx - e^{-R} \int_0^R \frac{e^{-Rx^2}}{1+x^2}dx \\
&= \arctan(R) - e^{-R} \int_0^R \frac{e^{-Rx^2}}{1+x^2}dx
\end{aligned}$$

On sait que

$$\lim_{R \to +\infty} \arctan(R) = \frac{\pi}{2}$$

et en majorant e^{-Rx^2} par 1, on obtient

$$0 \leq e^{-R} \int_0^R \frac{e^{-Rx^2}}{1+x^2}dx \leq \frac{\pi}{2} e^{-R}.$$

D'o˘ finallement

$$\lim_{R \to +\infty} I(R) = \frac{\pi}{2}.$$

Puis on exprime $\int_0^R \left(\int_0^R f(x,t)dx \right) dt$:

$$\begin{aligned}
\int_0^R e^{-t(1+x^2)}dx &= e^{-t} \int_0^R e^{-tx^2}dx \\
&= \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \int_0^{R\sqrt{t}} e^{-u^2}du \\
&= \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du - \int_{R\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-u^2}du \right)
\end{aligned}$$

O˘ nous avons fait entre la première et deuxième ligne, le changement de variables : $u = \sqrt{t}x$. Nous avons donc obtenu :

$$\int_0^R \left(\int_0^R f(x,t)dx \right) dt = \int_0^R \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} J dt - \int_0^R \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} g(R\sqrt{t})dt \ .$$

Avec

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \ et \ g(\tau) = \int_\tau^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

Nous pouvons faire deux estimations de la fonction g : la première étant facile

$$\tau \geq 0 \Rightarrow 0 \leq g(\tau) \leq g(0) = J.$$

La seconde s'obtient en intégrant par parties :

$$g(\tau) = \int_\tau^{+\infty} \frac{1}{2u} 2ue^{-u^2} du = \frac{1}{2\tau} e^{-\tau^2} - \int_\tau^{+\infty} \frac{1}{2u^2} e^{-u^2} du \leq \frac{1}{2\tau} e^{-\tau^2} \leq \frac{1}{2\tau} \ .$$

On obtient alors pour tout $\varepsilon \in]0, R[$:

$$\begin{aligned}
\int_0^R \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} g(R\sqrt{t})dt &= \int_0^\varepsilon \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} g(R\sqrt{t})dt + \int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} g(R\sqrt{t})dt \\
&\leq \int_0^\varepsilon \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} J dt + \int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{1}{2R\sqrt{t}} dt \\
&\leq \int_0^\varepsilon \frac{1}{\sqrt{t}} J dt + \int_\varepsilon^R \frac{e^{-t}}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{2R\sqrt{\varepsilon}} dt \\
&\leq 2J\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{2R\varepsilon} \int_\varepsilon^R e^{-t} dt \\
&\leq 2J\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{2R\varepsilon} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\
&\leq 2J\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{2R\varepsilon}
\end{aligned}$$

Pour $R \geq 1$, nous prenons $\varepsilon = 1/\sqrt{R}$, nous obtenons

$$\int_0^R \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} g(R\sqrt{t})dt \leq 2J\sqrt{\frac{1}{R}} + \frac{1}{2\sqrt{R}}.$$

Cette quantité tend donc vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$ [10]. On en déduit donc que

$$\lim_{R\to+\infty} I(R) = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} J dt = J \int_0^{+\infty} \frac{2e^{-t}}{2\sqrt{t}} J dt = J \int_0^{+\infty} 2e^{-u^2} du \ ,$$

10. Pour démontrer ce fait, on aurait aussi pu utiliser le petit théorème de convergence dominée.

o˘ on a utilisé le changement de variables $u = \sqrt{t}$. Or $J = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$, donc en comparant nos deux calculs nous obtenons :

$$\lim_{R \to +\infty} I(R) = \frac{\pi}{2} = 2 \left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \right)^2 .$$

On a donc démontré que

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

5.8 Appendice : sous-suites et théorème de Bolzano-Weierstrass.

5.8.1 Sous-suites et convergence

Définition 5.8.1. *Lorsque (u_n) est une suite de nombres complexes, on appelle sous-suite de cette suite une suite de la forme*

$$(u_{n_k})_k$$

o˘ $k \in \mathbb{N} \mapsto n_k \in \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante .

Une définition équivalente est celle ci :
une sous suite d'une suite (u_n) de nombres complexes, est une suite de la forme $(u_i)_{i \in I}$ o˘ $I \subset \mathbb{N}$ est une partie infinie.

Puisque l'on peut énumérer une partie infinie de $I \subset \mathbb{N}$:

$$I = \{n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots\}$$

o˘ n_k est le $(k+1)^{\text{ieme}}$ élément de I, ces définitions sont bien équivalentes.

La définition de sous suite convergente est claire : Une sous suite $(u_{n_k})_k$ d'une suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N}, (k \geq k_0 \Rightarrow |u_{n_k} - \ell| < \varepsilon.$$

On peut vérifier que si I est une partie infinie de $\mathbb{N}$, la sous suite $(u_i)_{i \in I}$ d'une suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0, \text{la partie } \{i \in I, |u_{n_k} - \ell| \geq \varepsilon\} \text{ est finie.}$$

5.8.2 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Gr,ce à ce qui a été rappelé précédement, nous allons rappeler la preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass :

