



UNIVERSITÉ DE NANTES

Licence de mathématiques / Licence d'économie

Parcours Math-Éco

2015-2016

Optimisation sous contrainte

Laurent Guillopé

Laboratoire de mathématiques Jean Leray
Département de mathématiques, UFR Sciences et techniques
Université de Nantes

www.math.sciences.univ-nantes.fr/~guillope/l3-osc



Version : 2 mars 2020

Table des matières

Chapitre 1. Prologue	2
Chapitre 2. Optimisation différentiable	5
1. Fonctions différentiables et différentielles	5
2. Optimisation sans contrainte	7
3. Optimisation avec contraintes d'égalité	11
4. Optimisation avec contraintes d'inégalité	26
Chapitre 3. Programmation convexe	35
1. En guise d'introduction : la moyenne arithmético-géométrique	35
2. Parties convexes	37
3. Fonctions convexes	38
4. Convexité et régularité	44
5. Fonctions quasi-convexes	51
6. Programmation convexe	57
Chapitre 4. Optimisation vectorielle	62
1. Ordres de Pareto et optima	62
2. Scalarisation	65
Annexe A. Formes quadratiques	68
1. Matrices symétriques et formes quadratiques	68
2. Formes définies et hyperboliques	69
3. Formes quadratiques sous contraintes	71
Annexe. Bibliographie	75
Table des figures	76
Annexe. Index	77
Index général	77
Index des noms	78

Chapitre 1

Prologue

Étant donnée une fonction J , dite *fonction d'objectifs*, *fonction de coûts*, *fonction d'utilité* ou encore *fonction de production*, à valeurs numériques, l'optimisation consiste en la recherche des valeurs *minimum* ou de *maximum*, soit de manière indifférenciée d'*extremum*,

$$(1) \quad \min_{x \in E} J(x), \quad \max_{x \in E} J(x).$$

ainsi que le ou les points¹ où la fonction J atteint ces extrema

$$\operatorname{argmin}_{x \in E} J(x) = \{y \in E, J(y) = \min_{x \in E} (J(x))\}, \quad \operatorname{argmax}_{x \in E} J(x) = \operatorname{argmin}_{x \in E} (-J(x)).$$

SI J est à valeurs vectorielles, *i. e.* dans $\mathbb{R}^p, p \geq 1$, le problème 1 garde un sens dès qu'un ordre (processus de comparaison entre vecteurs) a été choisi. Ce thème, associé à l'économiste Pareto, sera abordé à la fin du cours.

La variable x est appelée parfois *variable de choix*, au pluriel si x est considéré comme un n -uplet $x = (x_1, \dots, x_n) \in E \subset \mathbb{R}^n$ où en général E est un domaine (partie ouverte connexe), une adhérence d'un domaine à bord régulier ou des domaines de courbes, surfaces ou hypersurfaces². La fonction J exprime le résultat d'une production, de charges, de profit, d'utilité, ... Elle est définie sur un ensemble E dont les éléments, dits *réalisables* ou *admissibles* modélisent des *intrants* : produits manufacturés, matières premières, unités de travail, capital, charges sociales, ... Le domaine de définition de la fonction J est souvent une partie du quadrant $\{(x_1, \dots, x_n), x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ dans les applications économiques.

L'étude d'un problème d'optimisation est appelé *programme*, la dénomination de *programmation* étant diversement qualifiée pour signifier un cadre spécifique, avec ses conditions et méthodes particulières : *programmation linéaire* quand les fonctions à l'œuvre sont affines, *programmation convexe* pour des fonctions, ou leurs opposées, convexes, ...³.

Remarquons tout de suite que la recherche d'un minimum pour J est équivalente à la recherche d'un maximum pour la fonction opposée $-J$

$$\min_{x \in E} J(x) = - \max_{x \in E} (-J(x)), \quad \max_{x \in E} J(x) = - \min_{x \in E} (-J(x)).$$

1. Les fonctions argmin et argmax sont des fonctions à valeur dans l'ensemble des parties du domaine de définition de la fonction d'objectifs.

2. Les exemples rencontrés suffiront à expliquer ces termes : la partie E ne sera jamais un ensemble discret, en bijection dans une partie de \mathbb{Z}^n , ce cours ne s'occupant pas de programmation discrète.

3. Le terme *programmation* ne réfère pas à la programmation informatique, bien que les ordinateurs soient largement utilisés de nos jours pour résoudre des *programmes mathématiques* : il vient de l'usage du mot *programme* dans les années 1940 par les forces armées américaines pour établir des horaires de formation et des choix logistiques, que Dantzig, le créateur de l'algorithme du simplexe en programmation linéaire étudiait à l'époque. L'emploi du terme *programmation* avait également un intérêt pour débloquer des crédits en une époque où la planification devenait une priorité des gouvernements, cf. [fr.wikipedia.org/wiki/Optimisation_\(mathématiques\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Optimisation_(mathématiques)).

Beaucoup d'énoncés ne seront formulés que pour la recherche de minimum. La recherche de bornes $\inf_{x \in E} J(x), \sup_{x \in E} J(x)$ est différente du problème (1) puisque les bornes ne sont pas nécessairement atteintes. Ce cours ne s'interrogera pas sur l'existence de optima : celle-ci provient parfois d'un argument de compacité à la Bolzano-Weierstrass ou de coercivité.

▷ EXEMPLES 1.1.

1.1.1 La fonction $(x, y, z) \rightarrow x^7 + \sinh y + \sin(z^3 + x^2)$ admet un minimum sur la boule fermée $\{\|(x, y, z) - (1, 3, \pi)\| \leq 3\}$.

1.1.2 La fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + 3y^2 + \sin^2(x + y^3)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|(x, y)\| \rightarrow +\infty$: elle est coercive. Elle admet un minimum sur \mathbb{R}^2 .

1.1.3 Soit J définie sur $E = [0, \infty)$ par $J(x) = 1/x$ si $x \in [1, \infty)$ et $J(x) = 1$ sinon. Alors

$$\min_{x \in E} J(x) = 0, \quad \max_{x \in E} J(x) = 1, \quad \operatorname{argmax} J = [0, 1], \quad \operatorname{argmin} J = \emptyset. \quad \triangleleft$$

Rappelons quelques définitions

DÉFINITION 1.1: Soit J définie sur E à valeurs réelles.

(i) Le point x_0 est un minimum strict de J si $J(x_0) < J(x)$ pour $x \in E \setminus \{x_0\}$.

(ii) Le point x_0 est un minimum global de J si $J(x_0) \leq J(x)$ pour $x \in E$.

(iii) Le point x_0 est un minimum local (resp. local strict) de J s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $J(x_0) \leq J(x)$ pour $x \in V$ (resp. $J(x_0) < J(x)$ pour $x \in V \setminus \{x_0\}$).

DÉFINITION 1.2: Soient $J, g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_p$ définies sur E à valeurs numériques. Le problème d'optimisation avec les contraintes d'égalité $g_i(x) = 0, i = 1, \dots, n$ et les contraintes d'inégalité $h_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, p$ est la recherche du minimum

$$(2) \quad \min\{J(x) : x \in E, g_i(x) = 0, i = 1, \dots, n, h_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, p\}.$$

△ REMARQUE 1.1. La contrainte d'égalité $g(x) = 0$ peut s'exprimer comme une double contrainte d'inégalité $g(x) \geq 0, -g(x) \geq 0$. Inversement, une contrainte d'inégalité $h(x) \geq 0$ peut s'exprimer comme la contrainte d'égalité $h(x) - s = 0$ après introduction de la variable de choix supplémentaire, dite *variable d'écart*, s soumise à la contrainte $s \geq 0$. Les contraintes (2) peuvent s'exprimer comme une seule contrainte numérique $G(x) = 0$ avec

$$G(x) = \sum_{i=1}^n |g_i(x)| + \sum_{j=1}^p |h_j(x) - s_j^2|$$

qui a l'inconvénient d'utiliser une fonction non différentiable sur l'ensemble des points admissibles $G = 0$ ou

$$G(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x)^2 + \sum_{j=1}^p (h_j(x) - s_j^2)^2$$

qui a celui d'une différentielle non régulière sur $G = 0$ (où dG s'annule). ▽

Ces notes sont consacrées donc à étudier la recherche de minimum (valeur ou point l'atteignant) telle que posée de manière générale dans (2) et dont seuls quelques cas particuliers seront abordés : programmes sans ou avec contraintes, fonction J différentiable, convexe,...

L'illustration graphique en basse dimension (une ou deux variables de décision) permet de préciser ou d'anticiper certains résultats analytiques, heuristiques ou approchés :

si $J : E(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables, on peut considérer (cf. Figure I.1)

- des lignes de niveau⁴ $L_v = \{J(x, y) = v, (x, y) \in E\}$ pour un ensemble de valeurs v_1, \dots, v_N ,
- le graphe $G_J = \{(x, y, J(x, y)) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in E\}$ de la fonction qui est une surface dans \mathbb{R}^3 ,

sur lesquels on peut repérer des extrema, p

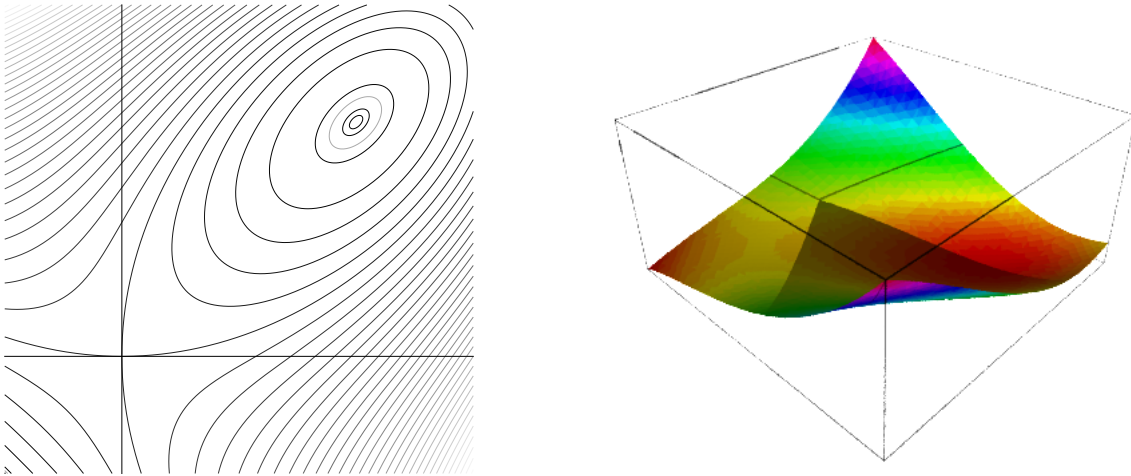


FIGURE I.1. Les courbes de niveau de la fonction d'objectifs $J(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$ sur le carré $[-1, 3]^2$ et la surface de son graphe.

Le logiciel **sage** permet aisément de faire certains tracés ou des calculs algébriques formels (par ex. le déterminant (18)); le logiciel **R** (qu'on peut appeler d'ailleurs à partir de **sage**) est d'un usage aisé, avec un ensemble riche de bibliothèques en calcul statistique et numérique. Ces deux outils, développés par la communauté scientifique, sont librement utilisables, avec des versions sur les différents systèmes communs (**linux**, **windows**, **MacOs** notamment) : à utiliser sans modération !

4. Les courbes de niveau d'une fonction de production sont appelées *isoquantes*, celles d'une fonction d'utilité *courbes d'indifférences*

Optimisation différentiable

1. Fonctions différentiables et différentielles

Dans ce chapitre, les fonctions sont toujours supposées différentiables à tout ordre. Si f est définie sur $U \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles, sa différentielle en $x \in U$ est l'application linéaire notée df_x ¹

$$f(x+h) = f(x) + df_x(h) + \|h\|\varepsilon(h).$$

Cette différentielle est représentée par le vecteur gradient²

$$\nabla f_x = \nabla f(x) = (\partial_{x_1} f(x), \dots, \partial_{x_n} f(x))$$

avec³

$$df_x(h) = df_x(h_1, \dots, h_n) = \partial_{x_1} f(x)h_1 + \dots + \partial_{x_n} f(x)h_n = \langle \nabla f(x), h \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ est le produit canonique sur \mathbb{R}^n , qui sera le plus souvent noté simplement $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En termes matriciels, l'expression $df_x(h)$ s'obtient comme le produit matriciel du vecteur ligne $(\partial_{x_1} f(x), \dots, \partial_{x_n} f(x))$ des coordonnées de la forme $d_x f$ dans la base (dx_1, \dots, dx_n) , alors que l'expression $\langle \nabla_x f, h \rangle$ est le produit scalaire $X^T Y$ des deux vecteurs colonne X, Y des coordonnées des vecteurs $\nabla_x f$ et h resp.

DÉFINITION 2.1: Soit $f : x \in U \subset \mathbb{R}^n \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ différentiable de classe \mathcal{C}^2 . La matrice hessienne⁴ $\text{Hess}(f)_x$ de f au point x est la matrice⁵

$$\text{Hess}_x f = (\partial_{ij}^2 f(x)) = \begin{pmatrix} \partial_{11}^2 f(x) & \dots & \partial_{1n}^2 f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n1}^2 f(x) & \dots & \partial_{nn}^2 f(x) \end{pmatrix}$$

des dérivées partielles secondes. Il lui est associée⁶ la forme quadratique

$$h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \text{Hess}(f)_x[h] = \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij}^2 f(x) h_i h_j$$

▷ EXEMPLES 2.1.

1. ... ou $d_x f$, $df(x)$, $f'(x)$, $d_x f(x_0)$, $J_f(x)$: les notations varient, parfois sans raison véritable autre que certaines habitudes, parfois en insistant sur la variable de dérivation ou sur l'évaluation de la différentielle en un point. Les mêmes variations ont lieu pour la hessienne : $\text{Hess}_x f$, $\text{Hess} f(x), \dots$

2. En statistique, le gradient de la log-vraisemblance est appelé le *score*.

3. $\partial_x f$ dénote la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$.

4. On ne confondra pas la matrice hessienne d'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la jacobienne $JF(x)$ d'une transformation $F : x \in U \subset \mathbb{R}^n \mapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_p(x)) \in \mathbb{R}^p$ définie par $JF(x) = (\partial_{x_j} F_i(x))$: c'est la matrice de la différentielle $dF(x)$ relativement aux bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p resp.. Si $F = \nabla f$, alors dF s'identifie à la matrice (symétrique) $\text{Hess} f$.

5. En statistique, l'opposée de la hessienne de la log-vraisemblance est appelée *information observée*.

6. À la matrice $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre n et symétrique correspond la forme quadratique $q_A : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$. Cette correspondance est bijective vu $2a_{ij} = q_A(e_i + e_j) - q_A(e_i) - q_A(e_j)$ où la famille (e_i) est la base canonique de \mathbb{R}^n .

2.1.1 La hessienne de la fonction polynomiale $P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$ est la matrice (indépendante de x, y)

$$\text{Hess}(f)_{(x,y)} = 2 \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

2.1.2 Soit ℓ_v la forme linéaire représentée par le vecteur v suivant $\ell_v(x) = \langle v, x \rangle$ et q_A la forme quadratique associée à la matrice symétrique A .

$$\nabla \ell_v(x) = v, \quad \text{Hess } \ell_v(x) = 0, \quad \nabla q_A(x) = Ax, \quad \text{Hess } q_A(x) = 2A.$$

On établit ces formules soit en prenant des coordonnées et effectuant le calcul de dérivées partielles, soit en identifiant les termes développements de $\ell_v(x+h)$ et $q_A(x+h)$ à ceux du développement de Taylor (3) rappelé ci-dessous. \triangleleft

Rappelons la formule de Taylor à l'ordre 2 :

PROPOSITION 2.1: Soit $x_* \in \mathbb{R}^n$, U_{x_*} un ouvert contenant x_* et $f : U_{x_*} \mapsto \mathbb{R}$ différentiable. Alors

$$(3) \quad f(x_* + h) = f(x_*) + \langle \nabla f_{x_*}, h \rangle + \frac{\text{Hess } f_{x_*}[h]}{2} + \|h\|^2 \varepsilon(h), \quad x_* + h \in U_{x_*}$$

avec $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Soit $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante et $\Phi : V(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ une bijection de V sur $U = \Phi(V)$. Si $\tilde{J} = H \circ J \circ \Phi$, les deux programmes $\min_{v \in V} \tilde{J}(v)$ et $\min_{u \in U} J(u)$ sont équivalents, avec $\min_{u \in U} J(u) = \min_{v \in V} \tilde{J}(v)$ et $\text{argmin } J = \Phi(\text{argmin } \tilde{J})$. Comme exemple, on peut citer diverses fonctions dérivées de la fonction de Cobb-Douglas : $\prod_i u_i^{\alpha_i}$, $\sum_i \alpha_i \log u_i$ et $\sum_i \alpha_i v_i$. Le lemme suivant sert à établir l'équivalence de certains critères d'optimisation vis à vis de ces compositions de fonctions.

LEMME 2.1: Soit $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi : V(\subset \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $J : U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{J} = H \circ J \circ \Phi$, $\tilde{p} \in V$ et $p = \Phi(\tilde{p})$. Alors

$$\begin{aligned} d_{\tilde{p}} \tilde{J} &= H'(J(p)) d_p J \circ d_{\tilde{p}} \Phi \\ \nabla \tilde{J}(\tilde{p}) &= H'(J(p))^T \Phi'(\tilde{p}) [\nabla J(p)], \\ \text{Hess}_{\tilde{p}} \tilde{J} &= H''(J(p)) (d_p J \circ d_{\tilde{p}} \Phi)^2 + H'(J(p)) [\text{Hess}_p J [d_{\tilde{p}} \Phi] + J'(p) (d_{\tilde{p}}'' \Phi [\tilde{v}])]. \end{aligned}$$

En particulier, si $p = \Phi(\tilde{p})$ est un point critique de J , \tilde{p} est aussi un point critique de \tilde{J} avec relation entre les hessiennes

$$\text{Hess}_{\tilde{p}} \tilde{J}[\tilde{v}] = H'(J(p)) \text{Hess}_p J [d_{\tilde{p}} \Phi(\tilde{v})], \quad \tilde{v} \in \mathbb{R}^n$$

de telle sorte que si H, Φ sont des applications inversibles au voisinage de $\tilde{j} = J(p), \tilde{p}$ resp., alors les hessiennes $\text{Sign}(H'(J(p)) \text{Hess}_{\tilde{p}} \tilde{J})$ et $\text{Hess}_p J$ ont même indice.

DÉMONSTRATION. La matrice hessienne et le gradient sont déterminés par le développement de Taylor à l'ordre 2. Ainsi

$$\Phi(\tilde{p} + \tilde{v}) = \Phi(\tilde{p}) + d_{\tilde{p}} \Phi(\tilde{v}) + \frac{d_{\tilde{p}}'' \Phi[\tilde{v}]}{2} + o(\|\tilde{v}\|^2)$$

puis

$$\begin{aligned} (J \circ \Phi)(\tilde{p} + \tilde{v}) &= J \left[\Phi(\tilde{p}) + d_{\tilde{p}}\Phi(\tilde{v}) + \frac{d_{\tilde{p}}''\Phi[\tilde{v}]}{2} + o(\|\tilde{v}\|^2) \right] \\ &= J(\Phi(\tilde{p})) + J'(\Phi(\tilde{p})) \left[d_{\tilde{p}}\Phi(\tilde{v}) + \frac{d_{\tilde{p}}''\Phi[\tilde{v}]}{2} \right] + \frac{\text{Hess}_p J[d_{\tilde{p}}\Phi(\tilde{v})]}{2} + o(\|\tilde{v}\|^2) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\tilde{p} + \tilde{v}) &= h(J \circ \Phi(\tilde{p} + \tilde{v})) \\ &= h \left(J(\Phi(\tilde{p})) + J'(\Phi(\tilde{p})) \left[d_{\tilde{p}}\Phi(\tilde{v}) + \frac{d_{\tilde{p}}''\Phi[\tilde{v}]}{2} \right] + \frac{\text{Hess}_p J[d_{\tilde{p}}\Phi(\tilde{v})]}{2} + o(\|\tilde{v}\|^2) \right) \\ &= \tilde{J}(\tilde{p}) + h'(J(p)) \left[J'(p) \left[d_{\tilde{p}}\Phi(\tilde{v}) + \frac{d_{\tilde{p}}''\Phi[\tilde{v}]}{2} \right] + \frac{\text{Hess}_p J[d_{\tilde{p}}\Phi(\tilde{v})]}{2} \right] \\ &\quad + \frac{h''(J(p))[J'(p)[d_{\tilde{p}}\Phi(\tilde{v})]]^2}{2} + o(\|\tilde{v}\|^2) \\ &= \tilde{J}(\tilde{p}) + h'(J(p))J'(p)(d_{\tilde{p}}\Phi(\tilde{v})) \\ &\quad + \frac{h'(J(p)) \left[J'(p)d_{\tilde{p}}''\Phi[\tilde{v}] + \text{Hess}_p J[d_{\tilde{p}}\Phi(\tilde{v})] \right] + h''(J(p))[J'(p)(d_{\tilde{p}}\Phi(\tilde{v}))]^2}{2} + o(\|\tilde{v}\|^2) \end{aligned}$$

et donc les formules sur le gradient et le hessien de la fonction \tilde{J} . \square

2. Optimisation sans contrainte

Un problème d'*optimisation sans contrainte* considéré ici est du type

$$\inf_{x \in \Omega} J(x)$$

où Ω est un ouvert⁷ d'un espace vectoriel, en général de dimension finie, et J une fonction (au moins continue, de classe \mathcal{C}^∞ en général).

DÉFINITION 2.2: Soit $J : U(\subset \mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}$ différentiable. Le point $x \in U$ est un point critique de J si $dJ_x = 0$ ou de manière équivalente $\nabla J(x) = 0$.

THÉORÈME 2.1 (Euler-Fermat): Si $J : U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ est minimum en $x_* \in U$, alors x_* est point critique de J .

DÉMONSTRATION. Si x_* est minimum de J , alors, pour $h \in \mathbb{R}^N$ et $t > 0$ avec th assez petit

$$\frac{J(x_* + th) - J(x_*)}{t} \geq 0,$$

d'où

$$dJ_{x_*}(h) + \|h\|\varepsilon(th) \geq 0$$

et donc $dJ_{x_*}(h) \geq 0$ en faisant $t \rightarrow 0$. S'ensuit aussi $-dJ_{x_*}(h) = dJ_{x_*}(-h) \geq 0$ et donc $dJ_{x_*}(h) = 0$ pour tout vecteur h , soit la nullité de la différentielle dJ_{x_*} . \square

▷ **EXEMPLES 2.2.**

⁷ L'ouvert Ω peut être défini par une fonction J sous la forme $\Omega = \{F > 0\}$: cette inégalité, « ouverte », n'est pas considérée comme une contrainte, au contraire des inégalités larges des sections suivantes.

- 2.2.1** La fonction J_{\pm} définie par $J_{\pm}(x, y) = x^2 \pm y^2$ a 0 comme point critique : l'origine 0 est un minimum global strict de J_+ , alors que J_- n'a ni minimum, ni maximum (local ou global).
- 2.2.2** La fonction $J(x, y) = \cos x + y^2$ a comme gradient $\nabla J(x, y) = (-\sin x, 2y)$: ses points critiques sont les $(k\pi, 0)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

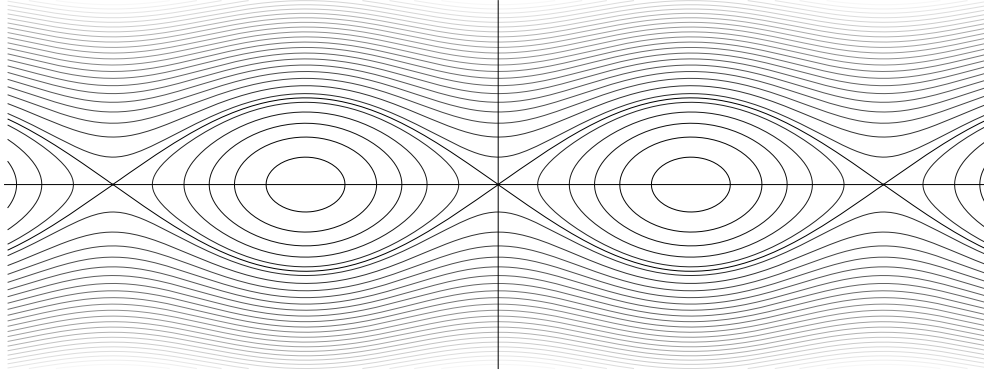


FIGURE II.1. Les courbes de niveau de la fonction d'objectifs $J(x, y) = \cos x + y^2$.

◁

THÉORÈME 2.2: Soit $J : U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ critique en x_* .

- (i) Si x_* est un minimum (maximum resp.) local de J , la hessienne $\text{Hess}(J)_{x_*}$ est une forme quadratique positive⁸ (négative resp.).
- (ii) Si la hessienne $\text{Hess}(J)_{x_*}$ est une forme quadratique définie positive (négative resp.) et x_* point critique de J , alors x_* est un minimum (maximum resp.) local de J .