Théorème 5.8.2. *Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de nombres réels alors on peut en extraire une sous-suite convergente : il y a une suite strictement croissante (n_k) et un réel ℓ tels que*

$$\lim_{k \to +\infty} u_{n_k} = \ell \ .$$

Démonstration. Soit donc $(u_n)_n$ une suite bornée de nombres réels. Il y a donc un entier naturel N tel que pour tout entier n :

$$|u_n| < 2^N \ .$$

On va construire une suite $(A_n)_n$ de partie infinie de $\mathbb{N}$ et une suite d'entier $(k_n)_n$ telle que

— pour tout entier n : $A_{n+1} \subset A_n$
— Pour tout entier n et pour tout entier $m \in A_n$: $\frac{k_n}{2^n} \leq u_m < \frac{k_n+1}{2^n}$
— Pour tout entier n, $\frac{k_n}{2^n} \leq \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} < \frac{k_n+1}{2^n}$

Cette construction se fait par récurence sur n. Pour $n = 0$: on découpe l'intervalle $[-2^N, 2^N[$ en 2^{N+1} intervalles de longueurs 1 :

$$[-2^N, 2^N[= \bigcup_{k=-2^N}^{k=2^N-1} [k, k+1[$$

Puisque la suite $(u_n)_n$ est infini, il existe forcément un entier k_0 telle qu'il existe une infinité d'entier m tel que $u_m \in [k_0, k_0+1[$, on pose alors

$$A_0 = \{m \in \mathbb{N}\, ,\, u_m \in [k_0, k_0+1[\,\} \, .$$

Supposons maintenant avoir construit $A_0, \ldots, A_n$ et $k_0, k_1, \ldots, k_n$ et construisons A_{n+1} et k_{n+1}.
On découpe en deux l'intervalle

$$\left[\frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n+1}{2^n}\right[= \left[\frac{2k_n}{2^{n+1}}, \frac{2k_n+1}{2^{n+1}}\right[\cup \left[\frac{2k_n+1}{2^{n+1}}, \frac{2k_n+2}{2^{n+1}}\right[$$

Puisque A_n est infini et que pour tout entier $m \in A_n$:

$$u_m \in \left[\frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n+1}{2^n}\right[$$

Au moins l'un des deux cas suivant se produit :

— Il y a une infinité d'entier $m \in A_n$ tel que $u_m \in \left[\frac{2k_n}{2^{n+1}}, \frac{2k_n+1}{2^{n+1}}\right[$
— Il y a une infinité d'entier $m \in A_n$ tel que $u_m \in \left[\frac{2k_n+1}{2^{n+1}}, \frac{2k_n+2}{2^{n+1}}\right[$.

Dans le premier cas on pose $k_{n+1} = 2k_n$ et

$$A_{n+1} = \left\{ m \in A_n \, , \, u_m \in \left[\frac{2k_n}{2^{n+1}}, \frac{2k_n+1}{2^{n+1}}\right[\ \right\} .$$

et si le premier cas ne se produit pas on pose $k_{n+1} = 2k_n + 1$ et

$$A_{n+1} = \left\{ m \in A_n \, , \, u_m \in \left[\frac{2k_n+1}{2^{n+1}}, \frac{2k_n+2}{2^{n+1}}\right[\ \right\} .$$

On aura alors par construction : $A_{n+1} \subset A_n$ et pour tout $m \in A_{n+1}$:

$$u_m \in \left[\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}}, \frac{k_{n+1}+1}{2^{n+1}}\right[\ .$$

Posons alors $x_n = \frac{k_n}{2^n}$ on sait que cette suite est croissante et majorée par 2^N, elle est donc convergente :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \ .$$

Pour chaque entier n, la partie A_n est infinie. En énumérant A_n par ordre croissant, on trouve son n^{ieme} élément $m_n \in A_n$: i.e. l'ensemble $A_n \cap [0, m_n]$ a n éléments. Puisque $A_{n+1} \subset A_n$ on a forcément $m_{n+1} > m_n$ et pour tout entier n :

$$x_n \leq u_{m_n} \leq x_n + \frac{1}{2^n}.$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_{m_n} = \lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$$

on a ainsi extrait une sous suite $(u_{m_n})_n$ convergente de la suite bornée (u_n).

$\square$

Chapitre 6

Exercices sur les intégrales à paramètres

Exercice 46 (*). *Soit F la fonction définie par : $F(x) = \int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t}dt$.*

Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $F'(x)$.

Exercice 47. *Pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times]0,1[$, on pose $f(x,t) = playstyle \frac{e^{x \ln t} - 1}{\ln t}$.*
Soit F la fonction définie par : $F(x) = playstyle \int_0^1 f(x,t)dt$.

a) Déterminer $playstyle \lim_{t \to 0^+} f(x,t)$ et $\lim_{t \to 1^-} f(x,t)$; en déduire que F est définie sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$; donner une expression de $F'(x)$ et en déduire $F(x)$.

Exercice 48 (*). *Soit F la fonction définie par : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^4}dt$.*

Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 49 (*). *1. Soient F et G les fonctions définies par :*

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt.$$

a) Montrer que F et G sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F^{'}(x) + (G^2)^{'}(x) = 0$.

c) Calculer $F(0)$ et déterminer $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

d) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

2. *Soit H la fonction définie par :* $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$.
   a) *Montrer que H est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.*
   b) *Montrer que H est solution d'une équation différentielle, puis calculer $H(x)$.*

Exercice 50. *Soit F la fonction définie par :* $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{t}dt$.

a) *Montrer que F est définie sur $]0, +\infty[$.*

b) *Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$, puis calculer $F'(x)$.*

c) *En déduire que, pour tout $x > 0$, $F(x) = \ln x$.*

Exercice 51. *Soit F la fonction définie par :* $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2}e^{-t}dt$.

a) *Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.*

b) *Montrer que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $F''(x)$.*

c) *En déduire une expression explicite de $F(x)$.*

Exercice 52 (*). *Démontrer que la fonction H définie sur $]0, 1[$ par*

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$$

est continue. On montrera pour cela que H est continue sur tout intervalle de la forme $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, où $\varepsilon \in]0, 1/2[$. Et on énoncera le théorème utilisé.

Exercice 53. *Soit*

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} \text{ et } B = \int_0^{+\infty} \frac{t^2dt}{1+t^4}$$

a) *Montrer que $A = B$ et que $A + B = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.*
Pour prouver la seconde identité on pourra faire le changement de variables $u = t - t^{-1}$, et ensuite calculer $u^2 + 2$.

b) *Sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}/2$, donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt$ lorsque $x > 0$.*
Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{t^2+i}dt.$$

c) *Montrer que $F(0) = B - iA$.*

d) *Montrer que F est continue sur $[0, \infty[$ et C^1 sur $]0, \infty[$.*

e) En déduire une équation différentielle vérifiée par F et montrer que

$$e^{-ix}F(x) - F(0) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^x \frac{e^{-iu}}{\sqrt{u}}du.$$

f) Que vaut $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et en déduire les valeurs des intégrales généralisées :

$$\int_0^{+\infty} \sin(v^2)dv = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \sin(v^2)dv \text{ et } \int_0^{+\infty}\cos(v^2)dv = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \cos(v^2)dv.$$

Exercice 54. *Soit F la fonction définie par : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$.*

a) Montrer que F est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que, sur cet intervalle, F est solution de l'équation différentielle : $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.

c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

d) Soit l'équation différentielle : $(E) \quad y'' + y = \dfrac{1}{x}$, $x \in]0,+\infty[$.

Montrer que $y(x) = -\cos x \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt + \sin x \int_1^x \frac{\cos t}{t}dt$ est solution particulière de (E). En déduire toutes les solutions de (E).

e) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$ sont convergentes.

f) Montrer qu'il existe une unique solution de (E) ayant une limite finie en $+\infty$.

g) En déduire que pour tout $x > 0$, on a :

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}dt.$$

h) Soient les fonctions u et v définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$u(x) = \int_0^1 \Big(\frac{\sin t}{t} - \frac{\sin t}{t+x}\Big)dt \quad \text{et} \quad v(x) = \int_1^{+\infty}\Big(\frac{\sin t}{t} - \frac{\sin t}{t+x}\Big)dt.$$

Montrer que $0 \le u(x) \le x(\ln(x+1) - \ln(x))$ et que v tend vers 0 quand x tend vers 0.

i) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 55. *On rappelle que $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et donc que pour $x > 0$, on a*

$$\frac{x}{\sinh(x)} = \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = \frac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2xe^{-(2n+1)x}.$$

Soit g $:]0,\infty[\to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par

$$g(x) = \frac{x}{\sinh(x)}$$

a) *Démontrer que l'on a la formule*

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2xe^{-(2n+1)x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$$

On énoncera notamment le théorème utilisé.

On étudie ici la fonction h *définie sur* $[0, +\infty[$ *par*

$$h(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan\left(\sinh(x)\sin(t)\right) dt$$

b) *Montrer que* h *et une fonction continue sur* $[0, +\infty[$.

c) *Montrer que pour* $x > 0$*, on a*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cosh(x)\sin(t)}{\cosh^2(x) - (\sinh(x)\cos(t))^2} dt = \int_0^1 \frac{\cosh(x)}{\cosh^2(x) - (\sinh(x)\sigma)^2} d\sigma = \frac{x}{\sinh(x)}$$

d) *Démontrer que*

$$\frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\sinh(x)\sin(t)\right) = \frac{\cosh(x)\sin(t)}{1 + (\sinh(x)\sin(t))^2} = \frac{\cosh(x)\sin(t)}{\cosh^2(x) - (\sinh(x)\cos(t))^2}$$

e) *Montrer que* h *et une fonction* C^1 *sur* $[0, +\infty[$ *et que pour* $x > 0$*, on a*

$$h'(x) = \frac{x}{\sinh(x)}.$$

f) *En déduire que*

$$h(x) = \int_0^x \frac{u}{\sinh(u)} du.$$

g) *Soit* $a \in]0, \pi/2]$*, démontrer que pour tout* $t \in [a, \pi/2]$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sinh(n)\sin(t)\right) \leq \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sinh(n)\sin(a)\right).$$

h) *Démontrer que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan\left(\sinh(n)\sin(t)\right) dt = \frac{\pi^2}{4}.$$

Indication : On considèrera cette intégrale comme une intégrale généralisée sur $]0, \pi/2]$*, on énoncera et justifiera le recours au théorème de passage à la limite dans les intégrales généralisées.*

i) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{u}{\sinh(u)} du = \frac{\pi^2}{4}$$

Conclusion *on en déduit que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

et donc que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

soit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 56. *a) Pourquoi la fonction f définie sur $]-1,1[$ par*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est intégrable sur $]-1,1[$.

b) Montrer que la fonction J définie sur $\mathbb{R}$ par

$$J(t) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

est de classe C^2.

c) Montrer l'on a les égalités :

$$t\left(J''(t) + J(t)\right) = t \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} e^{ixt} dx = -i \int_{-1}^{1} \frac{x e^{ixt}}{\sqrt{1-x^2}} dx \ .$$

d) Montrer que J vérifie l'équation différentielle :

$$tJ''(t) + J'(t) + tJ(t) = 0$$

e) On rappelle que pour $\zeta \in \mathbb{C}$ on a

$$e^{\zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!}.$$

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$J(t) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l a_l \frac{t^{2l}}{(2l)!}.$$

où

$$a_l = \int_{-1}^{1} \frac{x^{2l}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

f) Pourquoi a-t-on : $a_l = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin(x))^{2l}\, dx$.