▷ **EXEMPLES 2.3.**

- 2.3.1** Soit la fonction d'objectif J_{\pm} définie par $J_{\pm}(x, y) = x^2 \pm y^4$: avec (unique) point critique $x_* = (0, 0)$ la fonction J_{\pm} a au point $x_* = (0, 0)$ a comme hessienne $\text{Hess } J_{\pm}(x_*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, définie positive pour J_+ et de signature $(1, 1)$ pour J_- .

Le point x_* est minimum global de J_+ , point selle pour J_- .

- 2.3.2** Reprenant la fonction $J(x, y) = \cos x + y^2$ de l'exemple précédent, on a au voisinage de $m_k = (k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$,

$$J(k\pi + u, y) = y^2 + (-1)^k \cos u = (-1)^k + y^2 - (-1)^k \frac{u^2}{2} + (u^2 + y^2)\varepsilon(|u| + |y|).$$

Si k est impair, le point m_k est un minimum local strict, alors que si k est pair, c'est un point de minimum local le long de la verticale $\{(k\pi, y), y \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\}$ et de maximum local le long de l'horizontale $\{(k\pi + u, 0), u \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)\}$, i. e. m_k est un point selle⁹. On peut éviter le développement limité en introduisant le changement de variable $u \mapsto t(u) = \sqrt{2} \sin(u/2)$ pour u voisin de 0 (et aussi t) de telle sorte que, pour (u, y) et (t, y) proches de $(0, 0)$,

$$J(k\pi + u, y) = y^2 + (-1)^k \cos u = y^2 + (-1)^k (1 - 2 \sin^2(u/2)) = J(m_k) + y^2 + (-1)^k t(u)^2$$

8. On parle parfois de matrice *semi-définie* positive ou *semi-définie* négative.

9. Le point critique x_* de la fonction U en est un point selle si en restriction à un arc issu de x_* la fonction U croît alors que suivant d'autres arcs issus de x_* elle décroît.

avec un minimum local si k pair et un point selle si k impair. En conclusion, cette fonction J n'est pas bornée supérieurement (faire tendre $y \rightarrow \infty$), a une infinité de minima globaux constituant la partie $((1+2\mathbb{Z})\pi, 0)$, aucun autre minimum local et pas plus de maxima locaux, la partie $(2\pi\mathbb{Z}, 0)$ contenant tous les autres points critiques, chacun de type selle.

2.3.3 Soit A une matrice symétrique d'ordre n , b un vecteur de \mathbb{R}^n et c une constante. La fonction J définie par

$$J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

a comme différentielle $dJ_x(h) = \langle Ax, h \rangle + \langle b, h \rangle$ soit $\nabla J_x = Ax + b$ et hessienne $\text{Hess}(J)_x = A$. Les points critiques x de J sont caractérisés donc par l'équation $Ax + b = 0$: si A est inversible, J a un unique point critique $x_* = -A^{-1}b$.

D'après le théorème 2.2, c'est un minimum local si A est définie positive. On peut même dans ce cas montrer que c'est un minimum global : en effet, pour $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} J(x_* + h) &= \frac{1}{2}\langle A(x_* + h), x_* + h \rangle + \langle b, x_* + h \rangle + c \\ &= \frac{1}{2}\langle Ax_*, x_* \rangle + \langle Ax_*, h \rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h \rangle + \langle b, x_* + h \rangle + c \\ &= \frac{1}{2}\langle Ax_*, x_* \rangle + \langle b, x_* \rangle + c + \frac{1}{2}\langle Ah, h \rangle + \langle Ax_* + b, h \rangle \\ &= J(x_*) + \frac{1}{2}\langle Ah, h \rangle \end{aligned}$$

et le point x_* est clairement un minimum global strict. Si A est définie négative, x_* est pareillement un maximum global strict. Le cas général (A non inversible, avec des valeurs propres positives et négatives) nécessite des développements plus étoffés. \triangleleft

Démonstration du théorème 2.2. Soit x_* minimum de J . Vu que ∇J_{x_*} est nul, la formule de Taylor à l'ordre 2 s'écrit, pour h donné et t assez petit

$$0 \leq J(x_* + th) - J(x_*) = \frac{\text{Hess}(J)_{x_*}[th]}{2} + \|th\|^2 \varepsilon(th) = t^2 \left(\frac{\text{Hess}(J)_{x_*}[h]}{2} + \|h\|^2 \varepsilon(th) \right)$$

soit, en divisant par $t^2 > 0$,

$$0 \leq \frac{\text{Hess}(J)_{x_*}[h]}{2} + \|h\|^2 \varepsilon(th)$$

et par suite $\text{Hess}(J)_{x_*}[h] \geq 0$ pour tout h en faisant tendre $t \rightarrow 0$: voilà la première assertion démontrée.

Pour la seconde, la matrice hessienne étant définie positive, il existe¹⁰ une constante $C = C_{x_*}$ telle que

$$\text{Hess}(J)_{x_*}[h] \geq 2C\|h\|^2, \quad h \in \mathbb{R}^n$$

10. Pour la matrice $A = \text{Hess } J_{x_*}$, il existe une base orthonormée (v_i) de vecteurs propres avec valeurs propres associées λ_i resp., toutes strictement positives. Soit $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ la décomposition de x dans la base orthonormée (v_i) : $\langle Ax, x \rangle = \sum_{i,j} x_i x_j \langle Av_i, v_j \rangle = \sum_i x_i^2 \lambda_i \geq \inf_i \lambda_i \|x\|^2$: on peut donc prendre $C = \inf_i \lambda_i$.

Ainsi,

$$J(x_* + h) - J(x_*) = \frac{\text{Hess}(J)_{x_*}[h]}{2} + \|h\|^2 \varepsilon(h) \geq (C - |\varepsilon(h)|) \|h\|^2 \geq \frac{C}{2} \|h\|^2 > 0$$

pour h non nul suffisamment petit de telle sorte que $|\varepsilon(h)| \leq C/2$: on a bien montré que x_* était un minimum local strict de J . \square

\triangle REMARQUE 2.1. Une autre condition suffisante de minimum pour un point critique est la positivité locale : il existe une boule $B(x_*, \rho)$ sur laquelle $\text{Hess}_x J$ est positive. Cela résulte de la formule de Taylor avec reste intégral¹¹

$$J(x_* + h) = J(x_*) + \langle \nabla_{x_*} J(x), h \rangle + \int_0^1 J(1-t) \text{Hess}_{x_*+th} J[h] dt$$

et donne x_* comme minimum local (non nécessairement strict). Cet énoncé s'applique bien à la fonction $J(x, y) = x^2 + y^4$, dont la hessienne vaut $\text{Hess}_{x,y} J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$. ∇

Une caractérisation du caractère (défini) positif ou négatif d'une matrice A est donnée par les signes des mineurs principaux dominants de A (cf. Appendice 1) :

PROPOSITION 2.2: Soit A matrice (réelle) symétrique d'ordre n .

(i) La forme quadratique q_A est définie positive (resp. négative) si et seulement si les n mineurs principaux dominants $A_m = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$, $m = 1, \dots, n$ sont strictement positifs (alternent de signe, avec A_1 négatif resp.).

(ii) la forme q_A est positive (négative resp.) si et seulement si chaque déterminant $d_m^\pi = \det A_m^\pi$, $m = 1, \dots, n$, $\pi \in \mathfrak{S}_n$ est positif ou nul (du signe de $(-1)^m$ resp.) pour $m = 1, \dots, n$. Ici π est une permutation de $[1, n]$ et A^π est obtenue de A par permutation des lignes et des colonnes de A (resp. des colonnes de B) suivant π .

\triangleright EXEMPLE 2.4. Pour un programme avec fonction d'objectifs J et deux variables de décision, la condition pour une hessienne définie négative induisant un maximum local strict x_* est donc

$$\partial_{u^2}^2 J < 0, \quad \begin{vmatrix} \partial_{u^2}^2 J & \partial_{uv}^2 J \\ \partial_{uv}^2 J & \partial_{v^2}^2 J \end{vmatrix} > 0,$$

alors que pour 3 variables de décision et une hessienne définie négative

$$\partial_{u^2}^2 J < 0, \quad \begin{vmatrix} \partial_{u^2}^2 J & \partial_{uv}^2 J \\ \partial_{uv}^2 J & \partial_{v^2}^2 J \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \partial_{u^2}^2 J & \partial_{uv}^2 J & \partial_{uw}^2 J \\ \partial_{uv}^2 J & \partial_{v^2}^2 J & \partial_{vw}^2 J \\ \partial_{uw}^2 J & \partial_{vw}^2 J & \partial_{w^2}^2 J \end{vmatrix} < 0. \quad \triangleleft$$

\triangle REMARQUE 2.2. Si la partie E est paramétrée, par ex. suivant la bijection $p : m \in \mathcal{E}(\subset \mathbb{R}^d) \mapsto p(m) \in E$, le problème sous contrainte $\min_{x \in E} J(x)$ se ramène au problème (sans contrainte) $\inf_{m \in \mathcal{E}} J \circ p(m)$: on peut donc s'attendre à une liste de d conditions de signes pour des déterminants ou expressions analogues afin d'assurer des minima locaux : cela sera vérifié dans la section suivante. L'exemple 6 dans 2.6 ci-dessous peut être considéré aisément comme le problème $\inf_{\theta \in \mathbb{R}} [(t - \cos \theta)^2 + (L - t - \sin \theta)^2]$. Trouver un paramétrage explicite est néanmoins parfois difficile, ce qui évite l'analyse présentée ci-dessous avec les multiplicateurs de Lagrange. ∇

11. Si $j : t \in [0, 1] \mapsto j(t)$ est de classe \mathcal{C}^2 , on a par intégration et une intégration par parties successivement $j(1) = j(0) + \int_0^1 j'(t) dt = j(0) + j'(0) + \int_0^1 (1-t)j''(t) dt$, formule qu'on applique à la fonction $t \in [0, 1] \mapsto J(x+th)$.

3. Optimisation avec contraintes d'égalité

DÉFINITION 2.3: Soit $J : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'objectifs et $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de contrainte. Il leur est associé le problème de minimisation (avec contrainte d'égalité)

$$(4) \quad \min_{g(x)=0} J(x)$$

En écrivant la fonction g suivant ses coordonnées $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$, on dit que g réalise m contraintes. On supposera dans la suite, et sans le répéter, que la partie $S_g = g^{-1}(0) \subset U$ des points admissibles ou réalisables n'est pas vide : le point x est dit variable de contrôle ou de décision.

On conviendra d'écrire encore ∇g , gradient de g représentant la différentielle dg : c'est une collection $(\nabla g_1, \dots, \nabla g_m)$ de m vecteurs de \mathbb{R}^n , considérée comme une matrice à m colonnes et n lignes. Pour $v \in \mathbb{R}^n$, l'image $dg(v) \in \mathbb{R}^m$ s'interprète comme $\langle \nabla g, v \rangle = (\langle \nabla g_1, v \rangle, \dots, \langle \nabla g_m, v \rangle)$ ou comme le produit matriciel ${}^T \nabla g X_v$ où X_v est le vecteur (colonne) des coordonnées de v .

▷ EXEMPLE 2.5. La micro-économie fourmille d'exemples de ce type : le consommateur maximise une fonction d'utilité soumise à des contraintes budgétaires, une entreprise maximise le profit sous des contraintes technologiques ou de forces de travail tout en minimisant le coût de sa production. ◁

Si g est affine $g(x) = \ell(x) + C$ avec $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linéaire, S_g est une droite (si $n = 2$ et $m = 1, \ell$ non nulle), un plan ($n = 3$ et $m = 1, \ell$ non nulle), en général un sous-espace affine de \mathbb{R}^n , sous-espace de dimension $n - m$ si l'application $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est surjective.

Si g est non linéaire, alors, sous des conditions de régularité adéquates, S_g est une courbe plane (resp. surface dans \mathbb{R}^3) dans les cas $n = 2, m = 1$ (resp. $n = 3, m = 1$) : c'est une courbe (gauche) dans \mathbb{R}^3 si $n = 3, m = 2$ (la partie définie par la double contrainte $0 = g = (g_1, g_2)$ est l'intersection de deux surfaces, soit une courbe en général). De manière générale, la partie S_g de \mathbb{R}^n est appelée *sous-variété*, et localement est un petit morceau de l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n-m} courbé dans \mathbb{R}^n comme le sont les courbes ou surfaces : les conditions habituelles de régularité consistent en la surjectivité de la différentielle $dg(x)$ pour $x \in S_g$, ce qui permet l'application du théorème des fonctions implicites (cf. Appendice B). Un problème de recherche de minimum avec contraintes est donc celui pour une fonction définie sur la partie $E = \{x; g(x) = 0\}$ de \mathbb{R}^n dépourvue de calcul différentiel tel qu'il existe sur les ouverts des espaces \mathbb{R}^N . La théorie des multiplicateurs de Lagrange parvient de rester dans le cadre de l'espace ambiant \mathbb{R}^n et d'y exprimer les conditions au premier et second ordre comme cela a été fait précédemment en optimisation sur des ouverts, *i. e.* optimisation sans contrainte.

DÉFINITION 2.4: Soient $J : U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe \mathcal{C}^1 déterminant le problème d'optimisation avec contraintes d'égalité (4).

Si $m = 1$, le lagrangien $\mathcal{L}_{J,g}$ associé est la fonction définie sur $U \times \mathbb{R}$ par

$$(x, \lambda) \in U \times \mathbb{R} \mapsto \mathcal{L}_{J,g}(x, \lambda) = J(x) - \lambda g(x).$$

De manière plus générale si $m > 1$, le lagrangien est défini suivant

$$(x, \Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)) \in U \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathcal{L}_{J,g}(x, \Lambda) = J(x) - \sum_{k=1}^m \lambda_k g_k(x) = J(x) - \langle \Lambda, g(x) \rangle.$$

Les coefficients $\lambda, \Lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

△ REMARQUE 2.3. Vu que la contrainte $g = 0$ est équivalente à la contrainte $-g = 0$, le signe du terme $\langle \Lambda, g \rangle$ dans le lagrangien $\mathcal{L}_{J,g}$ n'est pas important dans le traitement des programmes avec contraintes d'égalités, de leurs lagrangiens et des conditions d'extrémalité : il n'en est pas de même si g apparaît dans l'expression d'une contrainte d'inégalité $g \geq 0$ et où on conviendra (cf. la section suivante 4) du signe négatif. Cette remarque justifie le signe $-$ choisi ici dans l'expression du lagrangien (qui parfois introduit des signes sans importance, comme dans le calcul du signe du déterminant de (17) ci-dessous). ▽

THÉORÈME 2.3: Soit $J : U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ des fonctions de classe \mathcal{C}^1 , $\mathcal{P}_{J,g}$ le problème $\min_{g(x)=0} J(x)$ et $\mathcal{L}_{J,g}$ le lagrangien défini par $\mathcal{L}_{J,g} : (x, \Lambda) \in U \times \mathbb{R}^m \mapsto J(x) - \langle \Lambda, g(x) \rangle$. Soit $x_* \in U$ un minimum du problème $\mathcal{P}_{J,g}$.

Si la différentielle $dg(x_*)$ est surjective, alors il existe un $\Lambda_* \in \mathbb{R}^m$ tel que (x_*, Λ_*) soit un point critique du lagrangien $\mathcal{L}_{J,g}$, i. e.

$$\partial_{x_j} J(x_*) = \langle \Lambda_*, \partial_{x_j} g(x_*) \rangle, \quad j = 1, \dots, n, \quad g(x_*) = 0,$$

soit

$$(5) \quad \nabla J(x_*) = \langle \Lambda_*, \nabla g(x_*) \rangle, \quad g(x_*) = 0.$$

Le multiplicateur $\Lambda_* \in \mathbb{R}^m$ est unique.

△ REMARQUES 2.4.

- (1) Si g est numérique, la condition de surjectivité signifie simplement la non nullité de dg_{x_*} , i. e. que x_* n'est pas un point critique de g . Le multiplicateur Λ_* est scalaire et, après avoir pris $\lambda_* = \Lambda_*$, la condition (5) s'écrit simplement $\nabla J(x_*) = \lambda_* \nabla g(x_*)$.
- (2) Les gradients ∇J et ∇g sont orthogonaux aux courbes de niveau de J et g respectivement : ainsi, si x_* est extremum de J sous la contrainte g et les gradients $\nabla J(x_*), \nabla g(x_*)$ non nuls, les courbes de niveau de J et g sont tangentes en x_* , comme l'illustrent les figures II.2, II.4 et ??.
- (3) Les gradients $\nabla g_1(x_*), \dots, \nabla g_m(x_*)$ sont linéairement indépendants si et seulement si la différentielle $dg(x_*)$ est surjective, comme l'exprime le lemme général suivant.

LEMME 2.2: Soit B matrice d'ordre (m, n) représentant un opérateur de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Notons par b_1, \dots, b_m ses m lignes considérées comme vecteurs de \mathbb{R}^n . Alors B est surjectif si et seulement si la famille (b_1, \dots, b_m) est libre.

DÉMONSTRATION. L'identité

$$\langle u, Bv \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle {}^T B u, v \rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^n$$

établit l'égalité $\ker {}^T B = (\text{Im } B)^\perp$

$$u \in \ker {}^T B \iff {}^T B u = 0 \iff \langle {}^T B u, v \rangle = 0, \forall v \iff \langle u, Bv \rangle = 0, \forall v \iff u \in (\text{Im } B)^\perp,$$

soit l'équivalence ${}^T B$ injective et B surjective ($\text{Im } B = \mathbb{R}^m$ est équivalent à $(\text{Im } B)^\perp = 0$). La famille (b_1, \dots, b_m) est l'image par ${}^T B$ de la base canonique de \mathbb{R}^m , elle est donc libre si et seulement si ${}^T B$ injective. □

Si B est surjective, son noyau est l'orthogonal $\text{Vect}(b_1, \dots, b_m)^\perp$, de dimension $n - m$ puisque $\text{Vect}(b_1, \dots, b_m)$ est de dimension m .

- (4) Soit E un espace vectoriel, U un sous-espace engendré par b_1, \dots, b_m et $w \in E$. Supposer que tout u tel que $\langle u, b_i \rangle = 0$ pour $i = 1, \dots, m$ vérifie $\langle u, w \rangle = 0$, c'est exprimer l'appartenance de w à l'orthogonal de l'orthogonal de U , soit $w \in (U^\perp)^\perp$. Vu que $(U^\perp)^\perp = U$, on en déduit que $w \in U$, *i. e.* w est combinaison linéaire des b_i : $w = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m$: si la famille (b_1, \dots, b_m) est libre, le m -uplet de coefficients $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ est unique. ∇

▷ EXEMPLES 2.6.

2.6.1 Un consommateur a la fonction d'utilité ¹²

$$J_\alpha(x_1, x_2) = \alpha_1 \ln(x_1 - x_1^0) + \alpha_2 \ln(x_2 - x_2^0), \quad x_1 > x_1^0, x_2 > x_2^0,$$

où $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ représente des seuils minima de consommation. La contrainte d'ordre budgétaire porte sur le budget ¹³ $B = p_1 x_1 + p_2 x_2$. Les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, p_1, p_2, B$ sont strictement positifs ¹⁴. Le lagrangien est

$$\mathcal{L}_{J,g} : (x, \lambda) \in (\mathbb{R}_*^+)^2 \times \mathbb{R} \mapsto \alpha_1 \ln(x_1 - x_1^0) + \alpha_2 \ln(x_2 - x_2^0) - \lambda(B - p_1 x_1 - p_2 x_2),$$

avec la condition de surjectivité de la différentielle dg de la contrainte $g(x) = B - p_1 x_1 - p_2 x_2$ bien remplie. La condition du premier ordre au point de minimum $x_* = (x_{1*}, x_{2*})$ pour le problème d'optimisation

$$\max_{p_1 x_1 + p_2 x_2 = B} J_\alpha(x_1, x_2)$$

est l'existence de λ_* tel que (x_*, λ_*) est un point critique du lagrangien $\mathcal{L}_{J,g}$, *i. e.* annulant les dérivées partielles

$$\frac{\alpha_1}{x_{1*} - x_1^0} - \lambda_* p_1, \quad \frac{\alpha_2}{x_{2*} - x_2^0} - \lambda_* p_2, \quad p_1 x_{1*} + p_2 x_{2*} - B,$$

d'où, si $B^0 = p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0$,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \lambda_*(B - B^0),$$

soit finalement

$$\lambda_* = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{B - B^0}, \quad x_* = \left(x_1^0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{B - B^0}{p_1}, x_2^0 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{B - B^0}{p_2} \right).$$

Ce point est effectivement le point de maximum du programme contraint : si le point (x_1, x_2) admissible (*i. e.* sur un segment de la droite $B = p_1 x_1 + p_2 x_2$) tend vers l'extrémité portée par l'axe vertical, $x_1 \rightarrow x_1^0$ par valeurs supérieures et $J(x_1, x_2) \rightarrow -\infty$. Ainsi le maximum est à chercher sur un compact du segment intersection du quadrant $\{x_1 > x_1^0, x_2 > x_2^0\}$ et de la droite $p_1 x_1 + p_2 x_2$: ce point de maximum existe bel et bien et l'unicité du point critique du lagrangien indique que ce point critique correspond exactement au point de maximum.

2.6.2 Soit une production avec n intrants x_1, \dots, x_n à coûts unitaires respectifs π_1, \dots, π_n et avec fonction de production $J(x)$ où $x = (x_1, \dots, x_n)$: on cherche à minimiser

12. En prenant la fonction d'utilité $\tilde{J}_\alpha = e^{J_\alpha}$, on retrouve, à translation près sur les variables de décision, la fonction de Cobb-Douglas $U_{CD}^{\alpha_1 \alpha_2}$: la fonction exponentielle étant monotone, les extrema contraints de \tilde{J}_α et J_α sont identiques. Cependant, la fonction d'utilité J_α est concave pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, alors que celle de Cobb-Douglas ne l'est que pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 \in [0, 1]$.

13. Cette utilité du consommateur à maximiser avec des contraintes budgétaires a été exprimée en ces termes par Marshall.

14. le traitement avec n variables de décision est tout aussi possible.

le coût de production $\pi(x) = \langle \pi, x \rangle = \sum_{i=1}^n \pi_i x_i$ à un niveau de production P , d'où le problème d'optimisation

$$\min_{J(x)=P} \langle \pi, x \rangle.$$

On considère comme J la fonction de production de Cobb-Douglas $U_{CD}^\alpha(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ (cf. Figure II.2 pour le cas $n = 2$).

Ce programme a une solution : si $m \rightarrow \infty$ sur l'isoquante $J(m) = P$, une des coordonnées tend vers $+\infty$; il en est de même si une des coordonnées de m tend vers 0 (il en existe alors une autre qui tend vers $+\infty$ vu la forme de la contrainte). Ainsi le coût (somme de termes positifs non nuls) tend vers $+\infty$. D'où la recherche du point de minimum sur un borné de l'isoquante, point qui est à trouver parmi les x_* , première coordonnée d'un point critique (x_*, λ_*) du lagrangien.

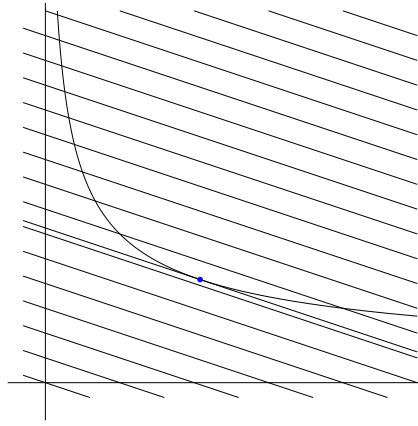


FIGURE II.2. Les courbes de niveau de la fonction de coût $K + 3L$, l'isoquante $K^{1/3}L^{2/3} = 1.587$ avec la tangence au point minimum entre cette isoquante et la droite de coût minimum : les gradients ∇J et ∇g y sont colinéaires.

Cherchons donc les points critiques du lagrangien $\mathcal{L}(x, \lambda) = \langle \pi, x \rangle - \lambda(J(x) - P)$ soit

$$\pi_i = \lambda_* \partial_{x_i} J(x_*) = \lambda_* \alpha_i J(x_*) x_{*i}^{-1} = P \lambda_* \alpha_i x_{*i}^{-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

avec la contrainte de production $P = J(x_*)$. Ainsi $x_{*i} = P \lambda_* \alpha_i / \pi_i$ soit

$$P = \prod_{i=1}^n (P \lambda_* \alpha_i / \pi_i)^{\alpha_i} = (P \lambda_*)^{\sum_k \alpha_k} \prod_{i=1}^n (\alpha_i / \pi_i)^{\alpha_i}$$

et donc

$$(6) \quad \lambda_* = \left[P^{1-\sum_k \alpha_k} \prod_{i=1}^n (\pi_i / \alpha_i)^{\alpha_i} \right]^{(\sum_k \alpha_k)^{-1}} = P^{(\sum_k \alpha_k)^{-1}-1} \left[\prod_{i=1}^n (\pi_i / \alpha_i)^{\alpha_i} \right]^{(\sum_k \alpha_k)^{-1}}$$

avec

$$(7) \quad x_{*i} = P \lambda_* \alpha_i / \pi_i = \frac{P \alpha_i}{\pi_i} \left[P^{1-\sum_k \alpha_k} \prod_{\ell=1}^n (\pi_\ell / \alpha_\ell)^{\alpha_\ell} \right]^{(\sum_k \alpha_k)^{-1}} = \frac{\alpha_i}{\pi_i} \left[P \prod_{\ell=1}^n (\pi_\ell / \alpha_\ell)^{\alpha_\ell} \right]^{(\sum_k \alpha_k)^{-1}}$$

2.6.3 Soit A matrice symétrique inversible d'ordre n , $\ell \in \mathbb{R}^n$, $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire représentée par les vecteurs $b_j \in \mathbb{R}^m, j = 1, \dots, m$ ($Bx = (\langle b_j, x \rangle_{\mathbb{R}^n})$) et $k \in \mathbb{R}^m$. On suppose B surjective, i. e. les vecteurs b_j linéairement indépendants : l'opérateur ${}^T B$ associe b_j au j -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^m est injectif¹⁵. De plus on suppose la restriction de A à $\ker B = (\mathfrak{S}m {}^T B)^\perp$ définie positive.

Le problème de minimisation

$$(8) \quad \min_{Bx=k} \left(\frac{\langle Ax, x \rangle}{2} + \langle \ell, x \rangle \right)$$

a comme lagrangien associé

$$(9) \quad \mathcal{L}(x, \Lambda) = \frac{\langle Ax, x \rangle}{2} + \langle \ell, x \rangle - \langle \Lambda, Bx - k \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n, \Lambda \in \mathbb{R}^m$$

dont les points critiques (x_*, Λ_*) sont donnés par le système

$$0 = Ax_* + \ell - {}^T B \Lambda_*, \quad 0 = Bx_* - k.$$

La première équation se réécrit

$$(10) \quad x_* = A^{-1} \left({}^T B \Lambda_* - \ell \right)$$

et la seconde, qui est la contrainte $Bx_* = k$, donne $BA^{-1} {}^T B \Lambda_* = BA^{-1} \ell + k$. L'application $BA^{-1} {}^T B$ est injective : si $BA^{-1} {}^T B x = 0$, alors $v = A^{-1} {}^T B x$, vecteur de $\ker B$, est nul puisque $\langle Av, v \rangle = \langle {}^T B x, A^{-1} {}^T B x \rangle = \langle x, BA^{-1} {}^T B x \rangle = \langle x, Bv \rangle = 0$ et la restriction de A à $\ker B$ a été supposée définie positive, par suite $0 = Av = {}^T B x$ et $x = 0$ vu l'injectivité de ${}^T B$. Il en résulte que $BA^{-1} {}^T B$ est un isomorphisme et le multiplicateur Λ_* est donné par

$$\Lambda_* = \left(BA^{-1} {}^T B \right)^{-1} (BA^{-1} \ell + k)$$

et le point critique sous contrainte x_* par

$$x_* = A^{-1} \left({}^T B \left(BA^{-1} {}^T B \right)^{-1} (BA^{-1} \ell + k) - \ell \right).$$

2.6.4 Soit le cercle \mathcal{C} de rayon 1 et centré à l'origine et la droite $\mathcal{D}_L = \{x + y = L\}$ avec $L > \sqrt{2}$ (ce qui assure que le cercle \mathcal{C} et la droite \mathcal{D}_L ne s'intersectent pas). Considérons la minimisation de la distance $d(P, Q)$ où P, Q sont deux points du plan, $P = (a, b)$ sur le cercle \mathcal{C} et $Q = (x, y)$ sur la droite \mathcal{D}_L . En considérant le carré $d(P, Q)^2$ pour éviter une racine carrée, nous obtenons le problème d'optimisation sous contrainte

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}_L}) \quad \min_{a^2+b^2=1, x+y=L} ((x-a)^2 + (y-b)^2).$$

La fonction des contraintes $(a, b, x, y) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (a^2 + b^2 - 1, x + y - L) \in \mathbb{R}^2$ a comme différentielle représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 2a & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, matrice de rang 2 sur le lieu des contraintes où un des coefficients a, b est non nul : l'hypothèse de

15. Si ${}^T B x = 0$, alors $0 = \langle {}^T B x, y \rangle = \langle x, B y \rangle$, soit, par surjectivité de B , $\langle x, z \rangle$ pour tout z dans \mathbb{R}^m et par suite $x = 0$. L'injectivité de ${}^T B$ résulte de la trivialité du noyau $\ker {}^T B = \{x : {}^T B x = 0\}$.

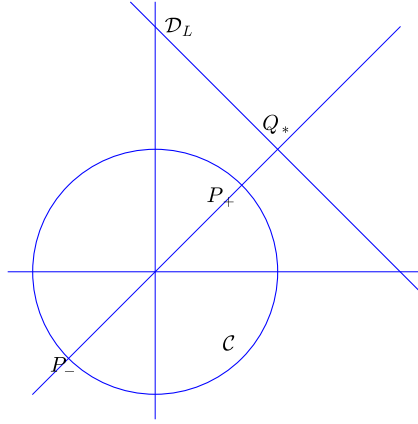


FIGURE II.3. Le cercle $\mathcal{C} = \{a^2 + b^2 = 1\}$, la droite $\mathcal{D}_L = \{x + y = L\}$ et les points critiques.

surjectivité de $dg(x_*)$ est bien satisfaite et assure la régularité du programme sous contrainte $(\mathcal{P}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}_L})$. Le lagrangien est

$$\mathcal{L}(a, b, x, y, \lambda, \mu) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - \lambda(1 - a^2 - b^2) - \mu(x + y - L)$$

dont l'annulation du gradient donne le système de six équations à six inconnues

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = 2(a - x) + 2\lambda a, & 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = 2(b - y) + 2\lambda b, \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2(x - a) - \mu, & 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2(y - b) - \mu, \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = a^2 + b^2 - 1, & 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = -x - y + L. \end{aligned}$$

résoluble aisément : vu que $\lambda = 0$ n'est pas possible (on aurait $x = a$ et $y = b$ ce qui est exclu), on a $\mu = 2\lambda a = 2\lambda b$, soit $a = b$; en résulte $x = y$: on a ainsi $x = y = L/2$ puis $a = b = \pm 1/\sqrt{2}$, μ et λ sont alors déterminés comme suit :

$$a_* = b_* = \pm 1/\sqrt{2}, \quad x_* = y_* = L/2, \quad \lambda_* = \pm L/\sqrt{2} - 1, \quad \mu_* = L \pm \sqrt{2}.$$

En évitant les coordonnées, on peut exprimer le lagrangien suivant

$$\mathcal{L}(P, Q, \lambda, \mu) = \|P - Q\|^2 - \lambda(1 - \|P\|^2) - \mu\langle Q - Q_0, v \rangle$$

où on a introduit $Q_0 = (L/2, L/2)$ le point intersection de la droite \mathcal{D} et de la diagonale $\mathcal{D} = \{x = y\}$ ainsi que $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ un vecteur unitaire de la droite \mathcal{D}_L , avec P sur le cercle \mathcal{C} et Q sur la droite \mathcal{D}_L . On a alors

$$\nabla_P \mathcal{L} = 2(P - Q) + 2\lambda P, \quad \nabla_Q \mathcal{L} = 2(Q - P) - \mu v$$

Soit $(P_*, Q_*, \lambda_*, \mu_*)$ critique pour \mathcal{L} . Sur le lieu des contraintes, P_* et Q_* sont distincts (le cercle et la droite ne s'intersectent pas), donc λ_* et μ_* ne sont pas nuls et $P_* - Q_*$, P_* et v sont colinéaires. En résulte la localisation des deux paires de points critiques, qu'il est possible d'analyser géométriquement :

- $(P_+ = v, Q_* = 2^{-1/2}Lv)$ point de minimum : une variation de (P, Q) au voisinage de (P_+, Q_*) accroît la distance $d(P, Q)$;

- $(P_- = -v, Q_*)$ point selle : si P_- est fixe, une variation du point Q au voisinage de Q_* accroît la distance $d(P_-, Q)$, alors que si Q_* est fixe, une variation de P au voisinage de P_- diminue la distance $d(P, Q_*)$.

2.6.5 Soit J, g telles que $J(x, y) = x$ et $g(x, y) = x^3 - y^2$. Alors le minimum de $J_{\{g=0\}}$ est à l'origine avec $\nabla g_{(0,0)} = (0, 0)$ et $\nabla J_{(0,0)} = (1, 0) \neq 0$. L'hypothèse de non nullité de ∇g_{x_*} du théorème 2.3 est vraiment nécessaire!

2.6.6 Le programme minimisant $J(x, y) = x + y$ dans \mathbb{R}^2 avec les deux contraintes $g_1 : (x - 1)^2 + y^2 = 1$ et $g_2 : (x - 2)^2 + y^2 = 4$ n'a pas de multiplicateurs de Lagrange en le point admissible (le seul d'ailleurs : si on examine ce programme dans \mathbb{R}^3 , l'ensemble contraint est une droite, où il n'y a pas plus de multiplicateurs lagrangiens). \triangleleft

Démonstration du théorème 2.3. Commençons par le cas où la contrainte $g = 0$ est affine (comme c'est le cas en *programmation linéaire*) : il existe $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $k \in \mathbb{R}^m$ tels que $g(x) = Bx + k$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. La différentielle de g est constante, avec $dg(y) = B$ pour $y \in \mathbb{R}^n$. Vu que x_* vérifie la contrainte $g(x_*) = Bx_* + k = 0$ on peut réécrire le programme sous la forme

$$\min_{\substack{x \in U \\ B(x-x_*)=0}} [J(x)]$$

Soit $v \in \ker B$. La droite $D_{x_*,v}$ passant par x_* et de direction v est paramétrée suivant $t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma_{x_*,v}(t) = x_* + tv$: cette droite est incluse dans le lieu des contraintes $\{x : B(x - x_*) = 0\}$ et passe par le point de minimum x_* . Ainsi la restriction de J à un voisinage $\gamma_{x_*,v}([- \varepsilon, \varepsilon])$ de x_* sur la droite $D_{x_*,v}$ a un minimum en $x_* : t = 0$ est donc point critique de $J \circ \gamma_{x_*,v}$, soit

$$0 = \frac{dJ(\gamma_{x_*,v})}{dt}(0) = \langle \nabla J(x_*), \gamma'_{x_*,v}(0) \rangle = \langle \nabla J(x_*), v \rangle.$$

Ainsi, le gradient $\nabla J(x_*)$ est orthogonal à tout vecteur de $\ker B = (\text{Im } {}^T B)^\perp$: comme il a été souligné dans la remarque 2.4.4, c'est un vecteur de $((\text{Im } {}^T B)^\perp)^\perp = \text{Im } {}^T B$, ainsi $\nabla J(x_*)$ est une combinaison linéaire des b_1, \dots, b_m , et ce de manière unique.

La preuve du cas général fait appel au théorème des fonctions implicites qui donne une vision analytico-géométrique du lieu contraint $g = 0$ au voisinage de x_* , sous couvert de l'hypothèse de surjectivité de $dg(x_*) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ainsi, le sous-espace linéaire $\ker dg(x_*)$ coïncide avec l'ensemble des vecteurs tangents $v = \gamma'(0)$ des courbes $\gamma : t \in [-\eta, \eta] \mapsto \gamma(t)$ tracées sur le lieu contraint $\{g = 0\}$ et passant par x_* avec $\gamma(0) = x_*$. Le caractère critique de l'origine $t = 0$ des fonctions $J \circ \gamma$ donne la condition $\langle \nabla J(x_*), v \rangle = 0$ pour tout $v \in \ker dg(x_*)$, ce qui permet de conclure comme ci-dessus à $\nabla J(x_*) \in \text{Vect}(\nabla g_1(x_*), \dots, \nabla g_m(x_*))$. \square

Comme dans le cas sans contrainte, l'étude de la fonction au deuxième ordre donne, pour un point critique, une autre condition nécessaire satisfaite par un minimum et une condition suffisante impliquant la qualité de minimum :

THÉORÈME 2.4: Soit $J : U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ des fonctions de classe \mathcal{C}^2 , $\mathcal{P}_{J,g}$ le problème $\min_{g(x)=0} J(x)$ et $\mathcal{L}_{J,g}$ le lagrangien défini par $\mathcal{L}_{J,g} : (x, \Lambda) \in U \times \mathbb{R}^m \mapsto J(x) - \langle \Lambda, g(x) \rangle$. Soit $x_* \in U$ avec la différentielle $dg(x_*)$ surjective. Il est supposé que le lagrangien $\mathcal{L}_{J,g}$ est critique en (x_*, Λ_*) .

(i) Si x_* est un minimum local de J sous la contrainte $g(x) = 0$, la hessienne $\text{Hess}_x(\mathcal{L}_{J,g})|_{\Lambda=\Lambda_*}^{x=x_*}$ restreinte à l'espace $\ker dg_{x_*}$ est une forme quadratique positive.

(ii) Si la hessienne $\text{Hess}_x(\mathcal{L}_{J,g})|_{\Lambda=\Lambda_*}^{x=x_*}$ restreinte au sous-espace $\ker dg_{x_*}$ est une forme quadratique définie positive, alors x_* est un minimum local strict de J sous la contrainte $g = 0$.

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{L} le lagrangien défini pour $x \in U, \Lambda \in \mathbb{R}^m$ suivant $\mathcal{L}(x, \Lambda) = J(x) - \langle \Lambda, g(x) \rangle$, dont le gradient $\nabla \mathcal{L}_{x_*, \Lambda_*} = (\nabla_x \mathcal{L}_{x_*, \Lambda_*}, \nabla_\Lambda \mathcal{L}_{x_*, \Lambda_*})$ est nul. La formule de Taylor à l'ordre 2 pour \mathcal{L} pour une variation autour de x_* sans variation en Λ_* s'écrit

$$\mathcal{L}(x_* + h, \Lambda_*) = \mathcal{L}(x_*, \Lambda_*) + \frac{\text{Hess}_x(\mathcal{L})_{x_*, \Lambda_*}[h]}{2} + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

pour h au voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n .

Commençons par le cas où g est linéaire comme dans la démonstration de la proposition précédente, *i. e.* de la forme $g(x) = Bx - k$ avec $dg(x) = B$.

Le lieu contraint est défini par l'équation $B(x - x_*) = 0$: il contient x_* et aussi $x_* + h$ pour tout vecteur $h \in \ker B$, ce qui implique $\mathcal{L}(x_* + h, \Lambda_*) = J(x_* + h, \Lambda_*)$ et la nouvelle écriture du développement de Taylor précédent suivant

$$(11) \quad J(x_* + h) = J(x_*) + \frac{\text{Hess}_x(\mathcal{L})_{x_*, \Lambda_*}[h]}{2} + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$

En considérant $x_* + th$ avec t petit et toujours $h \in \ker B$, vu que x_* est un minimum du programme (4)

$$0 \leq J(x_* + th) - J(x_*) = t^2 \left[\frac{\text{Hess}_x(\mathcal{L})_{x_*, \Lambda_*}[h]}{2} + \|h\|^2 \varepsilon(th) \right]$$

soit, en faisant $t \rightarrow 0$, $\text{Hess}(\mathcal{L})_{x_*}[h] \geq 0$: la forme quadratique $\text{Hess}(\mathcal{L})_{x_*}$ en restriction au sous-espace $\ker dg_{x_*}$ est positive.

D'autre part, si la hessienne $\text{Hess}(\mathcal{L})_{x_*}$ induit sur $\ker dg_{x_*}$ une forme quadratique définie positive, il existe $m > 0$ tel que

$$\text{Hess}(\mathcal{L})_{x_*}[h] \geq 2m\|h\|^2, \quad h \in \ker dg_{x_*}$$

alors, pour h non nul dans $\ker dg_x$ dans le développement (11)

$$J(x_* + h) - J(x_*) = \|h\|^2 \left[\frac{\text{Hess}(\mathcal{L})_{x_*}(h/\|h\|)}{2} + \varepsilon(h) \right] \geq \|h\|^2 [m + \varepsilon(h)] > 0$$

la dernière égalité valant pour h assez petit. Tout point du lieu des contraintes $\{B(x - x_*) = 0\}$ au voisinage de x_* étant de la forme $h + x_*$, on conclut que x_* est un minimum local de J sous la contrainte $g = 0$.

Le cas g non linéaire se traite comme précédemment en faisant appel au théorème des fonctions implicites et à des manipulations convenables. \square

\triangle REMARQUES 2.5.

(1) La formule de Taylor

$$J(x_* + h) = J(x_*) + \langle \nabla_{x_*} J, h \rangle + \frac{\text{Hess}_x(J)_{x_*}[h]}{2} + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

a le terme $\langle \nabla J_{x_*}, h \rangle$ d'ordre 1 (non nécessairement nul) qui ne permet pas de faire l'analyse précédente.

(2) Si g est affine (comme c'est le cas en *programmation linéaire*), alors la hessienne $\text{Hess}_x(\langle \Lambda, g \rangle)$ est nulle, d'où $\text{Hess}_x(\mathcal{L}_{J,g}) = \text{Hess}_x(J)$, ce qui n'est pas général pour des g non-linéaires. ∇

Une caractérisation de la positivité de la forme quadratique $\text{Hess}_{x_*}(\mathcal{L})$ restreinte à $\ker dg_{x_*}$ en termes de signes de certains mineurs principaux dominants, analogue à la proposition 2.2, est fournie par le théorème suivant (prouvé¹⁶ dans l'appendice A).

THÉORÈME 2.5: *Soit A matrice symétrique d'ordre n et q_A la forme quadratique associée ($q_A(v) = \langle Av, v \rangle$ pour $v \in \mathbb{R}^n$), B matrice d'ordre (m, n) avec $m \leq n$, de rang m et dont le mineur diagonal dominants maximum $B_{mm} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ est inversible, $q_{A,B}$ la forme quadratique sur $K_B = \ker B$ obtenue par restriction de q_A sur K_B .*

La forme $q_{A,B}$ est définie positive (négative resp.) si et seulement si les mineurs principaux dominants de la matrice

$$(12) \quad \begin{pmatrix} 0_m & B \\ {}^\top B & A \end{pmatrix}$$

d'ordre $2m + r$ avec $r = 1, \dots, n - m$ sont non nuls du signe de $(-1)^m$ (du signe de $(-1)^{m+r}$ resp.).

△ REMARQUES 2.6.

- (1) La matrice (12) est, en ordonnant les variables de Lagrange λ avant les variables de décision x la matrice hessienne $\text{Hess}_{\Lambda, x} \mathcal{L}_q$ du lagrangien

$$\mathcal{L}_q(x, \Lambda) = \frac{\langle Ax, x \rangle}{2} + \langle \Lambda, Bx - k \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n, \Lambda \in \mathbb{R}^m$$

associé au modèle quadratique du programme avec contrainte d'égalité

$$(q) \quad \inf_{Bx=k} \left[\frac{\langle Ax, x \rangle}{2} \right].$$

Les mineurs principaux dominants sont des déterminants de hessienne partielle $\text{Hess}_{\Lambda, x_1, \dots, x_{m+r}} \mathcal{L}_q$ pour $r = 1, \dots, n - m$.

- (2) Dans le cas général, et au vu du théorème 2.4, la matrice analogue à la matrice (12) est

$$(13) \quad \begin{pmatrix} 0_m & dg(x_*) \\ {}^\top dg(x_*) & \text{Hess}_x \mathcal{L}(x_*, \Lambda_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_m & {}^\top \nabla g(x_*) \\ \nabla g(x_*) & \text{Hess}_x \mathcal{L}(x_*, \Lambda_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_m & \partial_{\lambda_k x_j} \mathcal{L} \\ \partial_{x_j \lambda_k} \mathcal{L} & \partial_{\lambda_k \lambda_\ell} \mathcal{L} \end{pmatrix}$$

dite *matrice bordante* de la hessienne $\text{Hess}_x \mathcal{L}$: la matrice $\text{Hess}_x \mathcal{L}$ est bordée par la matrice dg . La matrice

$$(14) \quad \begin{pmatrix} \text{Hess}_x \mathcal{L}(x_*, \Lambda_*) & {}^\top dg(x_*) \\ dg(x_*) & 0_m \end{pmatrix}$$

est souvent utilisée de manière équivalente : on passe de l'une à l'autre en échangeant des lignes et des colonnes (correspondantes), ce qui ne modifie pas leurs déterminants. Les déterminants principaux de la forme (13) d'ordre au moins $2m + r$ avec $1 \leq r \leq n - m$ s'obtiennent à partir de (14) en omettant des lignes et colonnes correspondant aux variables de décision x_i d'indice $m + r + 1, \dots, n$.

- (3) Ainsi, les déterminants d_{2m+r} de la hessienne bordée intervenant dans les conditions du deuxième ordre d'un problème d'optimisation sous contrainte d'égalité sont des déterminants de matrice hessienne pour les lagrangiens relativement aux variables de décision x_1, \dots, x_s avec $s \geq 2m + 1$ et les variables lagrangiennes

16. La preuve de ce résultat, telle que développée dans l'appendice, est exposée dans l'article : G. DEBREU, *Definite and semidefinite quadratic forms*, *Econometrica*, 20#2 (1952) 295-300. C'est la seule référence sur cette preuve connue à l'auteur de ces notes.

$\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. La condition (technique) $|d_{(x_1, \dots, x_m)}g(x_*)| \neq 0$ est une condition de régularité imposée pour l'application légitime du théorème des fonctions implicites, théorème qui sous-tend l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange. ∇

Le théorème 2.5 prend la forme suivante pour la forme quadratique $\text{Hess}_{x, \Lambda} \mathcal{L}$ mentionnée dans la seconde partie du théorème 2.4 :

PROPOSITION 2.3: Soit $J : U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $(\partial_{x_i} g_j)_{1 \leq i, j \leq m}$ soit inversible et $\mathcal{L}_{J, g}$ la fonction lagrangienne $(x, \Lambda) \in U \times \mathbb{R}^m \mapsto J(x) - \langle \Lambda, g(x) \rangle$. La restriction de $\text{Hess}_x \mathcal{L}_{J, g}$ au sous-espace $\ker dg$ des directions de contrainte est définie positive (resp. négative) si et seulement si les $n - m$ déterminants

$$(15) \quad d_{2m+r} = \det \text{Hess}_{x_1, \dots, x_{m+r}, \lambda_1, \dots, \lambda_m} \mathcal{L}_{J, g}, \quad r = 1, \dots, n - m$$

sont non nuls et du signe de $(-1)^m$ (resp. du signe de $(-1)^{m+r}$).

La combinaison de la condition (ii) du théorème 2.4 et le théorème 2.5 donne une condition suffisante de minimum local en terme des signes de certains mineurs principaux dominants (une conclusion synthétique de cette section de programmes avec contraintes d'égalité) :

THÉORÈME 2.6: Soit $J : U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ des fonctions de classe \mathcal{C}^2 , $\mathcal{P}_{J, g}$ le problème $\min_{g(x)=0} J(x)$ et $\mathcal{L}_{J, g}$ le lagrangien défini par $\mathcal{L}_{J, g} : (x, \Lambda) \in U \times \mathbb{R}^m \mapsto J(x) - \langle \Lambda, g(x) \rangle$.

On suppose que la matrice $(\partial_{x_i} g_j)_{1 \leq i, j \leq m}$ soit inversible. Soit $(x_*, \Lambda_*) \in U \times \mathbb{R}^m$ un point critique du lagrangien $\mathcal{L}(x, \Lambda) = J(x) - \langle \Lambda, g(x) \rangle$. Si les $n - m$ déterminants

$$(16) \quad d_{2m+k} = \det \text{Hess}_{x_1, \dots, x_{m+r}, \lambda_1, \dots, \lambda_m} \mathcal{L}_{J, g}, \quad r = 1, \dots, n - m$$

sont non nuls et du signe de $(-1)^m$ (resp. du signe de $(-1)^{m+r}$), alors x_* est un point de minimum (resp. maximum) local strict du programme $\mathcal{P}_{J, g}$.

▷ EXEMPLES 2.7.

2.7.1 Soient m, n entiers avec $m < n$, $J_{\pm} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\pm J_{\pm}(x) = x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la contrainte définie par l'annulation de $g(x) = (x_1, \dots, x_m) = x(m) \in \mathbb{R}^m$. On a donc pour la hessienne du lagrangien $J_{\pm}(x) - \langle \Lambda, x(m) \rangle$

$$\text{Hess}_{\Lambda, x} \mathcal{L}_{J_{\pm}, g} = \begin{pmatrix} 0_m & I_m & 0_{m, n-m} \\ I_m & 0_m & 0_{m, n-m} \\ 0_{m, n-m} & 0_{m, n-m} & \pm 2I_{n-m} \end{pmatrix}$$

ou encore, si on prend l'ordre $(x_1, \lambda_1, \dots, x_m, \lambda_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ des variables x, Λ , la forme diagonale par blocs

$$\text{Hess}_{x_1, \lambda_1, \dots, x_m, \lambda_m, x_{m+1}, \dots, x_n} \mathcal{L}_{J_{\pm}, g} = \begin{pmatrix} D_m(K) & 0_{2m, n-2m} \\ 0_{n-2m, 2m} & \pm 2I_{n-2m} \end{pmatrix}$$

où $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice d'ordre 2 de la forme quadratique $(u, v) \rightarrow 2uv$, $D_m(K)$ la matrice diagonale par blocs K d'ordre $2m$. La fonction J_+ (resp. J_-) est l'exemple le plus simple d'un minimum (resp. maximum) local strict pour un programme non linéaire avec contraintes d'égalité : les déterminants d_{2m+r} du type (16) sont du signe de $(-1)^m$ pour J_+ et du signe de $(-1)^{m+r}$ pour J_- .