g) A l'aide de la formule $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, *démontrer que*

$$a_l = \pi \frac{(2l)!}{4^l (l!)^2}.$$

Exercice 57. *a) Soit* $x \in]0, +\infty[$, *démontrer que*

$$\frac{\ln(1 + x^2t^2)}{1 + t^2} \simeq_{t \to +\infty} \frac{2\ln(t)}{1 + t^2}$$

b) Soit $x \geq 0$, *démontrer que l'intégrale généralisée*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^2t^2)}{1 + t^2} dt$$

est absolument convergente.
On définit alors la fonction $H \ : \ [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *par*

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^2t^2)}{1 + t^2} dt.$$

c) Soient $R, \varepsilon > 0$ *avec* $R > \varepsilon$, *démontrer que la fonction* H *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'intervalle* $[\varepsilon, R]$ *; on énoncera le théorème utilisé.*

d) Pour $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, *calculer* $H'(x)$.
Indication : On utilisera le fait que pour $x \neq 1$,

$$\frac{t^2}{(1 + x^2t^2)(1 + t^2)} = \frac{1}{x^2 - 1} \left(\frac{1}{1 + t^2} - \frac{1}{1 + x^2t^2} \right)$$

et on trouvera $H'(x) = \pi \frac{1}{x+1}$.

e) En déduire la valeur de $H'(1)$.

f) En déduire la valeur de $H(x)$.

Exercice 58. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $a > 1$. *On notera* b *la plus petite solution de l'équation* $z^2 - 2az + 1 = 0$ *; on remarque en passant que l'autre solution de cette équation est* $1/b$.

a) Calculer b.

b) On considère l'application $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *définie par*

$$f(x) = \frac{1}{a - \cos(2\pi x)}.$$

On a $f(x) = g(e^{i2\pi x})$ *où* g *est la fraction rationnelle*

$$g(z) = -\frac{2\,z}{z^2 - 2az + 1} = -\frac{2\,z}{(z-b)(z-1/b)}.$$

Décomposer g *en éléments simples et montrer que dans l'anneau* $\{z \in \mathbb{C},\ b < |z| < 1/b\}$, *nous avons*

$$g(z) = -\frac{2b}{b^2-1}\left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} b^k \left(z^k + z^{-k}\right)\right].$$

c) En déduire que

$$f(x) = -\frac{2b}{b^2-1}\left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2b^k \cos(2k\pi x)\right]$$

d) Soit $k \in \mathbb{N}$, *calculer* $\displaystyle\int_0^1 \cos(2k\pi x)dx$.

e) En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{1}{a - \cos(2\pi x)} dx$$

et exprimer cette intégrale en fonction de a.

f) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(a - \cos(2\pi x))^2} dx$ [1]

1. Pensez ‡ dériver en a l'expression obtenue, pourquoi est ce valide ?

Chapitre 7

Séries entières

On étudie ici les séries de la forme

$$\sum a_n z^n.$$

Ces séries apparaissent dans de nombreux domaines des mathématiques : combinatoires, probabilités, équations différentielles....

7.1 Introduction aux séries entières

7.1.1 Définition

Une *série entière* est une série de (fonctions) de terme général :

$$z \in \mathbb{C} \mapsto a_n z^n$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes, les nombres a_n sont les coefficients de la série entière $\sum a_n z^n$.

Les sommes partielles d'une telle série entière sont les fonctions polynomiales :

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

Nous avons déjà rencontré des séries entières :

i) $\sum z^n/n!$

ii) $\sum(-1)^n z^{2n}/(2n)!$

iii) $\sum(-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)!$

iv) $\sum z^n$

v) $\sum(-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)$

vi) $\sum(-1)^n z^{n+1}/(n+1)$

7.1.2 Rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, on cherche à savoir pour quel nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ la série de terme général $a_n z^n$ est convergente. On remarque que si pour un $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la série de terme général $a_n z_0^n$ est convergente, alors on sait que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et donc

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n||z_0|^n = 0$$

La suite $(|a_n||z_0|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée [1], il y a donc un réel $C > 0$ tel que

$$\forall n \in N, \ \ |a_n||z_0|^n \leq C$$

Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| < |z_0|$ alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$|a_n||z|^n = |a_n||z_0|^n \frac{|z|^n}{|z_0|^n} \leq C \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$$

Puisque la série de terme général $C\,(|z|/|z_0|)^n$ est convergente, on en déduit que la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.
Notation :*Pour $r \geq 0$, on note $D(0,r)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon r et $\bar{D}(0,r)$ le disque fermé de centre 0 et de rayon r :*

$$D(0,r) = \{z \in \mathbb{C}, \ |z| < r\} \ et \ \ \bar{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C}, \ |z| \leq r\}.$$

Introduisons maintenant les ensembles I des nombres réels $r \geq 0$ tel que la série de termes général $|a_n|r^n$ est convergente et J l'ensembles des nombres réels $r \geq 0$ tel que la suite $(|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il est facile [2] de démontrer que

i) si $r \in I$ alors $[0,r] \subset I$.

ii) si $r \in J$ alors $[0,r] \subset J$.

iii) $I \subset J$.

iv) Si $r \in J$ alors $[0,r[\in I$.