2.7.2 Les programmes $P : \inf_{z=0} xy$ et $P_{\pm} : \inf_{z=0} [\pm(x^2 - y^2)]$ ont $(0, 0, 0)$ comme point critique de type selle. Les lagrangiens associés $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = xy + \lambda z$ et $\mathcal{L}_{\pm,a}(x, y, z, \lambda) = \pm(x^2 - ay^2) + \lambda z$ ont comme hessiennes

$$\text{Hess}_{\lambda,z,x,y} \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Hess}_{\lambda,z,x,y} \mathcal{L}_{\pm,a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 2a \end{pmatrix}$$

de déterminants

$$d_4 = \det \text{Hess}_{\lambda,z,x,y} \mathcal{L} = 1, \quad d_3 = \det \text{Hess}_{\lambda,z,x} \mathcal{L} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$d_4 = \det \text{Hess}_{\lambda,z,x,y} \mathcal{L}_{\pm} = 4a, \quad d_3 = \det \text{Hess}_{\lambda,z,x} \mathcal{L}_{\pm,a} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 2a \end{vmatrix} = \pm 2a.$$

Il n'y a pas de caractérisation des points selles en termes de déterminants non nuls et de leurs signes. \triangleleft

Décrivons en basses dimensions les différents cas, synthétisés dans le tableau 1.

— Le cas $n = 2, m = 1$ correspond à l'optimisation d'une fonction restreinte à une courbe du plan : pour un minimum, on a l'unique condition suffisante $d_3(x_*) < 0$ où

$$d_3 = \det \text{Hess}_{x,y,\lambda}(\mathcal{L}) = \begin{vmatrix} \partial_{xx}\mathcal{L} & \partial_{xy}\mathcal{L} & \partial_x g \\ \partial_{yx}\mathcal{L} & \partial_{yy}\mathcal{L} & \partial_y g \\ \partial_x g & \partial_y g & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \partial_x g & \partial_y g \\ \partial_x g & \partial_{xx}\mathcal{L} & \partial_{xy}\mathcal{L} \\ \partial_y g & \partial_{yx}\mathcal{L} & \partial_{yy}\mathcal{L} \end{vmatrix}.$$

Il aura été supposé $\partial_x g \neq 0$.

— Le cas $n = 3, m = 1$ correspond à l'optimisation d'une fonction restreinte à une surface de l'espace à trois dimensions : la condition suffisante pour un minimum consiste en les conditions $d_4(x_*) < 0, d_3(x_*) < 0$ sur les déterminants

$$d_4 = \det \text{Hess}_{x,y,z,\lambda}(\mathcal{L}) = \begin{vmatrix} \partial_{xx}\mathcal{L} & \partial_{xy}\mathcal{L} & \partial_{xz}\mathcal{L} & \partial_x g \\ \partial_{yx}\mathcal{L} & \partial_{yy}\mathcal{L} & \partial_{yz}\mathcal{L} & \partial_y g \\ \partial_{xz}\mathcal{L} & \partial_{yz}\mathcal{L} & \partial_{zz}\mathcal{L} & \partial_z g \\ \partial_x g & \partial_y g & \partial_z g & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \partial_x g & \partial_y g & \partial_z g \\ \partial_x g & \partial_{xx}\mathcal{L} & \partial_{xy}\mathcal{L} & \partial_{xz}\mathcal{L} \\ \partial_y g & \partial_{yx}\mathcal{L} & \partial_{yy}\mathcal{L} & \partial_{yz}\mathcal{L} \\ \partial_z g & \partial_{xz}\mathcal{L} & \partial_{yz}\mathcal{L} & \partial_{zz}\mathcal{L} \end{vmatrix}$$

$$d_3 = \det \text{Hess}_{x,y,\lambda}(\mathcal{L}) = \begin{vmatrix} \partial_{xx}\mathcal{L} & \partial_{xy}\mathcal{L} & \partial_x g \\ \partial_{yx}\mathcal{L} & \partial_{yy}\mathcal{L} & \partial_y g \\ \partial_x g & \partial_y g & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \partial_x g & \partial_y g \\ \partial_x g & \partial_{xx}\mathcal{L} & \partial_{xy}\mathcal{L} \\ \partial_y g & \partial_{yx}\mathcal{L} & \partial_{yy}\mathcal{L} \end{vmatrix}$$

sont suffisantes pour un minimum local strict. On aura supposé $\partial_x g(x_*)$ non nul.

— Le cas $n = 3, m = 2$ correspond à l'optimisation d'une fonction sur la courbe $\{g = 0, h = 0\}$ de l'espace à trois dimensions : la condition de minimum est unique, soit $d_5(x_*) > 0$, soit la positivité du déterminant d'ordre 5 $d_5 = \det \text{Hess}_{x,y,z,\lambda,\mu}(\mathcal{L})$ donné par

$$d_5 = \begin{vmatrix} \partial_{xx}\mathcal{L} & \partial_{xy}\mathcal{L} & \partial_{xz}\mathcal{L} & \partial_x g & \partial_x h \\ \partial_{yx}\mathcal{L} & \partial_{yy}\mathcal{L} & \partial_{yz}\mathcal{L} & \partial_y g & \partial_y h \\ \partial_{xz}\mathcal{L} & \partial_{yz}\mathcal{L} & \partial_{zz}\mathcal{L} & \partial_z g & \partial_z h \\ \partial_x g & \partial_y g & \partial_z g & 0 & 0 \\ \partial_x h & \partial_y h & \partial_z h & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \partial_x g & \partial_y g & \partial_z g \\ 0 & 0 & \partial_x h & \partial_y h & \partial_z h \\ \partial_x g & \partial_x h & \partial_{xx}\mathcal{L} & \partial_{xy}\mathcal{L} & \partial_{xz}\mathcal{L} \\ \partial_y g & \partial_y h & \partial_{yx}\mathcal{L} & \partial_{yy}\mathcal{L} & \partial_{yz}\mathcal{L} \\ \partial_z g & \partial_z h & \partial_{xz}\mathcal{L} & \partial_{yz}\mathcal{L} & \partial_{zz}\mathcal{L} \end{vmatrix}.$$

On aura supposé $\begin{vmatrix} \partial_x g & \partial_y g \\ \partial_x h & \partial_y h \end{vmatrix}$ non nul en x_* : g et h désignent les deux contraintes (numériques) de ce problème d'optimisation, avec lagrangien $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = J(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) - \mu h(x, y, z)$.

Notons les cas non couverts par le tableau où les énoncés généraux indiquent des points critiques soit dégénérés (un déterminant nul), soit de type selle (en dimension 2 avec une hessienne non dégénérée, le déterminant de la hessienne est alors négatif). Ces cas ne seront pas développés plus avant ici.

n	m	signe déterminant	optimum
1	0	$d_1 > 0$	minimum
1	0	$d_1 < 0$	maximum
2	0	$d_2 > 0, d_1 > 0$	minimum
2	0	$d_2 > 0, d_1 < 0$	maximum
2	1	$d_3 < 0$	minimum
2	1	$d_3 > 0$	maximum
3	0	$d_3 > 0, d_2 > 0, d_1 > 0$	minimum
3	0	$d_3 < 0, d_2 > 0, d_1 < 0$	maximum
3	1	$d_4 < 0, d_3 < 0$	minimum
3	1	$d_4 < 0, d_3 > 0$	maximum
3	2	$d_5 > 0$	minimum
3	2	$d_5 < 0$	maximum

TABLE 1. Des conditions suffisantes d'extremum en $n \leq 3$ variables de choix et sous $m = 1, \dots, n-1$ contraintes : l'indice r dans d_r fait référence à l'ordre du déterminant mentionné sous la notation d_r .

▷ EXEMPLES 2.8.

2.8.1 Dans l'exemple 2.6.1, le lagrangien de la fonction d'utilité $J(x_1, x_2) = \alpha_1 \log(x_1 - x_1^0) + \alpha_2 \log(x_2 - x_2^0)$ avec la contrainte $R = p_1 x_1 + p_2 x_2$ a pour matrice hessienne

$$\text{Hess}_{(x_1, x_2), \lambda} \mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{(x_1 - x_1^0)^2} & 0 & p_1 \\ 0 & -\frac{\alpha_2}{(x_2 - x_2^0)^2} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$$

de déterminant $p_1^2 \alpha_2 (x_2 - x_2^0)^{-2} + p_2^2 \alpha_1 (x_1 - x_1^0)^{-2} > 0$. Il s'agit bien d'un maximum. La hessienne $\text{Hess}_x J$ est définie négative et la fonction J strictement concave. Le théorème 3.3 (cf. infra) énonce que tout point critique d'une fonction concave définie sur un convexe est un maximum global.

2.8.2 Dans l'exemple 2.6.2 en deux variables, le lagrangien $\mathcal{L}(K, L, \lambda) = rK + sL - \lambda(K^\alpha L^\beta - P)$ a pour matrice hessienne

$$(17) \quad \text{Hess}_{(K, L), \lambda} \mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\lambda \alpha (\alpha - 1) K^{\alpha-2} L^\beta & -\lambda \alpha \beta K^{\alpha-1} L^{\beta-1} & -\alpha K^{\alpha-1} L^\beta \\ -\lambda \alpha \beta K^{\alpha-1} L^{\beta-1} & -\lambda \beta (\beta - 1) K^\alpha L^{\beta-2} & -\beta K^\alpha L^{\beta-1} \\ -\alpha K^{\alpha-1} L^\beta & -\beta K^\alpha L^{\beta-1} & 0 \end{pmatrix}$$

de déterminant

$$\begin{aligned}
\det \text{Hess}_{(K,L),\lambda} \mathcal{L} &= -\alpha\beta K^{3\alpha} L^{3\beta} \begin{vmatrix} \lambda(\alpha-1)K^{-2} & \lambda\beta K^{-1}L^{-1} & K^{-1} \\ \lambda\alpha K^{-1}L^{-1} & \lambda(\beta-1)L^{-2} & L^{-1} \\ \alpha K^{-1} & \beta L^{-1} & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\alpha\beta K^{3\alpha-2} L^{3\beta-2} \begin{vmatrix} \lambda(\alpha-1) & \lambda\beta & 1 \\ \lambda\alpha & \lambda(\beta-1) & 1 \\ \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\alpha\beta K^{3\alpha-2} L^{3\beta-2} \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \lambda\alpha & \lambda(\beta-1) & 1 \\ \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\alpha\beta(\alpha+\beta)\lambda K^{3\alpha-2} L^{3\beta-2}.
\end{aligned}$$

Ce déterminant est bien négatif au point critique (K_*, L_*, λ_*) (cf. (6) et (7)) du lagrangien. En ce point (unique), la hessienne $\text{Hess}_{K,L} \mathcal{L}$ restreinte au sous-espace $\ker d(K^\alpha L^\beta)$ vu que (K_*, L_*) est un minimum : ce calcul de déterminant indique qu'elle est en fait définie positive.

En dimension n quelconque, le hessien du lagrangien avec fonction d'objectifs $\sum_k p_j x_j$ avec contrainte $P = \prod x_i^{\alpha_i}$ se simplifie en considérant comme fonction de contraintes la fonction $\sum_i \alpha_i \log x_i - \log P$: la hessienne du lagrangien modifié est

$$\text{Hess}_x \tilde{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \lambda \frac{\alpha_1}{x_1^2} & 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha_1}{x_1} \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & \lambda \frac{\alpha_n}{x_n^2} & -\frac{\alpha_n}{x_n} \\ -\frac{\alpha_1}{x_1} & \dots & \dots & -\frac{\alpha_n}{x_n} & 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant $d_{n+1}(\lambda, (\alpha_i)_1^n, (x_i)_1^n)$, développé selon la première colonne, obéit à la relation de récurrence pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
d_{n+1}(\lambda, (\alpha_i)_1^n, (x_i)_1^n) &= \begin{vmatrix} \lambda \frac{\alpha_1}{x_1^2} & 0 & \dots & 0 & \frac{\alpha_1}{x_1} \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & \lambda \frac{\alpha_n}{x_n^2} & \frac{\alpha_n}{x_n} \\ \frac{\alpha_1}{x_1} & \dots & \dots & \frac{\alpha_n}{x_n} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \lambda \frac{\alpha_1}{x_1^2} d_n(\lambda, (\alpha_i)_2^n, (x_i)_2^n) + (-1)^{n+1} \frac{\alpha_1}{x_1} \begin{vmatrix} 0 & \lambda \frac{\alpha_2}{x_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & \lambda \frac{\alpha_n}{x_n^2} \\ \frac{\alpha_1}{x_1} & \dots & \dots & \frac{\alpha_n}{x_n} \end{vmatrix} \\
&= \lambda \frac{\alpha_1}{x_1^2} d_n(\lambda, (\alpha_i)_2^n, (x_i)_2^n) + (-1)^{n+1} \frac{\alpha_1}{x_1} (-1)^n \frac{\alpha_1}{x_1} \lambda^{n-1} \frac{\alpha_2 \dots \alpha_n}{x_2^2 \dots x_n^2} \\
&= \lambda \frac{\alpha_1}{x_1^2} d_n(\lambda, (\alpha_i)_2^n, (x_i)_2^n) - \lambda^{n-1} \alpha_1 \frac{\alpha_1 \dots \alpha_n}{x_1^2 \dots x_n^2}
\end{aligned}$$

avec

$$d_2(\lambda, \alpha_1, x_1) = \begin{pmatrix} \lambda \frac{\alpha_1}{x_1^2} & \frac{\alpha_1}{x_1} \\ \frac{\alpha_1}{x_1} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{\alpha_1^2}{x_1^2}.$$

soit

$$d_{n+1}(\lambda, (\alpha_i)_1^n, (x_i)_1^n) = -\lambda^{n-1} \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j \right] \prod_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x_i^2}, \quad n \geq 1,$$

qui assure la stricte négativité de $d_n, n \geq 2$, les λ, x_i, α_i étant positifs non nuls.

2.8.3 Pour la distance entre un point sur un cercle et un autre sur une droite ne rencontrant pas ce cercle (cf. exemple 2.6.3), la hessienne du lagrangien $\mathcal{L}(a, x, b, y, \lambda, \mu) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - \lambda(a^2 + b^2 - 1) - \mu(x+y-L)$ est

$$\text{Hess}_{a,x,b,y,\lambda,\mu} \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2-2\lambda & -2 & 0 & 0 & -2a & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda & -2 & -2b & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ -2a & 0 & -2b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de déterminant $d_6 = 16[(a-b)^2 - 2\lambda(a^2 + b^2)]$, avec

$$(18) \quad d_5 = |\text{Hess}_{a,x,b,\lambda,\mu} \mathcal{L}| = \begin{vmatrix} 2-2\lambda & -2 & 0 & -2a & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda & -2b & 0 \\ -2a & 0 & -2b & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8(a^2 + b^2)(1 - \lambda).$$

Ainsi, pour le point critique $(M_+, P) = ((1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (L/2, L/2))$, on a $\lambda = 1 - L/\sqrt{2} < 0$, d'où $d_6 > 0$ et $d_5 = 8L/\sqrt{2} > 0$, ce qui indique un minimum local, alors qu'à l'autre point critique $(M_-, P) = (-M_+, P)$ avec multiplicateur de Lagrange $\lambda_* = 1 + L/\sqrt{2} > 0$, d'où $d_6 < 0$ ce qui exclut le caractère défini pour la forme. La condition $d_{a,x}g$ inversible est bien vérifié aux points critiques (M, P, Λ) . Remarquons cependant que si $|d_{a,x}g| = 2a$ est nul, alors $|d_{b,x}g| = 2b$ ne l'est pas vu que $a^2 + b^2 = 1$: le choix de « premières variables » vérifiant les conditions de surjectivité pour dg est toujours possible !

2.8.4 Soit la fonction d'objectif J définie par $J(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ et la contrainte $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 1$. Ce programme n'est ni borné inférieurement (prendre $-x, x/2, x/(x-1)$ avec $x \rightarrow +\infty$), ni supérieurement (prendre $(x, 2x/(x-1), 2x/(x-1))$ avec $x \rightarrow +\infty$). Le lagrangien \mathcal{L} associé à ce problème d'optimisation a comme dérivée partielle $\partial_x \mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 3x^2 + \lambda x^{-2}$: en résulte que les points critiques de \mathcal{L} sont solution de

$$x^4 = y^4 = z^4 = -\lambda/3, \quad x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 1$$

et la matrice hessienne bordée est

$$\text{Hess}_{(x,y,z),\lambda} \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 6x - 2\lambda x^{-3} & 0 & 0 & x^{-2} \\ 0 & 6y - 2\lambda y^{-3} & 0 & y^{-2} \\ 0 & 0 & 6z - 2\lambda z^{-3} & z^{-2} \\ x^{-2} & y^{-2} & z^{-2} & 0 \end{pmatrix}$$

Les points critiques de \mathcal{L} sont donc $M_* = (3, 3, 3)$, $\lambda_* = -243$; $N_{3*} = (1, 1, -1)$, $\mu_* = -3$ et les deux autres solutions obtenues par permutation de x, y, z . Dans le premier cas et second cas, les matrices hessiennes bordées sont

$$\text{Hess}(\mathcal{L})(M_*, \lambda_*) = \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 36 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 36 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Hess}(\mathcal{L})(N_{3*}, \mu_*) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec mineurs principaux dominants de contrainte

$$d_4 = |\text{Hess}(\mathcal{L})(M_*, \lambda_*)| = -48, \quad d_3 = \left| \begin{pmatrix} 36 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 36 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix} \right| = -\frac{8}{9},$$

$$d_4 = |\text{Hess}(\mathcal{L})(N_{3*}, \mu_*)| = 144, \quad d_3 = \left| \begin{pmatrix} 12 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0.$$

Dans le premier cas, le point critique est un minimum local, alors que dans le second, on prouve qu'on a un point selle¹⁷.

2.8.5 En deux variables, *i. e.* pour $J(x, y) = x^3 + y^3$ sous la contrainte $x^{-1} + y^{-1} = 1$, on a des résultats analogues : un seul point critique en $(2, 2)$. Le tracé des courbes de niveau de J et du lieu contraint $\mathcal{G} = \{g = 0\}$ (l'hyperbole $x + y = xy$ privée de l'origine, courbe à trois composantes connexes) donne un autre éclairage des résultats (*cf.* Fig. II.4). On a pour la hessienne bordée en $(M_*, \lambda_*) = ((2, 2), 48)$

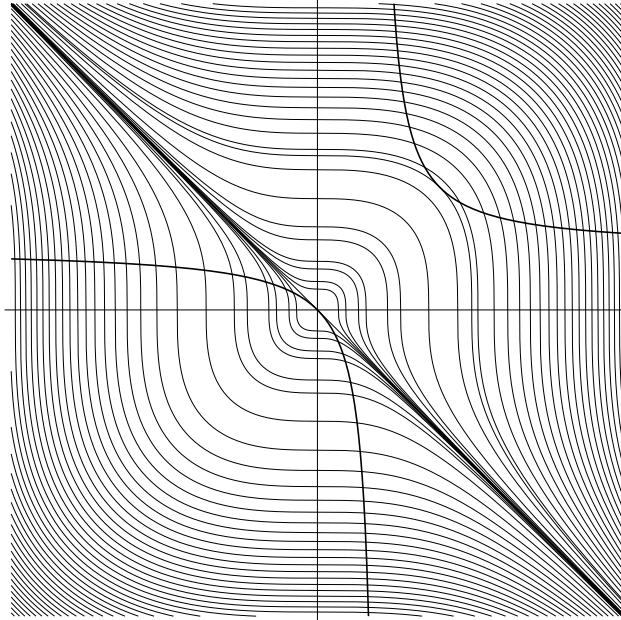


FIGURE II.4. Les courbes de niveaux $x^3 + y^3 = h$ et la courbe $x^{-1} + y^{-1} = 1$.

17. On le prouve en prenant un paramétrage local $P : (u, v) \mapsto (x(u, v), 1 + u, -1 + v)$ du lieu des contraintes $\mathcal{C} = \{x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}\}$ au voisinage de N_{3*} avant d'effectuer un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $(0, 0)$: $J(P(u, v)) = 1 + 12u(u + v) + o(\|(u, v)\|^2)$. Plus directement, on peut regarder la fonction J sur les courbes $v \mapsto (x(v), 1 + u, -1)$ et $u \mapsto (x(u), 1 + u, -1 - 2u)$ du lieu des contraintes le long desquelles J est minimum (resp. maximum).

$$d_3 = \det \text{Hess}_{(M_*, \lambda_*)} \mathcal{L} = -\frac{195}{2},$$

ce qui permet d'affirmer que $(2, 2)$ est un minimum local strict : c'est un minimum pour $x^3 + y^3$ global sur la composante de \mathcal{G} contenant $(2, 2)$, mais pas sur les autres composantes (où la fonction varie entre 0 et $\pm\infty$). \triangleleft

\triangle REMARQUE 2.7. Indiquons une règle mnémotechnique pour retrouver les conditions du second ordre pour un problème avec n variables de choix et m contraintes : forme des déterminants à considérer et succession de signes. Du fait des m contraintes, il y a $n - m$ variables libres : les conditions portent sur $n - m$ déterminants de mineurs principaux dominants. Celui d'ordre le plus grand correspond au déterminant complet d'ordre $m + n$ de la matrice hessienne complète $\text{Hess}_{\Lambda, x} \mathcal{L}$ où on a dérivé d'abord par rapport aux variables de Lagrange. Les autres déterminants sont obtenus à partir de ce premier en prenant successivement les mineurs principaux dominants d'ordre $m + n - 1, m + n - 2, \dots, m + n - (n - m) + 1 = 2m + 1$: on oublie la variable x_n en omettant la ligne et la colonne contenant cette variable en dérivation, puis les lignes/colonnes correspondant aux variables x_n, x_{n-1}, \dots et enfin les lignes/colonnes correspondant aux variables (x_n, x_{n-1}, x_{m+1}) . Par ailleurs, le signe de ces déterminants est, pour un minimum, constant coïncidant avec celui de $(-1)^m$ avec m le nombre de contraintes. On peut s'en assurer en considérant le cas modèles $J_+(x_1, \dots, x_n) = x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2$ avec contrainte $x_1 = \dots = x_m = 0$ pour un minimum où la matrice hessienne prend la forme

$$\text{Hess}_{\Lambda, x} J_+ = \begin{pmatrix} 0_m & I_m & 0_{m, n-m} \\ I_m & 0_m & 0_{n-m, m} \\ 0_{n-m, m} & 0_{n-m, m} & 2I_{n-m} \end{pmatrix}$$

où on a pris comme fonction lagrangienne $\mathcal{L}(\Lambda, x) = x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$. Les $n - m$ mineurs principaux dominants de plus grand ordre coïncident avec ceux de la matrice diagonale par blocs

$$\text{Hess}_{x_1, \lambda_1, \dots, x_m, \lambda_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+k}} J_+ = \begin{pmatrix} H & & & \\ & \ddots & & \\ & & H & \\ & & & 2I_{n-m} \end{pmatrix}$$

avec m matrices d'ordre 2 $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: cette matrice est simplement obtenue en échangeant l'ordre de dérivation des variables : $\lambda_1, x_1, \lambda_2, x_2, \dots, \lambda_m, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$. Pour un maximum, on prend la fonction d'objectifs modèle $J_-(x_1, \dots, x_n) = -x_{m+1}^2 + \dots - x_n^2$ avec même contraintes $x_1 = \dots = x_m = 0$. ∇

4. Optimisation avec contraintes d'inégalité

Cette section est dédiée à l'étude du problème d'optimisation

$$(19) \quad \mathcal{P}_{U, h} : \min_{\substack{x \in U \\ h_j(x) \geq 0, j=0, \dots, p}} J(x).$$

où U est un ouvert de \mathbb{R}^n .

On supposera que le domaine des points admissibles $\{h_j(x) \geq 0\}$ est non vide (ce qui parfois n'est pas si facile à montrer) et que le point x_* de minimum est dans ce domaine.

DÉFINITION 2.5: Soient pour $j = 1, \dots, p$ des fonctions $h_j : U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$. La contrainte $h_j(x) \geq 0$ est dite saturée en $x_* \in U$, et le point x_* actif relativement à la contrainte h_j , si $h_j(x_*) = 0$; on note S_{x_*} l'ensemble des indices $j \in \{1, \dots, p\}$ tels que la contrainte $h_j(x) \geq 0$ soit saturée en x_* . Ainsi, si $j \notin S_{x_*}$, $h_j(x_*) > 0$.

Les contraintes $h_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, p$ sont dites régulières en x_* si la matrice jacobienne de $h_{S_{x_*}} = (h_j)_{j \in S_{x_*}}$ est de rang $\#S_{x_*}$ i. e. si les gradients $\nabla h_j(x_*), j \in S_{x_*}$ sont linéairement indépendants.

La condition au premier ordre sur un éventuel point de minimum pour le programme (19) est dérivée de la propriété de minimum local au voisinage de x_* . Si $h_{j_0}(x_*) > 0$ et $r > 0$ tel que $h_{j_0}(x) > 0$ sur la boule $B(x_*, r)$ (ce r existe de par la continuité de J_{j_0}), alors pour le programme

$$\mathcal{P}_{U,h} : \min_{\substack{x \in B(x_*, r) \\ h_j(x) \geq 0, j=1, \dots, p}} J(x),$$

la contrainte h_{j_0} est sans effet et peut être oubliée. On va donc considérer pour un éventuel point de minimum x_* seules les contraintes actives en x_* , i. e. le programme

$$\mathcal{P}_{U,h} : \min_{\substack{x \in B(x_*, r) \\ h_j(x) \geq 0, j \in S_{x_*}}} J(x).$$

▷ EXEMPLE 2.9. Dans le plan, i. e. avec deux variables de décision, le domaine de faisabilité défini par les inégalités $h_j(x, y) \geq 0, j = 1, \dots, p$ est un polygone (fermé) si les h_j sont affines, par exemple le triangle de sommets $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ est défini par les inégalités $x \geq 0, y \geq 0, 1 - x - y \geq 0$: son sommet $(0, 1)$ est actif pour les deux contraintes : $x \geq 0$ et $1 - x - y \geq 0$. Le disque fermé est défini par l'unique inégalité $x^2 + y^2 \leq 1$. ◁

THÉORÈME 2.7 (Karush-Kuhn-Tucker¹⁸): Soit une partie C de E , des fonctions J, h_1, \dots, h_p définies sur C et différentiables¹⁹. Soit le programme

$$(20) \quad \mathcal{P}_{J,h} : \min_{\substack{x \in C \\ h_j(x) \geq 0, j=1, \dots, p}} J(x)$$

Soit x_* un point régulier pour les contraintes $h_j(x) \geq 0, j \in S_{x_*}$ saturées en x_* . Si x_* est un minimum du problème avec contraintes d'inégalité $\mathcal{P}_{J,h}$, alors il existe alors un unique $\Lambda_* = (\lambda_{*1}, \dots, \lambda_{*p})$ tels que

— le lagrangien $\mathcal{L}(x, \lambda_1, \dots, \lambda_p) = J(x) - \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(x)$ est critique en les variables x au point $(x_*, \Lambda_* = (\lambda_{*j})_{j=1, \dots, p})$, soit

$$(21) \quad \nabla_x \mathcal{L}(x_*, \Lambda_*) = \nabla_x J(x_*) - \sum_{j=1}^p \lambda_{*j} \nabla h_j(x_*) = 0,$$

— $\lambda_{*j} = 0$ si x_* n'est pas actif pour la contrainte h_j ;
— $\lambda_{*j} \geq 0$ si x_* est actif pour la contrainte h_j .

△ REMARQUES 2.8.

18. L'introduction de ces conditions par Karush en 1939 [9] est passée inaperçue : Kuhn et Tucker les ont introduites en 1951 [?] et il a fallu quelques années pour que le résultat soit aussi attribué à Karush sous la forme des conditions KKT.

19. Une fonction $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable s'il existe un voisinage ouvert Ω de C tel que φ admette un prolongement différentiable à Ω .

- (1) Si on introduit le lagrangien \mathcal{L}_{x_*} réduit associé à x_* suivant

$$\mathcal{L}_{x_*}(x, (\lambda_j)_{j \in S_{x_*}}) = J(x) - \sum_{j \in S_{x_*}} \lambda_j h_j(x)$$

les conditions d'égalité du théorème précédent correspondent exactement à la criticité du lagrangien \mathcal{L}_{x_*} en $(x_*, (\lambda_{*j})_{j \in S_{x_*}})$, conditions analogues à celles pour le point de minimum du programme $\min_{h_j(x)=0, j \in S_{x_*}} J(x)$ avec contrainte d'égalité. La positivité des multiplicateurs λ_j découle du programme avec contraintes d'inégalités $\mathcal{P}_{J, h_{x_*}} : \min_{h_j(x) \geq 0, j \in S_{x_*}} J(x)$.

En résumé, les conditions KKT énoncées dans le théorème 2.7 au point x_* sont équivalentes à l'existence d'un $\Lambda_* \in \mathbb{R}^{S_{x_*}}$ tel que

$$\nabla \mathcal{L}_{x_*}(x_*, \Lambda_*) = 0, \quad \Lambda_* \geq 0.$$

où le lagrangien \mathcal{L}_{x_*} est défini par $\mathcal{L}_{x_*}(x, \Lambda) = J(x) - \langle \Lambda, h(x) \rangle$ avec $(x, \Lambda) \in U \times \mathbb{R}^{S_{x_*}}$.

- (2) Les conditions nécessaires du théorème précédent peuvent se réécrire

$$\nabla_x J(x_*) = \sum_{j \in S_{x_*}} \lambda_{*j} \nabla h_j(x_*), \quad \lambda_{*j} \geq 0, \quad j \in S_{x_*},$$

Le gradient $\nabla_x J(x_*)$ est contenu dans le cône positif engendré par les gradients $\nabla h_j(x_*)$, $j \in S_{x_*}$.

- (3) Pour $J : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, le problème de minimisation

$$\inf_{u \in [a, b]} J(u) = \inf_{\substack{u-a \geq 0 \\ b-u \geq 0}} J(u)$$

donne avec le lagrangien $\mathcal{L}_a = J(u) - \lambda(u-a)$ (resp. $\mathcal{L}_b = J(u) - \mu(b-u)$) comme condition de minimum au point a (resp. b)

$$0 = \partial_u \mathcal{L}_a(u, \lambda) = (J'(u) - \lambda)|_{u=a} = J'(a) - \lambda, \quad \lambda \geq 0$$

$$0 = \partial_u \mathcal{L}_b(b, \mu) = (J'(u) + \mu)|_{u=b}, \quad \mu \geq 0,$$

soit $J'(a) \geq 0$ et $J'(b) \leq 0$: c'est conforme à ce qui est attendu. Les formulations des conditions nécessaires d'optimum du premier ordre sont en dimension au moins 2 le prolongement (non trivial) de ce qui a lieu en dimension 1.

- (4) En introduisant des variables s_j , écrivons le lagrangien associé au problème d'optimisation avec seules contraintes d'égalité, équivalent au problème (20)

$$\min_{h_j(x) - s_j^2 = 0, j=1, \dots, p} J(x)$$

avec gradient pour le lagrangien $\mathcal{L}(x, s, \Lambda) = J(x) - \sum_{j=1}^p \lambda_j (h_j - s_j^2)$

$$\nabla_{x, (s_j), (\lambda_j)} \mathcal{L} = \left(\partial_{x_i} J - \sum_{k=1}^p \lambda_k \partial_{x_i} h_k, (2\lambda_j s_j)_{j \in S_{x_*}}, (h_j(x) - s_j^2)_{j \in S_{x_*}} \right).$$

Les conditions d'annulation du gradient $\nabla_{x, (s_j), (\lambda_j)} \mathcal{L}$ du théorème 2.3 redonne les conditions d'annulation du théorème 2.7 (mais pas les conditions de positivité sur les λ_j).

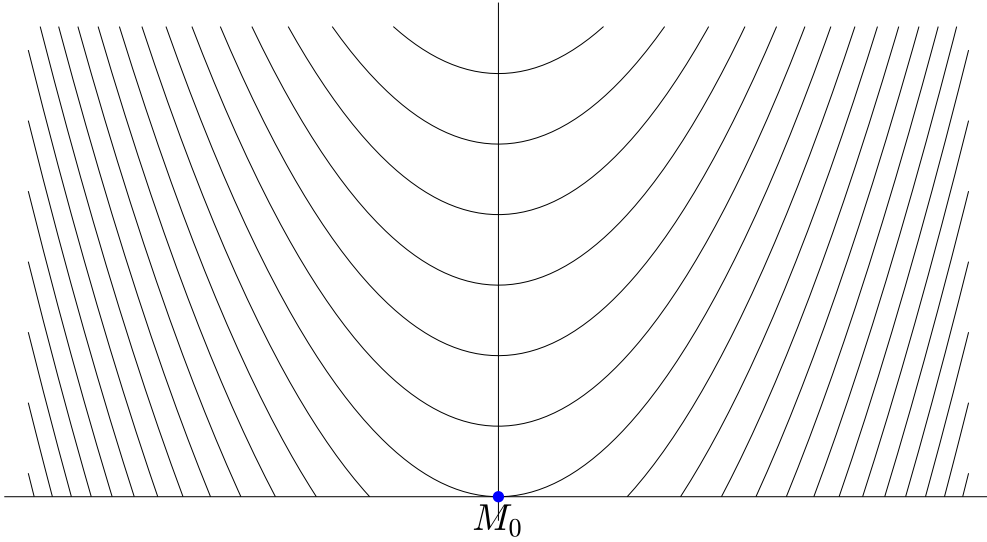


FIGURE II.5. Les lignes de niveau de $J(x, y) = y - x^2$ sur le domaine $y \geq 0$.

- (5) Pour un problème de maximisation avec contraintes d'inégalité,

$$\max_{h_j(x) \geq 0, j=1, \dots, p} J(x)$$

les conditions (nécessaires) KKT prennent la forme de l'existence de multiplicateurs de Lagrange $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ tels que $\nabla_x \mathcal{L}(x_*, \Lambda_*) = 0$ si $\mathcal{L} = J - \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j$, avec $\lambda_j = 0$ si x_* est inactif pour la contrainte $h_j \geq 0$ et $\lambda_j \leq 0$ sinon. En effet, c'est un problème de minimisation pour $-J$ et $\mathcal{L}_{-J, h}(x, \Lambda) = -\mathcal{L}_{J, h}(x, -\Lambda)$.

- (6) Cette condition est nécessaire, mais nullement suffisante : la fonction $J(x, y) = y - x^2$ en $M_* = (0, 0)$ avec la contrainte $h(x, y) = y \geq 0$ vérifie les conditions KKT, sans que M_* ne soit ni un minimum (M_* est un maximum sur le bord $y = 0$), ni un maximum (M_* est un minimum sur la direction transverse $\{(0, y), y \geq 0\}$), cf. figure II.5. ∇

▷ EXEMPLES 2.10.

2.10.1 L'inégalité $x^2 + y^2 \leq 4e^{x+y-2}$ pour $x, y \geq 0$ est équivalente à la résolution du programme $\inf_{x, y \geq 0} [J(x, y)] = -4e^{-2}$ avec $J(x, y) = -(x^2 + y^2)e^{-x-y}$. Vu que J est à valeurs négatives sur l'orthant \mathbb{O}^2 et $J(x, y) \rightarrow 0^-$ lorsque $(x, y) \rightarrow \infty$ dans \mathbb{O}^2 (i. e. $\|(x, y)\|_\infty = x + y \rightarrow +\infty$), J admet un minimum (strictement négatif) qui est atteint. Les conditions sur le lagrangien $\mathcal{L}(x, y, \lambda, \mu) = -(x^2 + y^2)e^{-x-y} - \lambda x - \mu y$ et ses multiplicateurs sont

$$(x^2 + y^2 - 2x)e^{-x-y} = \lambda \geq 0, \quad (x^2 + y^2 - 2y)e^{-x-y} = \mu \geq 0, \quad \lambda x = \mu y = 0$$

En un point intérieur de l'orthant, ces conditions (autrement dit l'annulation du gradient ∇J) donnent le point $(1, 1)$ avec $J(1, 1) = -2e^{-2}$. L'origine n'est pas minimum, vu que $J(0, 0) = 0$. Enfin, au point $(x, 0)$ avec $x \neq 0$ du bord horizontal (le traitement aux points du côté vertical sera analogue), les conditions donnent

$$\lambda = 0, \quad [(x^2 + y^2 - 2x)e^{-x-y}]_{y=0} = 2x - x^2 = 0, \quad [(x^2 + y^2 - 2y)e^{-x-y}]_{y=0} = x^2 e^{-x} = \mu \geq 0 \mu =$$

soit $x = 2$: le point $(2, 0)$ (et pareillement $(0, 2)$) est le seul minimum possible sur le bord horizontal (resp. vertical) : vu que $J(2, 0) = J(0, 2) = -4e^{-2} < 2e^{-2} =$

$J(1, 1)$, ces deux points sont effectivement les points de minimum de J sur \mathbb{O}^2 , ceci prouvant l'inégalité de départ.

2.10.2 Optimisons $J(x, y) = x + y$ sous les contraintes $xy \geq 2$ et $y \leq -2x + 5$. Le lagrangien

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda, \mu) = x + y - \lambda(xy - 2) - \mu(5 - 2x - y)$$

a pour gradient

$$(22) \quad \nabla_{(x,y)} \mathcal{L} = (1 - \lambda y + 2\mu, 1 - \lambda x + \mu)$$

Soit (x, y, λ, μ) annulant ce gradient. Examinons les différents cas :

2.10.1 en un point intérieur, *i. e.* non actif pour aucune des contraintes, on a $\lambda = 0 = \mu$, ce qui est incompatible avec l'annulation du gradient (22);

2.10.2 en un point actif pour la première contrainte seule (*i. e.* sur l'hyperbole $xy = 2$), on a $\mu = 0$ et la condition de nullité (22) donne les solutions $M_{\pm} = (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ avec multiplicateur $\lambda_{\pm} = \pm 1/\sqrt{2}$: M_+ satisfait la condition pour un minimum, M_- pour un maximum;

2.10.3 en un point actif pour la seconde contrainte seule (*i. e.* sur la droite $x+2y = 5$), on a $\lambda = 0$ et la condition de nullité (22) est impossible;

2.10.4 les points $P = (2, 1)$ et $Q = (1/2, 4)$ sont les seuls points actifs simultanément pour les deux contraintes : les conditions d'annulation lagrangienne (22) donnent $(\lambda, \mu) = (1/3, -1/3)$ en P et $(\lambda, \mu) = (-1/3, -7/6)$ en Q : Q vérifie la condition nécessaire pour un maximum, alors que P ne vérifie ni la condition pour un minimum, ni pour un maximum.

On a $J(P) = 3, J(Q) = 9/2, J(M_{\pm}) = \pm 2\sqrt{2}$: on en déduit Q maximum et M_+ minimum de J sur la composante bornée de $xy \geq 2, 2x + y \leq 5$, alors que J est majorée par $J(M_-)$ avec infimum $-\infty$ sur l'autre composante. \triangleleft

DÉMONSTRATION. Si x_* n'est pas actif pour la contrainte h_{ℓ} , *i. e.* $h_{\ell}(x_*) > 0$, alors, vu que $h_{\ell}(y) > 0$ pour y au voisinage de x_* , x_* est un minimum local de J du problème où on a omis la contrainte h_{ℓ} : il suffit donc d'établir le théorème pour un problème où x_* est actif pour toutes les contraintes, à charge de rajouter les multiplicateurs de Lagrange λ_{ℓ} nuls correspondants aux contraintes non saturées en x_* .

Comme dans la preuve du théorème 2.3, supposons dans un premier temps les contraintes linéaires : $h_j(x) = \langle b_j, x - x_* \rangle$ avec $b_j = \nabla h_j(x_*)$. Si w vérifie $\langle w, \nabla h_j(x_*) \rangle \geq 0$ pour $j \in S_{x_*}$, alors, au voisinage de x_* , la demi-droite $t \geq 0 \mapsto x_* + tw$ est dans le domaine contraint et la dérivée à droite en $t = 0$

$$\frac{d}{dt}[J(x_* + tw)]_{t=0^+} = \langle \nabla J_{x_*}, w \rangle$$

est positive, soit $\langle \nabla J_{x_*}, w \rangle \geq 0$. Ainsi d'après le Lemme de Farkas-Minkowski, ∇J_{x_*} est combinaison linéaire à coefficients positifs des $b_j = \nabla h_j(x_*)$ où $j \in S_{x_*}$.

Le cas de contraintes non linéaires en inégalités pour des points réguliers est traité avec le théorème des fonctions implicites. \square

LEMME 2.3 (Lemme de Farkas-Minkowski): *Soient v_1, \dots, v_p, v vecteurs de \mathbb{R}^n . Si lorsque tous les $\langle w, v_i \rangle$ sont positifs ou nuls il en est de même pour $\langle w, v \rangle$, alors v une combinaison linéaire des v_i à coefficients positifs.*

\triangle **REMARQUE 2.9.** Si on définit le dual conique positif K^+ de la partie K suivant $K^+ = \{w | \langle w, k \rangle \geq 0, k \in K\}$, le lemme de Farkas-Minkowski énonce l'égalité $K = (K^+)^+$ si K est le cône $K = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m | \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, m\}$. ∇

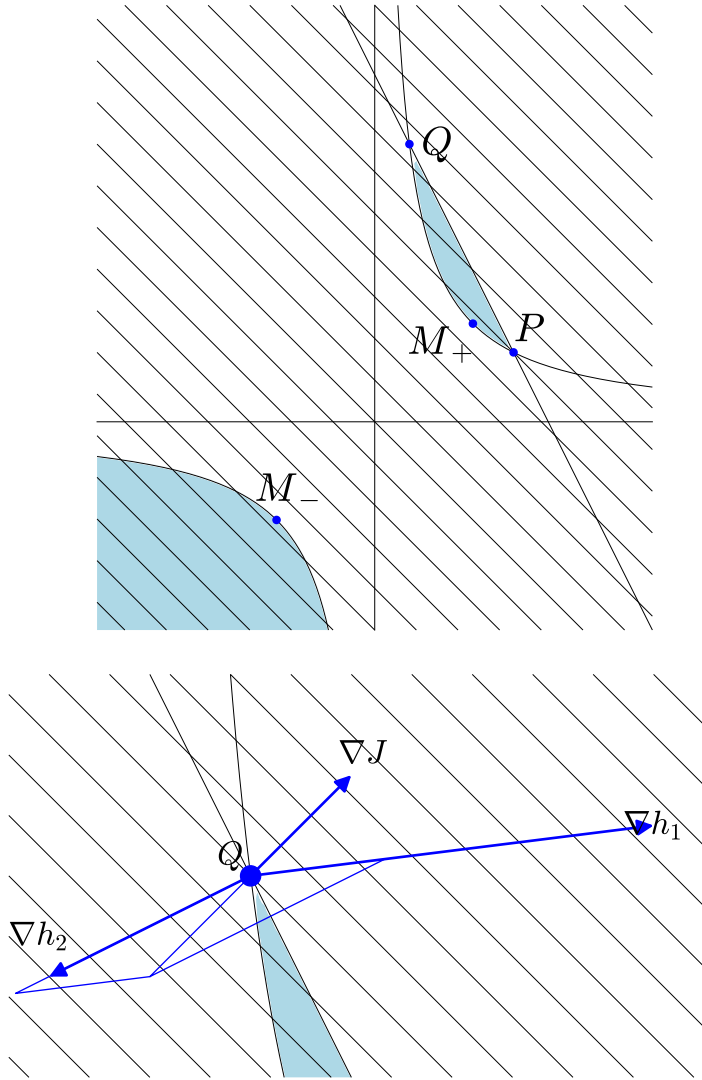


FIGURE II.6. Le domaine admissible déterminé par les contraintes $xy \geq 2$ et $2x + y \leq 5$ et les gradients en Q : $6\nabla J = -2\nabla h_1 - 7\nabla h_2$, condition KKT de signe sur les multiplicateurs de Lagrange ($\lambda = -2, \mu = -7$) associée à un maximum.

DÉMONSTRATION. Montrons tout d'abord ce lemme dans le cas où la famille $\mathbf{b} = (v_k)$ est une base de l'espace E : $v = \sum_j \lambda_j v_j$. Soit $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{v}_\ell)$ la base duale de \mathbf{b} , i. e. l'unique famille $\tilde{\mathbf{b}}$ telle que $\langle \tilde{v}_k, v_\ell \rangle = \delta_{k\ell}$. On a tous les $\langle v_k, \tilde{v}_\ell \rangle \geq 0$ et donc par suite aussi $\langle v, \tilde{v}_j \rangle = \lambda_j \geq 0$.

Dans le cas général, nous allons utiliser (en l'admettant) le théorème de Hahn-Banach géométrique

THÉORÈME 2.8 (Hahn-Banach géométrique): *Soit C un cône convexe fermé d'un espace vectoriel E et v un vecteur de E hors de C . Il existe alors une forme affine ℓ séparant strictement C et v , i. e. telle que $\ell|_C < 0$ et $\ell(v) > 0$.*

ainsi que le Lemme de la fermeture du cône démontré *infra* :

LEMME 2.4 (Lemme de la fermeture du cône): Soit $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$ une famille de m vecteurs de l'espace vectoriel E . Alors la partie $C_{\mathbf{v}} = \{\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i, \lambda_i \geq 0\}$ est un cône convexe fermé.

Soit donc $C_{\mathbf{v}}$ qui est un cône convexe fermé d'après le lemme précédent. S'il ne contient pas b , alors Hahn-Banach assure de l'existence de ℓ tel que $\ell(b) > \alpha > \ell(v)$ pour tout $v \in C_{\mathbf{v}}$. Vu que $0 \in C_{\mathbf{v}}$, on a $\alpha > 0$ et donc aussi $\ell(b) > 0$. Soit λ représentant ℓ : on a $\ell(v) = \langle \lambda, v \rangle$. Tous les $\langle \lambda, v_i \rangle$ sont négatifs : en effet, d'une part $v + \rho v_i$ est dans le cône $C_{\mathbf{v}}$ si $\rho \geq 0$ et $v \in C_{\mathbf{v}}$, d'autre part $\langle \lambda, v \rangle = \ell(v)$ est bornée sur $C_{\mathbf{v}}$ par α . En résulte, d'après l'hypothèse, que $\langle \lambda, b \rangle = \ell(b) \leq 0$, ce qui n'est pas. Ainsi, nous avons montré l'appartenance de b au cône $C_{\mathbf{v}}$. \square

Preuve du Lemme de la fermeture du cône. La partie C est un cône convexe : reste à montrer qu'elle est fermée.

Commençons par le montrer lorsque les v_1, \dots, v_m sont linéairement indépendants, auquel cas on peut se placer dans le sous-espace $E_{\mathbf{v}} = \text{Vect}(v_1, \dots, v_m)$ engendré (librement) par ces vecteurs. Les coordonnées $(x_i)_{i=1}^m$ de $x \in C$ relativement à la base $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$ sont données par le produit $x_i = \langle x, \tilde{e}_j \rangle$ avec la base duale $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_j)$ de \mathbf{v} : une suite de vecteurs dans $E_{\mathbf{v}}$ converge si et seulement si les suites de coordonnées convergent aussi. Ainsi, un point adhérent à C a des coordonnées positives relativement à la base \mathbf{v} et est donc dans C .

Supposons les v_1, \dots, v_m linéairement dépendants. Il suffit de montrer tout d'abord que tout x dans C est combinaison linéaire à coefficients positifs de vecteurs $v_K = (v_k)_{k \in K}$ linéairement indépendants avec $K \subset \{1, \dots, m\}$, i. e. vecteur d'un certain C_K (qui est partie du cône C) : ainsi le cône $C = \cup_K C_K$, union de cônes fermés pour un nombre fini de parties K de $\{1, \dots, n\}$, est fermé.

Soit donc $v = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i \in C$ et $\sum_{i \in I_+} \beta_i v_i - \sum_{i \in I_-} \beta_i v_i = 0$ une combinaison linéaire du vecteur nul avec les $\beta_i > 0$ et I_-, I_+ deux parties de $\{1, \dots, m\}$, disjointes et d'union non vide. Alors

$$v = \sum_{i \in I_+} (\alpha_i - \rho \beta_i) v_i + \sum_{i \in I_-} (\alpha_i + \rho \beta_i) v_i + \sum_{i \notin I_- \cup I_+} \alpha_i v_i$$

et on peut choisir un ρ tel que tous les coefficients de cette combinaison linéaire sont positifs et au moins un est nul : si I_+ est vide on prend $\rho = \max_{i \in I_-} [-\alpha_i / \beta_i]$ sinon on prend $\rho = \min_{i \in I_+} \alpha_i / \beta_i$. Ainsi le vecteur v apparaît comme combinaison linéaire d'au plus $\#I - 1$ vecteurs parmi les $\{v_i, i \in I\}$: réitérant cette construction, on aboutit nécessairement à une expression de v comme combinaison linéaire à coefficients positifs d'une famille $(v_k)_{k \in K}$ libre. \square

Il est courant d'avoir des contraintes de positivité sur les variables de choix : il est utile d'avoir un énoncé spécifique pour cette situation ²⁰

PROPOSITION 2.4: Soit $J : U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, $h : U \rightarrow \mathbb{R}^p, q \in [1, n]$, le lagrangien $\mathcal{L}_{J,h,q}$ défini par

$$\mathcal{L}_{J,h,q}(x, \Lambda) = J(x) - \langle \Lambda, h(x) \rangle$$

et le programme

$$(23) \quad \mathcal{P}_{J,h,q} : \min_{\substack{h_j(x) \geq 0, j=1, \dots, p \\ x_k \geq 0, k=1, \dots, q}} J(x).$$

²⁰. On adaptera l'énoncé lorsque les contraintes de positivité portent sur des variables d'indice dans la partie $K \subset \{1, \dots, n\}$.

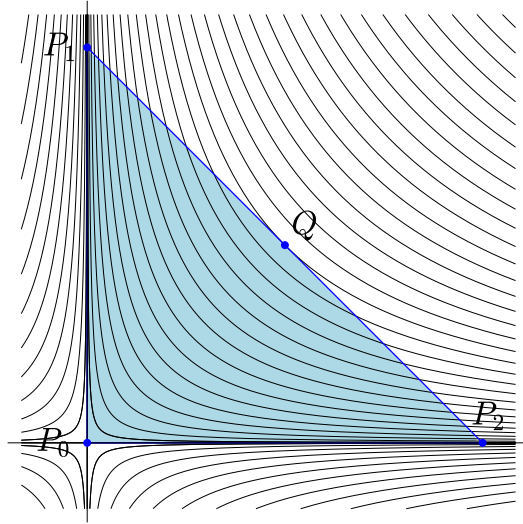


FIGURE II.7. Les lignes de niveau de $J(x, y) = -xy$ sur le domaine $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6$.