On en déduit que I et J sont des intervalles et que $\sup I = \sup J$ [3] Définition :Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, on appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ la borne supérieure de l'ensemble des réels $r \geq 0$ tel que la série de termes général $|a_n|r^n$ est convergente. C'est également la borne supérieure de l'ensemble des nombres réels $r \geq 0$ tel que la suite $(|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Proposition 7.1.1. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0,+\infty]$, alors pour tout $z \in D(0,R)$ la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}(0,R)$, la série de terme général $a_n z^n$ est divergente.*

---

1. Car on sait qu'une suite convergente est bornée.
2. Le point le plus délicat est le dernier et cela se prouve avec les mêmes arguments que ceux fournis précédemment.
3. En convenant que la borne supérieure d'une partie non bornée est $+\infty$.

La preuve de cette proposition est maintenant évidente si $z \in D(0, R)$ alors $|z| < R$, par définition $|z|$ appartient à l'ensemble [4]

$$I = \left\{ r \geq 0, \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n < +\infty \right\}$$

Donc la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente. Par définition si $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}(0, R)$ alors $|z| > R$ donc la suite $(|a_n||z|^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, donc la suite $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 et la série de terme général $a_n z^n$ ne peut pas être convergente. Définition : Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$, le disque $D(0, R)$ s'appelle le disque de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Sur le bord du disque, tout est possible

i) La série entière $\sum z^n$ a un rayon de convergence égale à 1 et pour tout nombre complexe z de module 1 la série de terme général z^n est divergente.
ii) La série entière $\sum_{n \geq 1} z^n/n$ a un rayon de convergence égale à 1 et pour $z = 1$, la série de terme général $z^n/n = 1/n, n \geq 1$ est divergente alors que pour tout autre nombre complexe de module 1 la série de terme général $z^n/n, n \geq 1$ est convergente.
iii) La série entière $\sum_{n \geq 1} z^n/n^2$ a un rayon de convergence égale à 1 et pour tout nombre complexe de module 1 la série de terme général $z^n/n^2, n \geq 1$ est convergente.

Des exemples de rayon de convergence :

i) $\sum z^n/n!$, $R = +\infty$
ii) $\sum (-1)^n z^{2n}/(2n)!$, $R = +\infty$
iii) $\sum (-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)!$, $R = +\infty$
iv) $\sum z^n$, $R = 1$
v) $\sum (-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)$, $R = 1$
vi) $\sum (-1)^n z^{n+1}/(n+1)$, $R = 1$
vii) $\sum 2^n z^n$, $R = 1/2$

La proposition suivante, basée sur les critères de Cauchy et de d'Alembert, peut être très utile pour calculer des rayons de convergence :

Proposition 7.1.2. *i) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, si la suite $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est*

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

4. La suite $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} |a_k| r^k$ est croissante, elle a donc une limite (éventuellement infinie) la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n < +\infty$ signifie que cette limite est finie.

ii) Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière. Supposons que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on ait* $a_n \neq 0$ *et que la suite* $(|a_{n+1}/|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit convergente alors le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *est*

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Démonstration. Dans le premier cas, on a pour tout $r \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|r^n} = \frac{r}{R}$$

, donc le critère de Cauchy pour la convergence des séries implique que si $r/R \in [0,1[$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|r^n < +\infty$ alors que si $r > R$, on a $\lim_{n\to+\infty} |a_n|r^n = +\infty$.

De même dans le second cas, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n} = \frac{r}{R}$$

, et le critère de d'Alembert implique de même que si $r < R$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|r^n < +\infty$ alors que si $r > R$, on a $\lim_{n\to+\infty} |a_n|r^n = +\infty$. □

7.1.3 Somme d'une série entière

Lorsque $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R \in]0,+\infty]$, on définit la fonction

$$\begin{aligned} D(0,R) &: \to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

C'est la somme de la série entière $\sum a_n z^n$.

Proposition 7.1.3. *La somme d'une série entière est continue sur son disque de convergence.*

Démonstration. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0,+\infty]$. Plusieurs démonstrations sont possibles.

La première est d'invoquer la continuité d'une limite uniforme de fonctions continues. En effet, soit $r \in]0,R[$. Il n'est pas difficile de voir que la série de fonctions de termes général $a_n z^n$ converge normalement sur $\bar{D}(0,r)$. Puisque chaque fonction $z \in \bar{D}(0,r) \to a_n z^n$ est continue. La fonction $z \in \bar{D}(0,r) \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est donc limite uniforme de fonctions continues, elle est donc continue. Le bémol de cette preuve est que nous n'avons pas parlé de limite uniforme de fonction de plusieurs variables. On peut étendre sans peine cette notion et le théorème relatif à la continuité d'une limite uniforme de fonctions continues est toujours valide.

La seconde preuve, soit $z_0 \in D(0,R)$. On va montrer que la fonction $z \in D(0,R) \to S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue en z_0. Soit $\rho \in]r,R[$, on sait que la suite $(|a_n|\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il y a donc un réel $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n|\rho^n \le C.$$