On suppose que x_* est actif relativement à toutes les contraintes h_1, \dots, h_p , régulier relativement à l'ensemble de ces contraintes. Alors il existe un unique $\Lambda_* \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\begin{aligned} \partial_{x_k} \mathcal{L}_{J, h, q}(x_*, \Lambda_*) &= 0 \text{ si } k \geq q + 1, \\ \lambda_{*j} &\geq 0, j = 1, \dots, p, \\ \partial_{x_k} \mathcal{L}_{J, h, q}(x_*, \Lambda_*) &\geq 0, k = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Le théorème précédent s'applique au lagrangien

$$\mathcal{M}(x, \lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) = J(x) - \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(x) - \sum_{k=1}^q \mu_k x_k$$

qui a pour point critique (x_*, Λ_*, M_*) pour des multiplicateurs de Lagrange Λ_*, M_* à coefficients positifs. Pour la contrainte $x_k = 0$ avec $1 \leq k \leq q$, les deux conditions

$$0 = \partial_{x_k} \mathcal{M} = \partial_{x_k} \mathcal{L} - \mu_k, \quad \mu_k \geq 0$$

sont équivalentes à $\partial_{x_k} \mathcal{L} \geq 0$. Les autres conditions proviennent sans changement du théorème précédent vu que $\partial_{x_k} \mathcal{M} = \partial_{x_k} \mathcal{L}$ si $k \geq q + 1$. \square

\triangle REMARQUE 2.10. Si x_* est un point de minimum du programme (23) avec contraintes d'inégalité inactives, *i. e.* de type $h_j(x_*) > 0$ ou $x_{*k} > 0$, on adaptera les conditions correspondantes, *i. e.* soit la disparition du multiplicateur de Lagrange λ_{*j} , soit l'annulation de la dérivée partielles $\partial_{x_k} \mathcal{L}(x_*, \Lambda_*)$. ∇

\triangleright EXEMPLES 2.11.

2.11.1 Soit la fonction $J(x, y) = -xy$ à minimiser sur le domaine

$$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6.$$

On a les divers cas de localisation du possible du point de minimum

2.11.2 à l'intérieur du triangle, on a l'équation au point critique $\nabla J = 0$ qui revient au système $(-y, -x) = 0$ soit $x = y = 0$ qui correspond au sommet $P_0 = (0, 0)$ non intérieur au triangle;

2.11.3 sur le côté $\{x + y = 6, x > 0, y > 0\}$ on cherche le point critique du lagrangien $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = -xy - \lambda(6 - x - y)$ avec $\lambda \geq 0$: $0 = \partial_y \mathcal{L} = -x + \lambda$ et $0 = \partial_x \mathcal{L} = -y + \lambda$, soit $x = y = 3$ et $\lambda = 3$; le point $Q = (3, 3)$ avec le multiplicateur $\lambda = 3 \geq 0$ vérifie les conditions KKT pour un minimum ;

2.11.4 sur le côté vertical $\{x = 0, y \in (0, 6)\}$, les conditions sont $0 \leq \partial_x \mathcal{J} = -y$ et $0 = \partial_y \mathcal{J} = -x = 0$, la première étant impossible : pas de point de minimum possible sur ce côté ;

2.11.5 un même raisonnement sur $\{y = 0, x \in (0, 6)\}$ amène l'absence de point de minimum sur ce côté horizontal.

Hors les sommets $P_0 = (0, 0), P_1 = (0, 6), P_2 = (6, 0)$ du triangle où J est nulle, seul le point $Q = (3, 3)$ est un point de minimum possible : Q est donc le point de minimum avec $J(Q) = -9$. Par ailleurs, on vérifie que les conditions KKT pour un minimum ne sont pas satisfaites aux sommets P_1 et P_2 : par ex. au point P_1 , avec $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = -xy - \lambda(6 - x - y)$, on a $\partial_x \mathcal{L}(P_1) = (-y + \lambda)|_{P_1} = -6 + \lambda \geq 0$ et $\partial_y \mathcal{L}(P_1) = (-x + \lambda)|_{P_1} = \lambda = 0$, systèmes de deux équations sans solution : P_1 ne peut être point de minimum.

2.11.6 Reprenons l'exemple **2.10.1** : $\inf_{x, y \geq 0} [-(x^2 + y^2)e^{-x-y}]$. Sur le bord $y = 0$, on a les deux conditions

$$\partial_x J(x, y) = 0, \quad \partial_y J(x, y) \geq 0,$$

soit $x = 2, y = 0$. Sur l'axe vertical $x = 0$, on trouve comme point candidat à être un minimum le point $(0, 2)$. La discussion se termine comme précédemment. \triangleleft

Programmation convexe

À l'instar du caractère linéaire pour la résolution des équations, c'est la convexité qui est le caractère distinguant un problème d'optimisation « résoluble » (minima locaux et globaux, temps polynomial de calcul, critères d'arrêt, sélection de point de départ, enjeux numériques) et d'un problème « difficile ». Par ailleurs, beaucoup de problèmes d'optimisation après changement de variable ou changement d'échelle de la fonction à optimiser se ramènent à des problèmes d'optimisation convexe : c'est dire la prééminence de la classe des programmes convexes, classe contenant en particulier celle des programmes linéaires et celle des programmes quadratiques.

Ce chapitre entretient avec le précédent des liens contrastés : d'une part, les fonctions convexes peuvent n'être pas différentiables en certains points (ainsi de la fonction valeur absolue $t \in \mathbb{R} \mapsto |t|$ non dérivable en son point de minimum même), ce qui écarte les résultats issus du calcul différentiel classique), d'autre part, un minimum local d'une fonction convexe est *ipso facto* un minimum global, cette propriété souvent mise en défaut dans des problèmes sans convexité. C'est dire comme ces deux chapitres sont complémentaires et entrelacé, sans arriver à épuiser les techniques d'optimisation. . . .

1. En guise d'introduction : la moyenne arithmético-géométrique

La convexité d'une fonction régulière U (*i. e.* de classe \mathcal{C}^2) est caractérisée par le caractère défini positif de sa hessienne $\text{Hess } U$: en fait, une fonction est convexe si et seulement si la restriction $V = V_{x,y}$ à tout intervalle $]x, y[$ de U est à dérivée seconde positive : la propriété de convexité dans \mathbb{R}^n se réduit à des propriétés de convexité en dimension 1.

Pour une fonction V d'une variable, la propriété de convexité est équivalente à V' croissante. Graphiquement, la propriété de convexité est traduite par une croissance des pentes des cordes. Pour montrer cette équivalence, considérons trois points $x < z_\lambda < y$ et la différence $\delta(x, y, \lambda)$ des pentes des cordes $[(x, V(x)), (z_\lambda, V(z_\lambda))]$ et $[(z_\lambda, V(z_\lambda)), (y, V(y))]$ où $z_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)y$,

$$(24) \quad \delta(x, y, \lambda) = \frac{V(z_\lambda) - V(x)}{(1 - \lambda)(y - x)} - \frac{V(y) - V(z_\lambda)}{\lambda(y - x)} = \frac{V(z_\lambda) - [\lambda V(x) + (1 - \lambda)V(y)]}{(1 - \lambda)\lambda(y - x)},$$

qui d'après le théorème des accroissements finis (pour les fonctions d'une variable) prend la forme

$$(25) \quad \delta(x, y, \lambda) = \frac{V(z_\lambda) - V(x)}{(1 - \lambda)(y - x)} - \frac{V(y) - V(z_\lambda)}{\lambda(y - x)} = V'(x_\lambda) - V'(y_\lambda)$$

avec $x_\lambda \in]x, z_\lambda[$ et $y_\lambda \in]z_\lambda, y[$. D'après l'expression (25), la croissance de V' implique la positivité de $\delta(x, y, \lambda)$ et, vu (24) l'inégalité de convexité

$$(26) \quad V(z_\lambda) = V(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda V(x) + (1 - \lambda)V(y), \quad \lambda \in]0, 1[.$$

Réciproquement, cette inégalité de convexité implique dans (24) la négativité de $\delta(x, y, \lambda)$ et en y faisant tendre λ vers 0^+ , puis vers 1^- les inégalités

$$0 \geq \delta(x, y, 1) = \frac{V'(x)}{y-x} - \frac{V(y) - V(x)}{y-x}, \quad 0 \geq \delta(x, y, 0) = \frac{V(y) - V(x)}{y-x} - \frac{V'(y)}{y-x}$$

et donc $V'(x) \leq (V(y) - V(x))/(y-x) \leq V'(y)$, soit la croissance de la dérivée V' .

L'inégalité (26) est aisément généralisable à des combinaisons convexes de n points :

$$(27) \quad V\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i V(x_i), \quad \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

établie par récurrence. En effet, pour $n = 2$, en remarquant $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, on retrouve exactement (26). Supposant cette inégalité vraie pour n points pondérés $(x_1, \lambda_1), \dots, (x_n, \lambda_n)$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, on passe à l'inégalité analogue pour un système de $n+1$ points pondérés en écrivant

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \left[\sum_{j=2}^{n+1} \lambda_j \right] \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{\sum_{j=2}^{n+1} \lambda_j} x_i$$

où $\lambda_1 = 1 - \sum_{j=2}^{n+1} \lambda_j$: il suffit d'appliquer la propriété de convexité pour les deux points x_1 et $\sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i / \left[\sum_{j=2}^{n+1} \lambda_j \right] x_i$, puis la propriété pour un système de n points

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= V\left(\lambda_1 x_1 + \left[\sum_{j=2}^{n+1} \lambda_j \right] \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{\sum_{j=2}^{n+1} \lambda_j} x_i\right) \\ &\leq \lambda_1 V(x_1) + \left[\sum_{j=2}^{n+1} \lambda_j \right] V\left(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{\sum_{j=2}^{n+1} \lambda_j} x_i\right) \\ &\leq \lambda_1 V(x_1) + \left[\sum_{j=2}^{n+1} \lambda_j \right] \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{\sum_{j=2}^{n+1} \lambda_j} V(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i V(x_i). \end{aligned}$$

La fonction \exp est convexe : il suffit de remarquer que sa dérivée seconde est positive. On peut aussi exprimer cette fonction comme sup de formes linéaires

$$e^x = \sup_{\xi > 0} [x\xi - \xi + \xi \log \xi]$$

qui est donc aussi convexe par préservation de la convexité par sup. Le point de maximum de $\xi \in \mathbb{R} \mapsto x\xi - \xi \log \xi + \xi$, x étant fixé, est atteint en $\xi = e^x$, avec valeur maximum e^x .

L'inégalité (27) pour n points x_1, \dots, x_n iso-pondérés donne

$$e^{\sum_{i=1}^n x_i/n} \leq \sum_{i=1}^n e^{x_i}/n$$

soit, en posant $e^{x_i} = a_i$, l'inégalité arithmético-géométrique

$$(28) \quad \left[\prod_{i=1}^n a_i \right]^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, \quad a_1 \geq 0, \dots, a_n \geq 0.$$

Cette inégalité peut se retrouver en considérant le programme

$$\max_{\substack{\sum_{i=1}^n a_i = 1 \\ a_1 \geq 0, \dots, a_n \geq 0}} \prod_{i=1}^n a_i$$

qui atteint son max (la fonction $J : (a_1, \dots, a_n) \mapsto \prod_{i=1}^n a_i$ est continue sur le compact $\{\sum_{i=1}^n a_i = 1, a_1 \geq 0, \dots, a_n \geq 0\}$) dans le quadrant $\mathbb{Q}_n = \{a_1 > 0, \dots, a_n > 0\}$ (la fonction J est nulle sur les bords de \mathbb{Q}^n) et est donc équivalent au programme

$$\max_{\substack{a_1 > 0, \dots, a_n > 0 \\ \sum_{i=1}^n a_i = 1}} \prod_{i=1}^n a_i,$$

donc un point de maximum a_* vérifie les conditions lagrangiennes

$$\nabla_a \left[\prod_{i=1}^n a_i - \lambda \left(\sum_{i=1}^n a_i - 1 \right) \right] \Big|_{\substack{a_i = a_{*i} \\ \lambda = \lambda_*}} = 0,$$

soit $J(a_*)/a_{*i} - \lambda_* = 0$ pour $i = 1, \dots, n$: en conséquence, les a_{*i} sont tous égaux, avec valeur $1/n$ vu la contrainte $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. On a donc

$$\prod_{i=1}^n a_i \leq \left(\frac{1}{n} \right)^n, \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1, a_1 \geq 0, \dots, a_n \geq 0.$$

et de manière générale en appliquant l'inégalité précédente au point $a_{\#} = (a_1/\sigma_a, \dots, a_n/\sigma_a)$ avec $\sigma_a = \sum_{i=1}^n a_i$

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{\sigma_a} \right) \leq \left(\frac{1}{n} \right)^n, \quad a_1 \geq 0, \dots, a_n \geq 0.$$

soit l'inégalité (28). La convexité et la résolution de programme offrent parfois deux voies distinctes pour parvenir à la même inégalité!

2. Parties convexes

DÉFINITION 3.1: Soit E un espace vectoriel. La partie C (non vide) de E est convexe si $x + \lambda(y - x)$ appartient à C pour tout x, y dans C et $\lambda \in [0, 1]$ ou, de manière équivalente, si tout segment

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1]\} = \{x + \theta(y - x), \theta \in [0, 1]\}$$

d'extrémités x, y dans C est inclus dans la partie C .

La liste suivante présente quelques convexes usuels, ainsi que des constructions préservant ou engendrant des parties convexes. Les vérifications, quand elles se bornent à une simple application de la définition, ne sont pas développées.

▷ **EXEMPLES 3.1.**

3.1.1 Soit l'espace¹ $H = \mathbb{R}^n$, $h \in H \setminus \{0\}$ et $c \in \mathbb{R}$. Les demi-espaces ouvert $E_{h,c} = \{v \in H, \langle v, h \rangle > c\}$ et fermé $\bar{E}_{h,c} = \{v \in H, \langle v, h \rangle \geq c\}$ sont convexes.

3.1.2 Soit E un espace vectoriel avec une norme $\| \cdot \|$: les boules ouverte $B_{x_0,r} = \{x \in E, \|x - x_0\| < r\}$ et fermée $\bar{B}_{x_0,r} = \{x \in E, \|x - x_0\| \leq r\}$ sont convexes.

3.1.3 L'intersection d'une famille (finie ou infinie) de convexes est, si elle n'est pas vide, une partie convexe. L'union de deux parties convexes n'est pas en général convexe.

3.1.4 Un *polyèdre* (convexe) est l'intersection finie de demi-espaces : un polyèdre compact est appelé *polytope*. Un *polygone* (convexe) est un polyèdre (convexe) du plan.

3.1.5 L'image directe ou inverse d'une partie convexe par une application affine $x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax + b$ ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$) est convexe.

1. On peut prendre ici H tout espace muni d'un produit scalaire, de dimension finie ou infinie.

3.1.6 Les parties convexes de \mathbb{R} sont les intervalles (ouverts, fermés, bornés, semi-ouverts, ...) : tout convexe C de \mathbb{R} est égal à $] \inf(x \in C), \sup(x \in C)[$ aux extrémités (incluses dans C ou pas) près.

3.1.7 Soit, pour p réel au moins égal à 1, la partie $P_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq |x|^p\}$. Cette partie est convexe : la partie P_1 est l'intersection des demi-plans $y \geq \pm x$, alors que la convexité de P_2 résulte de l'identité

$$\lambda y + (1 - \lambda)y' - (\lambda x + (1 - \lambda)x')^2 = \lambda(y - x^2) + (1 - \lambda)(y' - x'^2) + \lambda(1 - \lambda)(x - x')^2.$$

Pour les autres valeurs de p , cela sera établi ultérieurement dans l'exemple 3.4.1).

3.1.8 La partie $Q_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^3\}$ n'est pas convexe, puisque le segment $[(0, 0), (-x, -x^3)]$ pour $x \geq 0$ a son intérieur en dehors de Q_3 : pour $\lambda \in (0, 1)$, il n'est pas vrai que

$$-(1 - \lambda)^3 x^3 \leq -(1 - \lambda)x^3, \quad \lambda \in (0, 1), x > 0.$$

3.1.9 Pour $\alpha, \beta, A > 0$, on verra ci-dessous que la partie $H_{\alpha, \beta, A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2, x^\alpha y^\beta \geq A\}$ est convexe.

3.1.10 Une partie est dite *conique* si elle est stable par l'action de \mathbb{R}_+ i. e. telle que $tx \in C$ si $x \in C, t \in \mathbb{R}_+$. Si C est convexe, l'union $\cup_{t>0} tC$ est conique et convexe.

3.1.11 La partie conique $\{(u, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \|x\| \leq u\}$ est convexe.

3.1.12 Soit S_n l'espace des matrices symétriques d'ordre n . Sa partie \mathcal{S}_n^+ constituée des matrices S positives i. e. $\langle Sx, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, est convexe. La partie \mathcal{S}_n^{++} des matrices définies positives est un cône convexe ouvert dans $S_n(\mathbb{R})$, défini comme intersection d'hyperplans

$$\mathcal{S}_n^{++} = \bigcap_{x \in E \setminus \{0\}} \{\langle Sx, x \rangle > 0\}.$$

◁

THÉORÈME 3.1: Soit C partie convexe fermée de l'espace de $E (= \mathbb{R}^n)$ muni d'un produit scalaire. Alors C est l'intersection des demi-espaces qui le contiennent. Explicitement, si $I_C^*(v) = \sup_{x \in C} \langle v, x \rangle$ pour $v \in E$, on a

$$(29) \quad C = \bigcap_{v \in E, \|v\|=1} \{\langle x, v \rangle \leq I_C^*(v)\}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\widehat{C} = \bigcap_{v \in E, \|v\|=1} \{\langle x, v \rangle \leq I_C^*(v)\}$. D'après la définition de I_C^* , le convexe C est inclus dans tout demi-espace $\{\langle x, v \rangle \leq I_C^*(v)\}$; ainsi $C \subset \widehat{C}$.

Soit $y \notin C$. Considérons la projection y_C de y sur C (cf. théorème ?? ci-dessous). Si $v_y = (y - y_C) / \|y - y_C\|$, alors $\langle x - y_C, v_y \rangle \leq 0$ pour tout $x \in C$, d'où

$$I_C^*(v_y) \leq \langle y_C, v_y \rangle < \langle y_C, v_y \rangle + \|y - y_C\| = \langle y_C, v_y \rangle + \langle y - y_C, \frac{y - y_C}{\|y - y_C\|} \rangle = \langle y, v_y \rangle,$$

soit $I_C^*(v_y) < \langle y, v_y \rangle$ et donc $y \notin \widehat{C}$, ce qui conclut la preuve. □

3. Fonctions convexes

DÉFINITION 3.2: Soit C partie convexe de l'espace vectoriel E . La fonction $U : C \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si

$$(30) \quad U(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y), \quad x, y \in C, \lambda \in [0, 1].$$

La fonction U est strictement convexe si l'inégalité (30) est stricte pour $\lambda \in (0, 1)$ et $x \neq y$.

La fonction $U : C \rightarrow \mathbb{R}$ est dite (strictement) concave si la fonction $-U$ est (strictement) convexe.

On remarquera que U est (strictement) convexe sur C si et seulement si la restriction de U à tout segment inclus dans C est (strictement) convexe.

En fait, la fonction $U_{x,y}$ sur $(0,1)$ induite par le paramétrage $\alpha \mapsto \alpha x + (1 - \alpha)y$ du segment $[x, y]$ est convexe sur $[0, 1]$ si et seulement si la restriction de U au segment $[x, y]$ l'est, ce que pose le lemme suivant.

LEMME 3.1: Soient C convexe de l'espace E , $U : C \rightarrow \mathbb{R}$ et $U_{x,y} : t \in [0, 1] \mapsto U(x + t(y - x))$. La fonction U est convexe si et seulement si la fonction $U_{x,y}$ l'est pour tout $x, y \in E$.

DÉMONSTRATION. Supposons U convexe. Alors, pour $u, v, \lambda \in [0, 1]$, le réel $u + \lambda(v - u)$ est dans $[0, 1]$ et alors pour $x, y \in U$

$$\begin{aligned} U_{x,y}(\lambda u + (1 - \lambda)v) &= U(x + (\lambda u + (1 - \lambda)v)(y - x)) \\ &= U(\lambda(x + u(y - x)) + (1 - \lambda)(x + v(y - x))) \\ &\leq \lambda U(x + u(y - x)) + (1 - \lambda)U(x + v(y - x)) \\ &= \lambda U_{x,y}(u) + (1 - \lambda)U_{x,y}(v) \end{aligned}$$

et $U_{x,y}$ est convexe.

Réciproquement, étant donnés $x, y \in U$, si $U_{x,y}$ est convexe,

$$\begin{aligned} U(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= U_{x,y}(1 - \lambda) = U_{x,y}(\lambda \cdot 0 + (1 - \lambda) \cdot 1) \\ &\leq \lambda U_{x,y}(0) + (1 - \lambda)U_{x,y}(1) = \lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y). \end{aligned}$$

Ces inégalités valant pour tout $x, y \in E$, la fonction U est convexe. \square

Pour une fonction U_1 d'une variable, la convexité se lit sur le graphe (plan) de la fonction : pour tout couple de valeurs x, y , la courbe $t \in [x, y] \mapsto U_1(t)$ est en dessous de la corde $[(x, U_1(x)), (y, U_1(y))]$, cf. Fig. III.1.

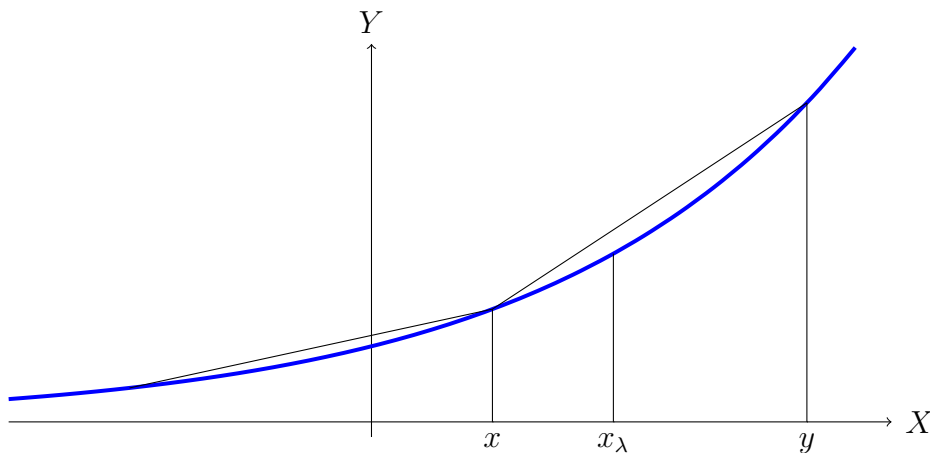


FIGURE III.1. Le graphe d'une fonction convexe $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: la fonction est au-dessous de la corde $[(x, U(x)), (y, U(y))]$, i. e. pour $x_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)y$, $U(x_\lambda) \leq \lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y)$.

▷ EXEMPLES 3.2.

- 3.2.1** L'inégalité (30) est une égalité pour toute fonction affine U , qui est donc convexe (non strictement convexe) et concave (vu que $-U$ est aussi affine).
- 3.2.2** Toute norme $\| \cdot \|$ est convexe : en particulier, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto |t|$ est convexe. C'est une conséquence de l'inégalité triangulaire et de l'homogénéité de la norme

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq \|\lambda x\| + \|(1 - \lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\|, \quad x, y \in E, \lambda \in [0, 1].$$

Une norme n'est jamais différentiable en $x = 0$, vu que les dérivées directionnelles $U'_{\text{dir}}(d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (U(td) - U(0))/t$ où $d \neq 0$ n'induisent pas une différentielle linéaire : $U'_{\text{dir}}(-d) = U'_{\text{dir}}(d)$ avec $U'_{\text{dir}}(d) = U(d) \neq 0$. Les exemples des trois normes $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ et $\|x\|_\infty = \sup_{i=1}^n |x_i|$ montrent qu'une norme n'est pas nécessairement différentiable partout en dehors de l'origine.

- 3.2.3** La somme, la multiplication par un nombre positif et le sup de fonctions convexes sont convexes, le min de fonctions concaves est concave. Le min de fonctions convexes n'est pas en général convexe (cf. Fig. (III.2))

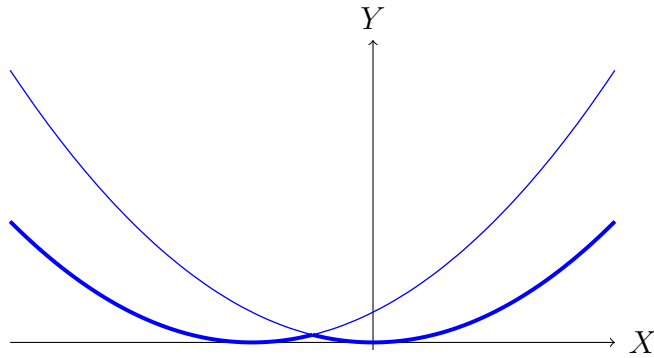


FIGURE III.2. Le graphe de la fonction $y = \min_{t \in \mathbb{R}} (t^2, (t + 1)^2)$ non convexe.

- 3.2.4** Pour $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels positifs, la fonction de Leontiev $U_{L,\alpha}(x_1, \dots, x_n) = \max_{i=1}^n (\alpha_i x_i)$ est convexe. En dimension $n = 2$, la partie où $U_{L,\alpha}$ est égal aux deux fonctions $x_1/\alpha_1 = x_2/\alpha_2$ est une droite D_α , séparant le plan en deux demi-plans ouverts où la fonction $U_{L,\alpha}$ est égale à une fonction linéaire, et donc lisse. Les isoquantes sont des unions de deux demi-droites d'origine sur D_α (l'une horizontale vers $x_1 \sim -\infty$, l'autre verticale vers $x_2 \sim -\infty$). La fonction $U_{L,\alpha}$ n'est pas différentiable sur D_α : pour $x = (x_1, x_2) \in D_\alpha$, $U_{L,\alpha}(x + (t, 0)) = U_{L,\alpha}(x)$ si $t < 0$, $U_{L,\alpha}(x + (t, 0)) = \alpha_1(x_1 + t)$ si $t > 0$, aussi les dérivées partielles horizontales à droite et gauche sont distinctes. Cette non différentiabilité est liée à celle de la fonction valeur absolue, vu que $\max(a, b) = (a + b)/2 + |a - b|/2$ et donc $2U_{L,\alpha}(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + |\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2|$.
- 3.2.5** La somme des r -plus grandes composantes de $x \in \mathbb{R}^n$, soit $f(x) = x_{[1]} + x_{[2]} + \dots + x_{[r]}$ est convexe, vu que

$$f(x) = \max(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_r} | 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n)$$

- 3.2.6** La fonction $q_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est strictement convexe, puisque

$$\begin{aligned} q_2(\lambda x + (1 - \lambda)y) - [\lambda q_2(x) + (1 - \lambda)q_2(y)] &= (\lambda x + (1 - \lambda)y)^2 - [\lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2] \\ &= -\lambda(1 - \lambda)(x - y)^2. \end{aligned}$$

3.2.7 La fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2y^2$ n'est pas convexe, bien qu'elle soit convexe séparément par rapport à la variable x ou la variable y : l'application restreinte à la droite $(0, 1) + (1, -1)\mathbb{R}$ donnée par $t \in \mathbb{R} \mapsto (t, 1 - t)$, a un graphe non convexe (cf. Fig. (??)). Le produit de fonctions convexes n'est pas en général convexe.

3.2.8 Si A est un opérateur symétrique positif sur l'espace E , alors la fonction $U_A : x \in E \mapsto \langle Ax, x \rangle$ est convexe, strictement convexe si A est définie positif. En effet, la restriction $U_{A,x,d}$ de U_A à la droite $x + \mathbb{R}d$ est de la forme

$$U_{A,x,d} : t \in \mathbb{R} \mapsto U_A(x + td) = \langle Ax, x \rangle + 2\langle Ad, x \rangle t + \langle Ad, d \rangle t^2,$$

convexe (vu que A est positif) et strictement convexe si et seulement si $\langle Ad, d \rangle > 0$

3.2.9 Si $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante convexe et $U : C \rightarrow (a, b)$ convexe, alors $g \circ U : C \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, vu les inégalités suivantes où on a utilisé successivement la croissance de g et la convexité de U , puis la convexité de g

$$g \circ U(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq g(\lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y)) \leq \lambda g \circ U(x) + (1 - \lambda)g \circ U(y)$$

Ainsi les normes au carré $x \in E \mapsto \|x\|^2$ sont convexes : elle s'obtiennent en composant la norme $\| \cdot \|$ convexe et l'application croissante convexe $q_2 : u \in \mathbb{R}_+ \mapsto u^2 \in \mathbb{R}$.

3.2.10 Si C_1, C_2 sont deux convexes et $(x, y) \in C_1 \times C_2 \mapsto U(x, y)$ convexe sur $C_1 \times C_2$, alors $V(x) = \inf_{y \in C_2} U(x, y)$ est convexe. En effet

$$\begin{aligned} V(\theta x + (1 - \theta)x') &= \inf_{z \in C_2} U(\theta x + (1 - \theta)x', z) \\ &\leq U(\theta x + (1 - \theta)x', \theta y + (1 - \theta)y') \\ &\leq \theta U(x, y) + (1 - \theta)U(x', y') \end{aligned}$$

soit en prenant l'inf sur y , puis sur y'

$$V(\theta x + (1 - \theta)x') \leq \theta V(x) + (1 - \theta)V(x').$$

Ainsi, si C est convexe est un convexe de l'espace normé E , $d_C(x) = \inf_{y \in C} \|x - y\|$ est convexe sur E .

3.2.11 Soit $(\Omega, \mathcal{P}, dP)$ un espace de probabilités, X une variable aléatoire à valeurs réelles et U une fonction convexe sur \mathbb{R} . Alors l'inégalité dite de Jensen porte sur les espérances

$$(31) \quad U(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[U(X)],$$

inégalité qui sera sera prouvée à la fin de la section suivante 4. Le cas $\Omega = \{1, \dots, n\}$ avec \mathcal{P} telle que $\mathcal{P}(\{i\}) = \alpha_i, i = 1, \dots, n$, est obtenu simplement en généralisant l'inégalité de convexité caractérisant la convexité de la fonction U

$$U \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i U(x_i)$$

à la combinaison convexe $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ de n points x_1, \dots, x_n avec $\alpha_i \geq 0$ et $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. ◁

△ REMARQUES 3.1.

- (1) On s'autorise comme fonction convexe une fonction prenant la valeur $+\infty$ sur son ensemble de définition C : en général, si U convexe est définie sur la partie convexe C de E , le prolongement \tilde{U} tel que $\tilde{U}(x) = \infty$ si $x \notin C$ induit une fonction convexe \tilde{U} sur E . Pour U convexe définie sur C à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

on notera **dom** U la partie où U est finie, le *domaine effectif* (ou simplement *domaine*) de U : ce domaine est convexe.

- (2) Une fonction $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ convexe n'est pas nécessairement continue : par exemple, la fonction U avec $U(x) = 0$ si $|x| < 1$, $U(x) = 1$ si $|x| = 1$, $U(x) = +\infty$ sinon. ∇

La notion de *fonction conjuguée convexe* d'une fonction quelconque fournit une foultitude de fonctions convexes :

DÉFINITION 3.3 (Conjuguée de Fenchel-Legendre): *Soit E un espace vectoriel avec un produit scalaire et f fonction définie sur $\mathbf{dom} f \subset E$. Sa fonction conjuguée convexe² est la fonction f^* définie sur E suivant*

$$f^*(\lambda) = \sup_{x \in \mathbf{dom} f} [\langle \lambda, x \rangle - f(x)], \quad \lambda \in E.$$

Pour une fonction f d'une variable, l'inégalité $f(x) \geq \lambda x - f^*(\lambda)$ indique que la droite d'équation $y = \lambda x - f^*(\lambda)$ est celle de pente λ de hauteur maximale qui soit en dessous du graphe de f . Par ailleurs, $f^*(0) = -\inf_{x \in \mathbf{dom} f} [f(x)]$. Enfin, la fonction I_C^* introduite dans le théorème 3.1 est la conjuguée de la fonction indicatrice (notée σ_C ou I_C) de C de domaine C et valant 0 sur C .

▷ **EXEMPLES 3.3.**

- 3.3.1** La conjuguée de la forme linéaire $\lambda_\ell : x \mapsto \langle \ell, x \rangle$ est la fonction valant $+\infty$ partout sauf en $\lambda = \ell$ où elle est nulle. Sa double conjuguée coïncide avec elle-même : $((\lambda_\ell)^*)^*(x) = \sup_{\lambda = \ell} [\langle \lambda, x \rangle] = \lambda_\ell(x)$.
- 3.3.2** Pour $a > 0$, on a $(af)^*(\lambda) = af^*(\lambda + a)$.
- 3.3.3** Pour $a > 0$, la conjuguée de $x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2/2$ est $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda^2/(2a)$: on vérifie bien $((x^2)^*)^*(t) = t^2$, *i. e.* la double conjuguée de la fonction q_2 est elle-même. De manière générale, on notera f^{**} la double conjuguée de f : $f^{**} = (f^*)^*$.
- 3.3.4** Plus généralement, on montre que pour $p > 1$ $(|x|^p)^*(\lambda) = L_p |\lambda|^q$ avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$ et $L_p = p^{1-q} q^{-1}$. On vérifie bien $(|x|^p)^{**}(x) = (\lambda_p |\lambda|^q)^*(x) = \lambda_p \lambda_q |x|/\lambda_p^p$ vu que $\lambda_p \lambda_q \lambda_p^{-p} = 1$.
- 3.3.5** On a $(|x|)^*(\lambda) = 0$ si $|\lambda| \leq 1$, $+\infty$ sinon. On vérifie que $(|x|)^{**}(t) = (\sigma_{[-1,1]})^*(t) = |t|$.
- 3.3.6** La conjuguée de $x \mapsto e^x$ est de domaine \mathbb{R}_+ , avec $(e^x)^*(\lambda) = \lambda \log(\lambda/e)$ pour $\lambda \geq 0$. En effet, la fonction $x \rightarrow x\lambda - e^x$ a un point critique $x_c = \log \lambda$ si $\lambda > 0$ et aucun si $\lambda \leq 0$. Après étude en $\pm\infty$ de la fonction $x \rightarrow x\lambda - e^x$ suivant le signe de y , on en déduit $(e^x)^*(\lambda) = \lambda \log \lambda - \lambda$ si $\lambda \geq 0$, $+\infty$ sinon. On vérifie que la fonction U_ℓ de domaine $[0, +\infty)$ telle que $U_\ell(\lambda) = \lambda \mapsto \lambda \log \lambda - \lambda$ si $\lambda \geq 0$ a comme conjuguée l'application exponentielle (qui est donc convexe).
- 3.3.7** Soit une entreprise vendant un produit $x = (x_1, \dots, x_n)$ dont le i -ième intrant lui est facturé au prix unitaire de p_i . Si $P(x)$ est le chiffre d'affaire correspondant à la production réalisée avec la ressource x , alors le revenu net de l'entreprise est $P(x) - \langle x, \mathbf{p} \rangle$: pour le vecteur de coûts \mathbf{p} , le revenu net optimal est $\sup_x [P(x) - \langle x, \mathbf{p} \rangle] = (-P)^*(-\mathbf{p})$ (la fonction de production P est souvent concave : $-P$ est convexe). Ces relations via la conjugaison à la Fenchel-Legendre sont dites de mises en dualité : dualité entre la fonction de production et la fonction de profit, dualité entre variables d'intrants et variables de prix des intrants. \triangleleft

2. Cette conjuguée de Fenchel-Legendre est aussi appelée *transformée de Young*.

$U(x) = V^*(x)$	$\mathbf{dom} U$	$V(\xi) = U^*(\xi)$	$\mathbf{dom} V$
$W(ax) \quad (a \neq 0)$		$W^*(\xi/a)$	
$W(b+x)$		$W^*(\xi) - b\xi$	
$aW(x) \quad (a > 0)$		$aW^*(\xi/a)$	
0	\mathbb{R}^n	0	$\{0\}$
0	\mathbb{R}_+	0	$-\mathbb{R}_+$
0	$[-1, 1]$	$ \xi $	\mathbb{R}
0	$[0, 1]$	ξ^+	\mathbb{R}
$\langle \ell, x \rangle$	\mathbb{R}^n	0	$\{\ell\}$
$ax^2/2$	\mathbb{R}	$\xi^2/(2a)$	\mathbb{R}
$ x ^p/p \quad (1 < p \in \mathbb{R})$	\mathbb{R}	$ \xi ^q/q \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1)$	\mathbb{R}
$ x ^p/p \quad (1 < p \in \mathbb{R})$	\mathbb{R}_+	$ \xi^+ ^q/q \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1)$	\mathbb{R}
$-x^p/p \quad (p \in (0, 1))$	\mathbb{R}_+	$-(-\xi)^q/q \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1)$	$-\mathbb{R}_{++}$
$\sqrt{1+x^2}$	\mathbb{R}	$-1\sqrt{1-\xi^2}$	$[-1, 1]$
$-\log x$	\mathbb{R}_{++}	$-1 - \log(-\xi)$	$-\mathbb{R}_{++}$
$\operatorname{ch} x$	\mathbb{R}	$\operatorname{sh}^{-1}(\xi) - \sqrt{1+\xi^2}$	\mathbb{R}
$\operatorname{sh} x $	\mathbb{R}	$\xi \operatorname{argch} \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (\xi > 1), 0 \quad \text{sinon}$	\mathbb{R}
$-\log \cos x$	$(-\pi/2, \pi/2)$	$\xi \operatorname{arctg} \xi + \frac{1}{2} \log(1+\xi^2)$	\mathbb{R}
$\log \operatorname{ch} x$	\mathbb{R}	$\xi \operatorname{argth} \xi + \frac{1}{2} \log(1-\xi^2)$	$(-1, 1)$
e^x	\mathbb{R}	$\xi \log \xi - \xi$	\mathbb{R}_+
$\log(1+e^x)$	\mathbb{R}	$\xi \log \xi + (1-\xi) \log(1-\xi)$	$[0, 1]$
$-\log(1-e^x)$	$-\mathbb{R}_+$	$\xi \log \xi - (1+\xi) \log(1+\xi)$	\mathbb{R}_+

TABLE 1. Conjuguées de Fenchel-Legendre, avec $a > 0$.

La proposition suivante (présentée ici pas dans sa généralité, qui requiert des hypothèses supplémentaires) éclaire les exemples précédents :

PROPOSITION 3.1: *Si $U : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est convexe, alors $U = (U^*)^*$.*

DÉMONSTRATION. Nous nous contenterons d'une preuve valable pour U supposée différentiable. On a

$$\begin{aligned} (U^*)^*(z) &= \sup_v (\langle z, v \rangle - U^*(v)) = \sup_v [\langle z, v \rangle - \sup_x (\langle v, x \rangle - U(x))] \\ &= \sup_v \inf_x (U(x) - \langle v, x - z \rangle). \end{aligned}$$

En choisissant $x = z$ pour majorer l'inf. on obtient

$$(U^*)^*(z) = \sup_v \inf_x (U(x) - \langle v, x - z \rangle) \leq \sup_v U(z) = U(z).$$

Par ailleurs, vu que U est supposée convexe différentiable, d'après la caractérisation de la proposition 3.5

$$(32) \quad U(x) \geq U(z) + \langle \nabla U(z), x - z \rangle$$

d'où

$$\inf_x [U(x) - \langle \nabla U(z), x - z \rangle] \geq U(z)$$

et

$$(U^*)^*(z) = \sup_v \inf_x [\langle v, z - x \rangle + U(x)] \geq \inf_x [\langle \nabla U(z), z - x \rangle + U(x)] \geq U(z)$$

Ainsi vient d'être démontrée l'égalité $(U^*)^* = U$. On a utilisé de manière cruciale l'inégalité (32) exprimant géométriquement que l'hyperplan dans \mathbb{R}^{n+1} de normale $\nabla U(z)$ et passant par le point $(u(z), z)$ se situe tout entier en dessous de l'épigraphe (cf. proposition 3.2) de U : l'existence³ d'un tel hyperplan d'appui est garantie pour des fonctions convexes non nécessairement différentiables. \square

Terminons par quelques domaines convexes associés à des fonctions convexes.

PROPOSITION 3.2 (Épigraphe): *Soit $U : C \rightarrow \mathbb{R}$. L'épigraphe⁴ de U est la partie $\mathbf{epi} U$ de $C \times \mathbb{R}$ définie par $\mathbf{epi} U = \{(x, s) \in C \times \mathbb{R}; s \geq U(x)\}$. L'épigraphe $\mathbf{epi} U$ est convexe si et seulement si U est convexe.*

DÉMONSTRATION. La convexité de $\mathbf{epi} U$ signifie que, pour tout $\lambda \in (0, 1)$, pour tout $(x, s), (y, t)$ avec $s \geq U(x)$ et $t \geq U(y)$, l'inégalité $U(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda s + (1 - \lambda)t$ vaut, vu que $\lambda(x, s) + (1 - \lambda)(y, t) = (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda s + (1 - \lambda)t)$. Si U est convexe, alors $U(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y) \leq \lambda s + (1 - \lambda)t$ et donc $\mathbf{epi} U$ est convexe. Inversement, en considérant les éléments $(x, U(x))$ et $(y, U(y))$ de $\mathbf{epi} U$, la convexité de $\mathbf{epi} U$ donne $(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y))$ dans $\mathbf{epi} U$, soit $U(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y)$, ce qui assure la convexité de U . \square

PROPOSITION 3.3: *Soit $U : C \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Alors les domaines D_u de sous-niveau $D_u = \{x \in C; U(x) \leq u\}$ sont convexes.*

DÉMONSTRATION. Si $x, y \in D_u$, alors $U(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y) \leq \lambda u + (1 - \lambda)u = u$, i. e. $\lambda x + (1 - \lambda)y \in D_u$ soit la convexité de D_u . \square

Cette dernière proposition justifie la définition de quasi-convexité à laquelle est consacrée la section 5.

4. Convexité et régularité

Une fonction convexe est localement continue (et même localement lipchitzienne comme on le voit dans la démonstration : $|U(x) - U(y)| \leq K\|x - y\|$). Pour la différentiabilité, une fonction convexe est plus paradoxale : d'une part, elle n'est pas toujours différentiable, d'autre part, elle admet toujours des dérivées directionnelles (dans une demi-droite). Si U est convexe différentiable (une ou deux fois), alors il y a des caractérisations simples (issues du calcul différentiel) de la convexité : cela découle des inégalités

3. Pour deux convexes disjoints, un résultat de séparation indique l'existence d'un hyperplan \mathcal{H} dont chacun des deux demi-espaces induits de bord \mathcal{H} contiennent un des deux convexes donnés. Analytiquement, cela s'exprime par l'existence d'une forme affine $x \mapsto \langle n, x \rangle + c$ négative (resp. positive) sur le premier (resp. second) convexe. Si l'un des convexes est un point M et l'autre un convexe C , un tel hyperplan a été utilisé dans la preuve du théorème 3.1.

4. L'*hypographe* est la partie $\{(x, s) \in C \times \mathbb{R}; s \leq U(x)\}$: c'est une partie convexe si et seulement si U est concave.

à l'origine de la définition de convexité et permet la preuve de la convexité de beaucoup de fonctions. Cette section est centrale dans l'étude des fonctions convexes et des programmes convexes abordés ci-dessous.

THÉORÈME 3.2: *Soit C ouvert convexe de \mathbb{R}^n . La fonction U convexe sur C est continue sur C .*

DÉMONSTRATION. Soit $x_0 \in C$. Soit K_0 un cube (fermé) contenant x_0 en son intérieur : la fonction U est majorée sur K_0 par $2^n M$ avec M majorant de U sur l'ensemble (fini) des sommets de K_0 (raisonner par récurrence sur n). Soit B_0 une boule ouverte centrée en x_0 de rayon r_0 et contenue dans K_0 : en écrivant $x_0 = (x_0 + u)/2 + (x_0 - u)/2$, on a $2U(x_0) \leq U(x_0 + u) + U(x_0 - u)$, soit $U(x_0 + u) \geq 2U(x_0) - \sup_{v \in K_0} |U(v)|$ sur B_0 . Ainsi, majorée et minorée, la fonction U est bornée sur la boule B_0 et par suite continue sur un voisinage de x_0 , d'après le lemme suivant valable dans tout espace vectoriel normé (de dimension finie ou pas). \square

LEMME 3.2: *Soit C un ouvert connexe de \mathbb{R}^n et $U : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Si U est bornée sur C , elle y est continue.*

DÉMONSTRATION. Soient m, M des bornes de U : $m \leq U(x) \leq M$ pour $x \in C$. Soit $x_0 \in C$ et $\delta > 0$ tel que $B(x_0, 2\delta) \subset C$. Soient $y, y' \in B(x_0, \delta)$ distincts. Alors

$$y'' = y' + \delta \frac{y' - y}{\|y' - y\|}$$

est dans la boule $B(x_0, 2\delta) \subset C$ et y' est dans le segment $[y, y'']$

$$y' = \frac{\|y' - y\|}{\delta + \|y' - y\|} y'' + \frac{\delta}{\delta + \|y' - y\|} y$$

d'où par convexité de U sur le segment $[y'', y]$ contenant y' (cf. Fig. III.3 pour une vision géométrique de cette inégalité sur la droite passant par y et y')

$$\frac{U(y') - U(y)}{\|y' - y\|} \leq \frac{U(y'') - U(y)}{\|y'' - y\|} = \frac{U(y'') - U(y)}{\delta + \|y' - y\|} \leq \frac{M - m}{\delta}$$

soit

$$U(y') - U(y) \leq \frac{M - m}{\delta} \|y' - y\|$$

et par symétrie

$$|U(y') - U(y)| \leq \frac{M - m}{\delta} \|y' - y\|$$

Ainsi la fonction U est continue en x_0 ⁵ et sur C tout entier. \square

\triangle **REMARQUE 3.2.** Une forme linéaire est convexe : si E est un espace vectoriel de dimension infinie, il existe des formes linéaires non continues. Par ailleurs, l'application U définie sur $[0, 1]$ par $U(x) = x^2$ si $x < 1$ et $U(1) = 2$ est convexe, mais non continue en $x = 1$: en dimension finie, le défaut de continuité d'une fonction convexe n'a lieu qu'au bord du domaine de définition. ∇

Une fonction convexe n'est pas nécessairement différentiable en un point intérieur de son domaine, comme par exemple la fonction valeur absolue en $t = 0$. Néanmoins, il y a dérivabilité partielle pour les fonctions d'une variable

LEMME 3.3 (Lemme dit des trois cordes): *Soit I un intervalle. Sont équivalentes :*

5. On a en fait démontré que la fonction U est localement lipschitzienne.

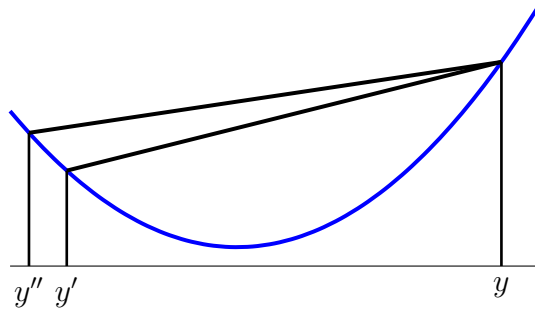


FIGURE III.3. La pente de la corde $[U(y'), U(y)]$ majore celle de $[U(y''), U(y)]$: $(U(y) - U(y'))/(y - y') \geq (U(y) - U(y''))/(y - y'')$, soit $U(y') - U(y) \leq C|y - y'|$ avec $C = 2 \sup |U(u)|/\delta$ vu que $y'' = y' - \delta$.

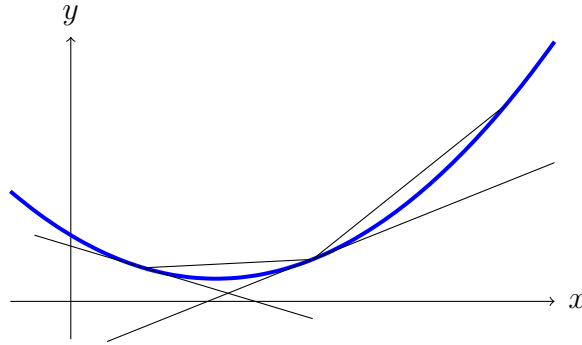


FIGURE III.4. La convexité est équivalente à la croissance des pentes des cordes, tangentes comprises.

(1) $U : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe.

(2) Pour a, b, c dans I avec $a < b < c$,

$$\frac{U(b) - U(a)}{b - a} \leq \frac{U(c) - U(a)}{c - a}$$

(3) Pour a, b, c dans I avec $a < b < c$,

$$\frac{U(c) - U(a)}{c - a} \leq \frac{U(c) - U(b)}{c - b}.$$

(4) Pour tout $a \in I$, la pente $p_a : x \in I \mapsto p_a(x) = (U(x) - U(a))/(x - a)$ est croissante.

DÉMONSTRATION. En effet, pour $a < b < c$ dans I , on a la combinaison convexe

$$b = \frac{c - b}{c - a}c + \frac{b - a}{c - a}a$$

et par suite l'inégalité de convexité

$$U(b) \leq \frac{c - b}{c - a}U(a) + \frac{b - a}{c - a}U(c)$$

est exactement équivalente à l'inégalité

$$U(b) - U(a) \leq \frac{(b - a)(U(c) - U(a))}{c - a},$$

soit

$$\frac{U(b) - U(a)}{b - a} \leq \frac{U(c) - U(a)}{c - a},$$

ce qui indique la croissance de la pente p_a sur I . L'ensemble du lemme en résulte. \square

LEMME 3.4: Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $U : C \rightarrow \mathbb{R}$. Alors la fonction U est dérivable à droite et à gauche en tout point de I et

$$U'_g(s) \leq U'_d(s) \leq \frac{U(t) - U(s)}{t - s} \leq U'_g(t) \leq U'_d(t)$$

pour $s < t$.