On a

$$z^n - z_0^n = (z - z_0)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}\right)$$

on en déduit

$$|z^n - z_0^n| \le n\,|z - z_0| \max\left\{|z|^{n-1}, |z_0|^{n-1}\right\}$$

Supposons maintenant que $|z| \le (r+\rho)/2$, on obtient

$$|z^n - z_0^n| \le n\,|z - z_0| \left(\frac{r+\rho}{2}\right)^{n-1}$$

et en utilisant que $|a_n| \le C\rho^{-n}$:

$$|f(z) - f(z_0)| \le \sum_{n=0}^{+\infty} n\,|a_n||z-z_0| \left(\frac{r+\rho}{2}\right)^{n-1} \le C\rho^{-1}|z-z_0| \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{r+\rho}{2\rho}\right)^{n-1}$$

puisque $\frac{r+\rho}{2\rho} < 1$, la série de terme général $n\left(\frac{r+\rho}{2\rho}\right)^{n-1}$ est convergente et si l'on pose $K = C\rho^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{r+\rho}{2\rho}\right)^{n-1}$, on a obtenu que pour $|z| \le (r+\rho)/2$,

$$|S(z) - S(z_0)| \le K|z - z_0|.$$

Inégalité qui implique la continuité de S en z_0. □

7.1.4 Opération algébrique sur une série entière

Proposition 7.1.4. *Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a et Soit $\sum b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_b.*

i) Le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ est supérieur à $\min(R_a, R_b)$ et il est égale à $\min(R_a, R_b)$ lorsque $R_a \ne R_b$.

ii) Soit $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$ alors le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$ est supérieur à $\min(R_a, R_b)$. De plus pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

Démonstration. Concernant la somme : la convergence de la série de terme général $|a_n|r^n$ et de la série de terme général $|b_n|r^n$ entraînent la convergence de la série de terme général $|a_n + b_n|r^n$ [5] On en déduit donc que le rayon de convergence [6] de la série entière $\sum(a_n+b_n)z^n$ est supérieur à $\min(R_a, R_b)$. De plus si $R_a > R_b$ et que $r \in]R_b, R_a[$ alors $|a_n+b_n|r^n \geq |b_n|r^n - |a_n|r^n$. On a $\lim_{n\to+\infty} |a_n|r^n = 0$ [7] et la suite $(|b_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, la suite $(|a_n+b_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas bornée. Ainsi le rayon de convergence de la série entière $\sum(a_n + b_n)z^n$ est inférieur à r et ceci pour tout $r \in]R_b, R_a[$ donc il est supérieur à R_a. Puisque l'on a déjà démontré qu'il était inférieur à $R_a = \min(R_a, R_b)$, il est égale à R_a.

Le cas ii) est une conséquence du théorème de Cauchy relatif la convergence du produit de Cauchy de série. □

i) Le rayon de la série entière $\sum z^n$ est 1 , celui de la série entière $\sum -z^n$ est également 1 mais celui de la série entière $\sum(1 + (-1))z^n$ est $+\infty$.

ii) Si $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Posons $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$, un petit calcul montre que $c_0 = 1$ et que pour $n > 0$ alors

$$c_n = \sum_{q=0}^{n} a_{n-q}b_q = \sum_{q=0}^{1} a_{n-q}b_q = a_n - a_{n-1} = 0$$

Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$ est $+\infty$.

7.1.5 Dérivée d'une série entière

Supposons que $\sum a_n z^n$ soit une série entière de rayon de convergence $R > 0$. et que $k \in \mathbb{N}$. On sait que si $r > R$ la suite $(|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, il en est donc de même pour la suite $(|n^k a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi le rayon de convergence de la série entière $\sum n^k a_n z^n$ est inférieur à R. Si $0 < r < R$, alors pour $\rho \in]r, R[$ la suite $(|a_n|\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il y a un réel $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n|\rho^n \leq C$$

Puisque la suite $\left(n^k \left(\frac{r}{\rho}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, elle est bornée, la suite $(n^k|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée [8]. Donc le rayon de convergence la série entière $\sum n^k a_n z^n$ est supérieur à R, il est donc égale à R.

5. Car $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$.
6. On rappelle que celui ci est la borne supérieur des réels $r \geq 0$ tel que la série de terme général $|a_n + b_n|r^n$ converge.
7. en effet $r < R_a$ donc $|a_n|r^n$ est le terme général d'une série convergente.
8. Remarquez que $n^k|a_n|r^n = n^k \left(\frac{r}{\rho}\right)^n |a_n|\rho^n$.

Définition : La série dérivée de la série entière $\sum a_n z^n$ est la série entière $\sum a_n n z^{n-1}$ ou $\sum n^k a_{n+1}(n+1)z^n$.

Proposition 7.1.5. *La série entière $\sum a_n z^n$ et sa série dérivée ont même rayon de convergence R de plus si on note $S'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n z^{n-1}$ alors pour $z \in D(0,R)$:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(z+h)-S(z)}{h} = S'(z).$$

Démonstration. En utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient

$$(z+h)^n - z^n - nz^{n-1}h = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k z^{n-k}$$

D'où

$$\begin{aligned}\left|(z+h)^n - z^n - nz^{n-1}h\right| &\leq \left|\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k z^{n-k}\right| \\ &\leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |h|^k |z|^{n-k} = (|z|+|h|)^n - |z|^n - n|z|^{n-1}|h|\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Taylor-Lagrange,on obtient l'existence d'un réel $c \in]0,|h|[$ tel que

$$(|z|+|h|)^n - |z|^n - n|z|^{n-1}|h| = n(n-1)(|z|+c)^{n-2}\frac{|h|^2}{2}.$$

Donc

$$\left|(|z|+|h|)^n - |z|^n - n|z|^{n-1}|h|\right| \leq n(n-1)(|z|+|h|)^{n-2}\frac{|h|^2}{2}.$$

Soit donc $z \in D(0,R)$ et choisissons $\rho \in]|z|,R[$, la suite $(|a_n|\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il y a un réel $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n|\rho^n \leq C.$$

Soit $\delta = (\rho - |z|)/2$. Alors pour $h \in D(0,\delta)$ on a $|z+h| \leq |z| + \delta < \rho < R$ on a donc

$$\begin{aligned}
\left|S(z+h)-S(z)-hS'(z)\right| &\leq \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left[(z+h)^n - z^n - nz^{n-1}h\right]\right| \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\left|(z+h)^n - z^n - nz^{n-1}h\right| \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\left[(|z|+|h|)^n - |z|^n - n|z|^{n-1}|h|\right] \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, n(n-1)(|z|+|h|)^{n-2}\frac{|h|^2}{2} \\
&\leq \frac{|h|^2}{2}\sum_{n=2}^{\infty} C\rho^{-n} n(n-1)(|z|+\delta)^{n-2} \\
&\leq \frac{|h|^2}{2\rho^2}\sum_{n=2}^{\infty} Cn(n-1)\left(\frac{|z|+\delta}{\rho}\right)^{n-2}
\end{aligned}$$

On remarque que puisque $\frac{|z|+\delta}{\rho} < 1$ la série de terme général $Cn(n-1)\left(\frac{|z|+\delta}{\rho}\right)^{n-2}$, $n \geq 2$ est bien convergente. Donc si on pose

$$K = \frac{|1}{2\rho^2}\sum_{n=2}^{\infty} Cn(n-1)\left(\frac{|z|+\delta}{\rho}\right)^{n-2}$$

on a obtenu pour $h \in D(0,\delta)$:

$$\left|S(z+h)-S(z)-hS'(z)\right| \leq K|h|^2,$$

inégalité qui implique bien que

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(z+h)-S(z)}{h} = S'(z).$$

□

Une récurrence immédiate permet de démontrer le corollaire suivant

Corollaire 7.1.6. *Supposons que $\sum a_n z^n$ soit une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la fonction*

$$t \in]-R,R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

est $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée l^{ieme} est

$$t \in]-R,R[\mapsto \sum_{n=l+1}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-l+1)a_n t^{n-l} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+l)(n+l-1)\dots(n+1)a_{n+l}t^n.$$

7.2 Fonctions développables en séries entières

7.2.1 Définition

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle I et $r > 0$ [9] on suppose que $]-r, r[\subset I$. On dit que f est développable en série entière sur $]-r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égale à r tel que

$$\forall x \in]-r, r[, \; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

7.2.2 Propriétés d'une fonction développable en série entière

Une paraphrase du corollaire précédent est

Proposition 7.2.1. *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière sur $]-r, r[$ alors $f\Big|_{]-r,r[}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et si $f\Big|_{]-r,r[}$ est la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ alors pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $x \in]-r, r[$ on a*

$$f^(l)(x) = \sum_{n=l+1}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-l+1)a_n x^{n-l} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+l)(n+l-1)\dots(n+1)a_{n+l}x^n.$$

7.2.3 Exemples classiques

i) La fonction $\exp$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

ii) La fonction $\cos$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

iii) La fonction $\sin$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

iv) La fonction $x \mapsto 1/(1-x)$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

9. Eventuellement $r = +\infty$.

v) La fonction $\arctan$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

vi) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

vii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ alors la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. Et i on pose

$$a_n(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha-j)}{n!}$$

alors

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\alpha) x^n. \tag{7.2.1}$$

7.3 Utilisations des séries entières

On donne ici quelques exemples d'utilisations des séries entières.

7.3.1 Nombre de Catalan

Si n est un entier n, on définit le nombre c_n comme étant le nombre de façon différentente de calculer un produit de n facteurs, par convention on a $c_0 = 0, c_1 = 1$ et $c_2 = 1$. Pour un produit de trois facteurs, nous avons deux possibilités :

$$(ab)c, \ \ a(bc)$$

Pour un produit de 4 facteurs nous avons 5 possibilités :

$$((ab)c)d\ ,\ (a(bc))d\ ,\ a(b(cd))\ ,\ a((bc)d), (ab)(cd)$$

donc $c_4 = 5$

Pour un produit de n facteurs, nous avons $n-1$ choix pour effectuer la dernière multiplication :

$$(x_1 \dots, x_p)(x_{p+1} \dots x_n), \quad p = 1, \dots, n-1$$

une fois ce choix fait, il y a c_p choix à faire dans le premier facteur $(x_1 \dots, x_p)$ etc_{n-p} choix à faire dans le second facteur $(x_{p+1} \dots x_n)$. On trouve donc la relation de récurrence :

$$c_n = \sum_{p=1}^{n-1} c_p c_{n-p}, \mathbf{n \geq 2}$$

Puisque $c_0 = 0$ par convention on a aussi

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} c_p c_{n-p}, \mathbf{n \geq 2}$$

On remarque pour

$$\sum_{p=0}^{0} c_p c_{0-p} = 0, \sum_{p=0}^{1} c_p c_{1-p} = 0$$

On raisonne alors **formellement** : Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$

$$S(z)S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{p=0}^{n} c_p c_{n-p} \right] z^n = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n z^n = S(z) - z$$

Soit $S^2(z) - S(z) + z = 0$. Or les solutions de l'équation du second degré $X^2 - X + z = 0$ sont données par la formule

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2}$$

Notre convention $c_0 = 0$ implique que $S(0) = 0$.

On arrête maintenant notre raisonnement formel . On introduit la fonction f : $]-\infty, 1/4[$

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$

Cette fonction est développable en série entière sur $]-1/4, 1/4[$. En effet avec

$$\begin{aligned} b_n = a_n(1/2) &= \frac{(1/2)(1/2-1)\dots(1/2-n+1)}{n!} = (-1)^{n-1} \frac{\frac{1\times 3 \dots \times (2n-3)}{2^n}}{n!} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots \times (2n-3) \times (2n-2)}{2^n (2 \times 4 \dots \times (2n-2)) n!} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!} \end{aligned}$$

On a pour $|x| < 1$ (cf 7.2.1) :

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

D'où pour $|x| < 1/4$:

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (-1)^n 4^n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (-1)^n 4^n x^n$$

et pour $|x| < 1/4$, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (-1)^{n-1} 4^n x^n$$

On calcule facilement

$$d_n = \frac{1}{2} b_n (-1)^{n-1} 4^n = (-1)^{n-1} 2^{2n-1} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}.$$

Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n.$$

La fonction f ainsi construite vérifie pour tout $|x| < 1/4$

$$[f(x)]^2 - f(x) + x = 0 \tag{7.3.1}$$

Or selon la proposition (7.1.4), nous avons pour tout $|x| < 1/4$:

$$[f(x)]^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\sum_{p=1}^{n-1} d_p d_{n-p} \right] x^n$$

puisque

$$-f(x) + x = -\sum_{n=2}^{+\infty} d_n x^n$$

On déduit de (7.3.1) que pour tout $|x| < 1/4$:

$$[f(x)]^2 - f(x) + x = \sum_{n=2}^{+\infty} \left\{ \left[\sum_{p=1}^{n-1} d_p d_{n-p} \right] - d_n \right\} x^n = 0$$

Par unicité du dévellopement limité en 0 de la fonction $x \mapsto [f(x)]^2 - f(x) + x$, on en déduit que pour tout $n \geq 2$ alors

$$d_n = \sum_{p=1}^{n-1} d_p d_{n-p}$$

puisque $d_1 = 1$, le principe de récurrence implique que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$c_n = d_n = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}.$$

Ceci permet de trouver que $c_{10} = 4862$.

7.3.2 Solutions d'équations différentielles

On cherche les/des solutions $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle du second ordre :

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + y(x) = 0. \tag{7.3.2}$$

On remarque que nécessairement on doit avoir $y'(0) = 0$.

On cherche d'abord une solution qui soit dévellopable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$. Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

une fonction dévellopable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$. On a pour $|x| < r$

$$\begin{aligned} f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) + f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_{n+2} + a_n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \left((n+2)^2 a_{n+2} + a_n\right) \end{aligned}$$

On trouve donc que f vérifiera l'équation différentielle (7.3.2) si et seulement si pour tout entier n on a :

$$(n+2)^2 a_{n+2} + a_n = 0$$

On a vu que nécessairement, on avait $a_1 = 0$ donc tout les coefficients impaires de la série entière définissant f sont nulles pour les coefficients pairs on trouve :

$$a_{2n} = -\frac{1}{n^2}a_{2(n-1)} = \left(-\frac{1}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{(n-1)^2}\right)\left(-\frac{1}{(2)^2}\right)a_0 = \frac{(-1)^n}{(n!)^2}a_0$$

La série entière

$$\sum \frac{(-1)^n}{(n!)^2} z^{2n}$$

a un rayon de convergence infini, elle définit donc une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$:

$$J(x) = \sum n = 0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^{2n}$$

qui est par construction une solution de l'équation différentielle (7.3.2)..

On peut démontrer que les solutions de l'équation différentielle (7.3.2) sur $\mathbb{R}$ sont forcement des multiples de J. On peut trouver toutes les solutions de l'équation différentielle (7.3.2) sur $\mathbb{R}^*$, en cherchant une solution de la forme

$$x \mapsto \ln(x)J(x) + f(x)$$

où f est dévellopable en série entière sur $\mathbb{R}$, les coefficients de f ont une forme moins sympathique que ceux de J.

7.4 Quelques avertissements

7.4.1

Il y a des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ dont toute les dérivées à l'origine sont nulle. Par exemple la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

C'est un exercice de démontrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ [10] et que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(0) = 0$$

. On a donc

7.4.2

Il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ dont la série de Taylor à un rayon de convergence nulle. Ce qui suit est un exemple du à L. Euler :posons pour $x > 0$:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \int_0^x e^{-\frac{1}{t}} dt$$

et

$$f_N(x) = (N+1)! e^{\frac{1}{x}} \int_0^x t^N e^{-\frac{1}{t}} dt$$

en intégrant par partie, on montre facilement que [11]

$$f_N(x) = e^{\frac{1}{x}} \left[(N! t^{N+1} e^{-\frac{1}{t}} \right]_0^x - N! e^{\frac{1}{x}} \int_0^x t^N e^{-\frac{1}{t}} dt = N! x^{N+1} - f_{N-1}(x).$$

Une petite récurrence facile mène à la formule :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2!x^2 - f_1(x) \\ &= 2!x^2 - 3!x^3 + f_2(x) \\ &= 2!x^2 - 3!x^3 + \ldots + (-1)^N N! x^{N+1} + (-1)^{N+1} f_N(x) \end{aligned}$$

Grâce à la majoration :

$$|f_N(x)| \leq (N+1)! e^{\frac{1}{x}} \int_0^x t^N e^{-\frac{1}{x}} dt = N! x^{N+1}$$

10. Le point de départ est de démontrer par récurrence qu'il y a un polynôme P_n tel que

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

.

11. En utilisant que

$$\frac{d}{dt} e^{-\frac{1}{t}} = \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}.$$

on sait que f admet un DL à tout ordre en $x = 0$. Et se basant sur la relation

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} f(x) + 1,$$

on peut montrer que f a une extension $\mathcal{C}^\infty$ à $[0, +\infty[$ qui vérifie

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n n!, n \geq 2$$

En fait, il existe un théorème du à E. Borel qui stipule que pour toute suite de réel $(a_n)_n$ il existe une fonction f qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout entier n :

$$f^{(n)}(0) = a_n.$$