DÉMONSTRATION. Soit $x_0 \in I$. Si U est convexe, alors la pente $p_{x_0} : t \in I \setminus \{x_0\} \mapsto (U(t) - U(x_0))/(t - x_0)$ est croissante d'après le lemme précédent. On en déduit l'existence des limites à droite et à gauche

$$U'_d(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0^+} \frac{U(t) - U(x_0)}{t - x_0} = \inf_{t > x_0} \frac{U(t) - U(x_0)}{t - x_0},$$

$$U'_g(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0^-} \frac{U(t) - U(x_0)}{t - x_0} = \sup_{t < x_0} \frac{U(t) - U(x_0)}{t - x_0}.$$

avec de plus $U'_g(x_0) \leq U'_d(x_0)$. \square

COROLLAIRE 3.1: Soit C convexe de \mathbb{R}^n et $U : C \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Si, pour $x \in C$, la direction $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ engendre une demi-droite tronquée d'origine x , i. e. il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x + [0, \varepsilon)d \subset C$, alors la dérivée $U'_d(x)$ dans la direction d est bien définie comme la dérivée à droite en $t = 0$ de la fonction $t \in [0, \varepsilon) \mapsto U(x + td)$.

DÉMONSTRATION. IL suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction d'une variable $t \in [0, \varepsilon) \mapsto U(x + td)$. A priori, la valeur $U'_d(x)$ est dans $[-\infty, +\infty)$: si le segment $(-\varepsilon, +\varepsilon) \subset C$, alors le lemme précédent assure la finitude de $U'_d(x)$ comme minorée par la dérivée à gauche en $t = 0$, dérivée à gauche qui elle est majorée par $U'_d(0) \leq (U(x + td) - U(x))/t$ pour $0 < t < \varepsilon$. \square

PROPOSITION 3.4: Soit I intervalle ouvert de \mathbb{R} et $U : I \rightarrow \mathbb{R}$

- (1) Si U est différentiable, sont équivalentes
 - (a) La fonction U est convexe sur I ,
 - (b) $U(t) \geq U(s) + U'(s)(t - s)$ pour $s, t \in I$,
 - (c) La fonction U' est croissante.
- (2) Si U est dérivable deux fois, U est convexe si et seulement si $U'' \geq 0$. Si la dérivée seconde U'' est définie positive en tout point de I , alors la fonction U est strictement convexe sur I .

DÉMONSTRATION. Si U est convexe différentiable, alors la pente $m_{s,t}$ de la corde $[(s, U(s)), (t, U(t))]$ est fonction croissante de t , avec $\lim_{t \rightarrow s} = U'(s)$: c'est exactement l'inégalité $U(t) \geq U(s) + U'(s)(t - s)$. Si cette dernière égalité vaut pour tout s et t , on a $U'(s) \leq m_{s,t} \leq U'(t)$ pour $s < t$: c'est la croissance de la dérivée U' . Enfin, si U' est croissante, alors, l'égalité des accroissements finis donne

$$m_{s,t} = U'(x_{s,t}) \leq U'(x_{t,u}) = m_{t,u}, \quad s \leq x_{s,t} \leq t \leq x_{t,u} \leq u,$$

la croissance $m_{s,t} \leq m_{t,u}$ des pentes des cordes avec $s \leq t \leq u$ assurant donc la convexité de U .

La croissance de U' est équivalente à la positivité de U'' . L'assertion finale sur la convexité stricte est obtenue en reprenant le développé précédent avec attention sur les inégalités. \square

\triangle REMARQUE 3.3. La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto t^4$ est strictement convexe, sans que sa hessienne ne soit partout définie : la dérivée seconde $(t^2)''$ est nulle en $t = 0$. ∇

En plusieurs variables et avec des hypothèses de différentiabilité, la convexité admet des caractérisations exprimées en terme de dérivées :

PROPOSITION 3.5: Soit C ouvert convexe de \mathbb{R}^n et $U : C \rightarrow \mathbb{R}$

(1) Si U est différentiable sur C , les propriétés suivantes sont équivalentes

- (a) U est convexe sur C ;
- (b) $U(w) \geq U(v) + \langle \nabla U(v), w - v \rangle$ pour $v, w \in C$;
- (c) $\langle \nabla U(w) - \nabla U(v), w - v \rangle \geq 0$ pour $v, w \in C$.

Pour la stricte convexité, on a des inégalités strictes (pour $v \neq w$).

(2) Si U est de classe C^2 sur C , alors

- U est convexe sur C si et seulement si $\text{Hess } U$ est positive en tout point de C .
- si $\text{Hess } U$ est définie positive en tout point de C , alors U est strictement convexe sur C .

DÉMONSTRATION. Supposons U convexe. Alors, la fonction $U_{v,w}$ définie par $U_{v,w}(t) = U(\sigma_{v,w}(t))$ avec $\sigma_{v,w}(t) = v + t(w - v)$ est convexe et vérifie l'inégalité $U'_{v,w}(0) \leq U_{v,w}(1) - U_{v,w}(0)$ entre les pentes de la tangente en $t = 0$ et de la droite passant par $(0, U_{v,w}(0))$ et $(1, U_{v,w}(1))$, soit l'inégalité de (i).2. L'inégalité de (i).3 s'obtient en additionnant les inégalités de (i).2 pour les couples (v, w) et (w, v) . Enfin, si les inégalités (i).3 sont vérifiées, la fonction $U_{v,w}$ a une dérivée croissante : pour $t > s$

$$\begin{aligned} U'_{v,w}(t) - U'_{v,w}(s) &= \langle \nabla U(\sigma_{v,w}(t)) - \nabla U(\sigma_{v,w}(s)), w - v \rangle \\ &= \frac{\langle \nabla U(\sigma_{v,w}(t)) - \nabla U(\sigma_{v,w}(s)), \sigma_{v,w}(t) - \sigma_{v,w}(s) \rangle}{t - s} \geq 0 \end{aligned}$$

Pour la partie (ii), il suffit de remarquer que la dérivée seconde de $U_{v,v+w}$ en $t = 0$ est la hessienne en v appliquée au vecteur w : $U''_{v,v+w}(0) = \text{Hess } U(v)[w]$. \square

\triangle REMARQUE 3.4. L'identité (i).3 est une expression multidimensionnelle de la monotonie (croissance) de la dérivée. ∇

\triangleright EXEMPLES 3.4.

3.4.1 Les fonctions e^x sur \mathbb{R} , x^α avec $\alpha > 1$ ou $\alpha < 0$ sur \mathbb{R}^+ , $-x^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ sur $(0, 1)$, $-\log x$, $x \log x$, $x^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$, $x \log x$ sur \mathbb{R}_+ sont strictement convexes.

3.4.2 Si $\alpha > 1$, la fonction $x \mapsto |x|^\alpha$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $\alpha|x|^{\alpha-1}$ (valant 0 en $x = 0$) qui est croissante, donc convexe. Cette fonction est deux fois dérivable sur \mathbb{R} seulement si $\alpha \geq 2$, de dérivée alors $\alpha(\alpha - 1)|x|^{\alpha-2}$ positive sur \mathbb{R} .

3.4.3 Pour $\varepsilon > 0$, la fonction $U_{\varepsilon,\alpha} : x \in \mathbb{R} \mapsto (x^2 + \varepsilon^2)^{\alpha/2}$ est indéfiniment dérivable, avec comme dérivées $U'_{\varepsilon,\alpha}(x) = \alpha x(x^2 + \varepsilon^2)^{\alpha/2-1}$ et $U''_{\varepsilon,\alpha}(x) = \alpha(\varepsilon^2 + (\alpha - 1)x^2)(x^2 + \varepsilon^2)^{\alpha/2-2}$: elle est donc convexe (stricte) si $\alpha \geq 1$. Pour $\alpha \in (1, 2)$, on a

$$0 \leq U_{\varepsilon,\alpha}(x) - |x|^\alpha = \frac{\alpha\varepsilon^2}{2} \int_0^1 (x^2 + \varepsilon^2 u)^{\alpha/2-1} du \leq \frac{\alpha\varepsilon^\alpha}{2} \int_0^1 u^{\alpha/2-1} du$$

soit, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la convergence $U_{\varepsilon, \alpha}(x) \rightarrow |x|^\alpha$ uniforme sur tout compact : On retrouve donc ainsi la convexité de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|^\alpha$.

3.4.4 Soit \mathcal{S}_n^{++} le cône ouvert convexe des matrices définies positives. La fonction $S \in \mathcal{S}_n^{++} \mapsto \log \det S$ est concave. En effet, il suffit de montrer que l'application $t \in (0, 1) \mapsto \log \det(tS + (1-t)T)$ l'est pour tout $S, T \in \mathcal{S}_n^{++}$. Soit $R \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que $S = R^2$ ⁶. Alors

$$\begin{aligned} \log \det((S + (1-t)T)) &= \log \det(tR^2 + (1-t)T) \\ &= \log \det(R^2) + \log \det(t + (1-t)R^{-1}TR^{-1}) \\ &= \log \det(R^2) + \sum_{i=1}^n \log(t + (1-t)\lambda_i) \end{aligned}$$

où $(\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{+n}$ est le spectre des valeurs propres de la matrice symétrique définie positive $R^{-1}TR^{-1}$: chaque terme de cette somme est concave, donc leur somme aussi et donc aussi la fonction $S \in \mathcal{S}_n^{++} \mapsto \log \det S$.

3.4.5 La fonction *quadratique/linéaire* définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*$ par

$$f(x, y) = x^2/y, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

est convexe sur $\{y > 0\}$, vu la positivité de sa matrice hessienne

$$\text{Hess } F(x, y) = \frac{2}{y^3} \mathbb{T}(y, -x)(y, -x),$$

concave sur $\{y < 0\}$.

3.4.6 La fonction *log/somme/exp* définie par $U_n : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \log \sum_{k=1}^n e^{x_k}$ est convexe, comme il résulte de la positivité de sa hessienne⁷

$$\text{Hess } U_n(\log(z)) = \frac{1}{\text{sum}(z)} \text{diag}(z) - \frac{1}{\text{sum}(z)^2} z \mathbb{T} z, \quad z \in \mathbb{R}_{*+}^n$$

vu la positivité de

$$\text{Hess } U_n(\log(z))(v) = \frac{\text{sum}(z * v^2) \text{sum}(z) - \text{sum}(z * v)^2}{\text{sum}(z)^2}$$

en raison de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3.4.7 La concavité de la moyenne géométrique⁸ $G_n(x) = (\prod_{k=1}^n x_k)^{1/n}$ sur l'orthant positif résulte de calculs analogues. Si $L_x = (x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1})$, on a

$$\text{Hess } G_n(x) = n^{-2} G_n(x) \left[\mathbb{T} L_x L_x - n \text{diag}(x_1^{-2}, \dots, x_n^{-2}) \right]$$

et donc

$$\begin{aligned} \text{Hess } G_n(x)[h] &= n^{-2} G_n(x) [(L_x h)^2 - n \langle h, \text{diag}(x_1^{-2}, \dots, x_n^{-2}) h \rangle] \leq 0, \quad h = \mathbb{T}(h_1, \dots, h_n), \\ &\text{en utilisant Cauchy-Schwarz : } (L_x h)^2 = \langle L_x, \mathbb{T} h \rangle^2 \leq n \langle L_x * L_x, (\mathbb{T} h) * (\mathbb{T} h) \rangle. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Remarquons les liens entre ellipticité/coercivité (*cf.* définition ??) et convexité :

6. Si (σ_j) est le spectre de S , il existe une matrice orthogonale P telle que $S = \mathbb{T} P \text{diag}(\sigma_j) P$: la matrice $T = \mathbb{T} P \text{diag}(\sqrt{\sigma_j}) P$ convient.

7. On utilise ici les opérations telles qu'introduites dans R sur les matrices et la fonction sum .

8. La moyenne géométrique est un cas particulier de fonction de Cobb-Douglas, *cf.* l'exemple 3.5.2.

LEMME 3.5: (i) Si J de classe \mathcal{C}^2 , J est α -elliptique si et seulement si

$$(33) \quad \text{Hess } J(x)(v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad x \in V, v \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Si J est elliptique, alors J est strictement convexe et coercive ($J(x) \rightarrow \infty$ si $\|x\| \rightarrow \infty$) avec

$$J(y) \geq J(x) + \langle \nabla J(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2$$

DÉMONSTRATION. Si J est α -elliptique

$$\langle \nabla J(x + t(y - x)) - \nabla J(x), t(x - y) \rangle \geq \alpha t^2 \|x - y\|^2$$

d'où après division par t^2 et $t \rightarrow 0^+$ l'inégalité (33). Réciproquement, on minore simplement, après avoir écrit la formule de Taylor avec reste intégral de la fonction $t \in [0, 1] \rightarrow \langle \nabla J(x + t(y - x)), (y - x) \rangle$,

$$\langle \nabla J(y) - \nabla J(x), (y - x) \rangle = \int_0^1 \text{Hess } J(x + t(y - x))(y - x) dt \geq \alpha \|y - x\|^2.$$

Pour (ii), la stricte convexité vaut car $\text{Hess } J$ est définie positive. En outre, avec la formule de Taylor

$$J(y) = J(x) + \langle \nabla J(x), y - x \rangle + \int_0^1 (1 - t) \langle \text{Hess } J(x + t(y - x))(y - x) dt$$

on obtient la minoration $J(y) - J(x) \geq \langle \nabla J(x), y - x \rangle + \alpha/2 \|y - x\|^2$. \square

Terminons cette section par des éléments de preuve de l'inégalité de Jensen (31).

$$(34) \quad U(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[U(X)],$$

avec X variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^n et $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.

DÉMONSTRATION DE L'INÉGALITÉ DE JENSEN. Supposons tout d'abord U différentiable. Pour $\omega \in \Omega$, la fonction $U_\omega : t \in [0, 1] \mapsto U(tX(\omega) + (1 - t)\mathbb{E}[X])$ est convexe dérivable à droite en $t = 0$: la caractérisation des fonctions convexes de la proposition 3.4 fournit l'inégalité $U_\omega(1) - U_\omega(0) \geq U'_\omega(0)$ et par suite

$$(35) \quad U(X(\omega)) - U(\mathbb{E}[X]) \geq \langle \nabla U(\mathbb{E}[X]), X(\omega) - \mathbb{E}[X] \rangle$$

qu'on s'empresse d'intégrer sur Ω pour obtenir $\mathbb{E}(U(X)) - U(\mathbb{E}[X]) \geq 0$.

Si U n'est pas supposée dérivable, on admet l'existence d'un hyperplan d'appui H_X dans $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y$ passant par le point $(\mathbb{E}[X], U(\mathbb{E}[X]))$ et déterminant un demi-espace H_X^+ contenant l'épigraphe $\mathbf{epi} U$: pour $\nu \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}$ convenables avec $\|\nu\|^2 + a^2 > 0$, ce demi-espace H_X^+ a pour équation $\langle \nu, x - \mathbb{E}(X) \rangle + a(y - U(\mathbb{E}(X))) \geq 0$. Vu que $(x, y) \in \mathbf{epi} U \subset H_X^+$ pour tout $y \geq U(x)$ le réel a est positif; il est non nul, sinon, en prenant $x_\varepsilon = \mathbb{E}(X) - \varepsilon\nu$, on aurait $0 \leq \langle \nu, x_\varepsilon - \mathbb{E}(X) \rangle = -\varepsilon\|\nu\|_2^2$ ce qui n'est pas vu que $\nu \neq 0$. On peut donc prendre comme équation du demi-plan $h_X(x, y) \geq 0$ où on a posé $h_X(x, y) = \langle \mathbf{n}, \mathbb{E}[X] - x \rangle + y - U(\mathbb{E}(X))$ (on a pris $\mathbf{n} = -\nu/a$; si U est fonction d'une variable, \mathbf{n} est dans l'intervalle $[U'_g(\mathbb{E}[X]), U'_d(\mathbb{E}[X])]$). On a donc l'analogue⁹ de (35) pour $(X(\omega), U(X(\omega))) \in \mathbf{epi} U$

$$U(X(\omega)) - U(\mathbb{E}[X]) \geq \langle \mathbf{n}, X(\omega) - \mathbb{E}[X] \rangle,$$

ce qui permet de conclure comme précédemment. \square

9. Un $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie $U(x) \geq U(x_0) + \langle \mathbf{n}, x - x_0 \rangle$ pour tout $x \in \mathbf{dom} U$ est appelé un sous-gradient de la fonction U au point x_0 : si U est convexe différentiable, le gradient $\nabla_{x_0} U$ est un sous-gradient de U en x_0 . Cette notion de sous-gradient est le lien entre les deux preuves de l'inégalité de Jensen sous des hypothèses différentes.

5. Fonctions quasi-convexes

Rappelons la notion de fonction quasi-convexe qui généralise celle de fonction convexe.

DÉFINITION 3.4: Une fonction U est dite quasi-convexe si pour tout A le domaine de sous-niveau $S_{U,A} = \{x \in \mathbf{dom} U, U(x) \leq A\}$ est convexe. La fonction U est quasi-concave si $-U$ est quasi-convexe. La fonction U est dite quasi-linéaire si U et $-U$ sont quasi-convexes.

△ REMARQUES 3.5.

- (1) L'inégalité (30) de convexité implique la quasi-convexité d'une fonction convexe : si $U(x), U(y) \leq A$, alors

$$U(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta U(x) + (1 - \theta)U(y) \leq \theta A + (1 - \theta)A \leq A,$$

et donc $\theta x + (1 - \theta)y$ appartient à l'ensemble de sous-niveau $S_{U,A}$. La réciproque est fautive : toute fonction monotone (par exemple $t \in \mathbb{R} \mapsto t^3$) est quasi-convexe.

- (2) Comme la convexité, la quasi-convexité de la fonction U est caractérisée par celle de ses restrictions aux segments linéaires de C .
- (3) En micro-économie, c'est l'ordre des valeurs qui importe pour exprimer les préférences (du consommateur ou du producteur) entre différentes alternatives. Appliquer une fonction monotone ne change pas les critères de choix, qui sont exprimés par des ensembles de sur-niveau (ou sous-niveau) emboîtés, et de manière générale la géométrie des lignes de niveau (indépendamment des valeurs qui leur sont assignées).
- (4) Une fonction quasi-concave est caractérisée par la convexité de ses ensembles de sur-niveau $S_U^A = \{x; U(x) \geq A\}$. ▽

▷ EXEMPLES 3.5.

3.5.1 Une fonction monotone est quasi-linéaire. Ainsi des fonctions logarithmes \ln (concave, mais non convexe), entière $E(x) = \sup\{z \in \mathbb{Z}, z \geq x\}$ et plafond $\text{ceil } x = \inf\{z \in \mathbb{Z}, z \geq x\}$ (non convexe, non concave et non continue).

3.5.2 Une fonction $f : (m_-, m_+) \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *unimodale avec un minimum* si elle admet un minimum m_* en étant décroissante sur (m_-, m_*) et croissante sur (m_*, m_+) : toute fonction unimodale avec un minimum est quasi-convexe. Avec une définition analogue, une fonction est *unimodale avec un maximum* est quasi-concave. Le point de minimum (ou de maximum) est désigné comme *mode*. Beaucoup de fonctions de densité de mesure de probabilité sur la droite sont unimodales quasi-concaves, comme par ex. la gaussienne $x \in \mathbb{R} \mapsto (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$.

3.5.3 La fonction de Cobb-Douglas $U_{CD}^{\alpha\beta} : (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mapsto x^\alpha y^\beta$ est quasi-concave si $\alpha, \beta \in [0, 1]$, elle est concave si et seulement si $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in [0, 1]$. En effet, si $x^\alpha y^\beta \geq A, \tilde{x}^\alpha \tilde{y}^\beta \geq A$, vu la concavité de $t \mapsto t^\alpha$ et l'inégalité $u + u^{-1} \geq 2$,

$$\begin{aligned} (\lambda x + (1 - \lambda)\tilde{x})^\alpha (\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y})^\beta &\geq (\lambda x^\alpha + (1 - \lambda)\tilde{x}^\alpha)(\lambda y^\beta + (1 - \lambda)\tilde{y}^\beta) \\ &\geq \lambda^2 A + \lambda(1 - \lambda)[x^\alpha \tilde{y}^\beta + \tilde{x}^\alpha y^\beta] + (1 - \lambda)^2 A \\ &\geq A[\lambda^2 + \lambda(1 - \lambda)[y^{-\beta} \tilde{y}^\beta + \tilde{y}^{-\beta} y^\beta] + (1 - \lambda)^2] \\ &\geq A[\lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2] \geq A. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la hessienne de $U_{CD}^{\alpha\beta}$ est

$$\text{Hess } U_{CD}^{\alpha\beta}(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta & \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} \\ \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2} \end{pmatrix} = U_{CD}^{\alpha\beta}(x, y) \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)x^{-2} & \alpha\beta(xy)^{-1} \\ \alpha\beta(xy)^{-1} & \beta(\beta-1)y^{-2} \end{pmatrix},$$

avec déterminant

$$\det \text{Hess } U_{CD}^{\alpha\beta}(x, y) = \alpha\beta(1-\alpha-\beta)U_{CD}^{\alpha\beta}(x, y)^2(xy)^{-2}.$$

Ainsi la fonction $U_{CD}^{\alpha\beta}$ est concave si et seulement si $\alpha, \beta \in [0, 1], \alpha + \beta \leq 1$.

3.5.4 La fonction $x \in E \mapsto (\langle a, x \rangle + b) / (\langle c, x \rangle + d)$ est quasi-convexe et quasi-concave sur le domaine $\{\langle c, x \rangle + d > 0\}$ vu que l'ensemble de sous-niveau

$$\begin{aligned} S_A^\pm &= \{\langle c, x \rangle + d > 0, \pm(\langle a, x \rangle + b) / (\langle c, x \rangle + d) \leq A\} \\ &= \{\langle c, x \rangle + d > 0\} \cap \{\pm(\langle a, x \rangle + b) - A(\langle c, x \rangle + d) \leq 0\}. \end{aligned}$$

est un polyèdre convexe.

3.5.5 Soit, pour U définie sur \mathbb{R} , la fonction \hat{U} définie par $\hat{U}(t) = U(-t)$. Alors U est quasi-convexe si et seulement si \hat{U} l'est.

3.5.6 Soit $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ représentant un flux de trésorerie sur une période de n unités temporelles (mois, années, ...), avec des opérations de débit ($x_i < 0$) ou de crédit ($x_i > 0$). La valeur courante V_{ct} de la trésorerie avec taux d'intérêt $r \geq 0$ est définie comme

$$V_{ct}(x, r) = \sum_{i=0}^n (1+r)^{-i} x_i, \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^{n+1},$$

Soit $T \subset \mathbb{R}^{n+1}$ l'ensemble des flux de trésorerie x tels que $x_0 < 0$ (on démarre avec un investissement de $|x_0|$) et $x_0 + x_1 + \dots + x_n > 0$ (la trésorerie restante $x_1 + \dots + x_n$ excède l'investissement initial). On a $V_{ct}(x, 0) = \sum_{i=0}^n x_i > 0$ et $V_{ct}(x, +\infty) = x_0 < 0$: on définit le taux de rentabilité interne T_{ri} sur T suivant

$$T_{ri}(x) = \inf\{r \geq 0, V_{ct}(x, r) = 0\}, \quad x \in T.$$

La fonction T_{ri} est quasi-concave vu que

$$\{T_{ri}(x) \geq \rho\} = \{V_{ct}(x, r) > 0, 0 \leq r < \rho\} = \cap_{0 \leq r < \rho} \left\{ \sum_{i=0}^n (1+r)^{-i} x_i > 0 \right\}$$

est convexe comme intersection de demi-espaces.

3.5.7 Si une fonction d'utilité est quasi-concave, l'ensemble des préférences $\{U \geq A\}$ d'utilité au moins A est convexe.

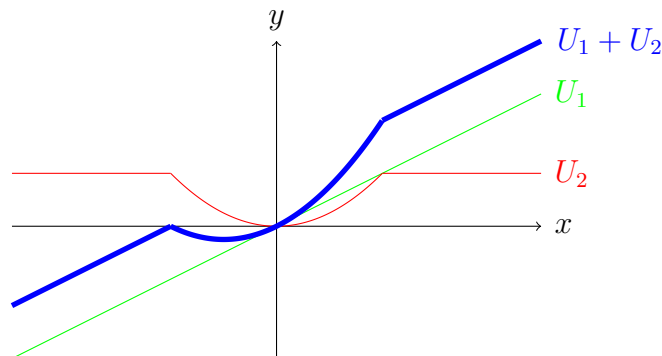


FIGURE III.5. Les fonctions U_1, U_2 sont quasi-convexes, mais pas $U_1 + U_2$.

- 3.5.8** Les fonctions $U_1(x) = x$ et $U_2(x) = \inf(x^2, 1)$ sont quasi-convexes, alors que leur somme de l'est pas, cf. figure III.5.
- 3.5.9** Pour $\alpha_i > 0$ et U_i quasi-convexes, le maximum pondéré $\sup_i(\alpha_i U_i)$ est quasi-convexe.
- 3.5.10** Si h est croissante et U quasi convexe, $h \circ U$ est quasi-convexe.
- 3.5.11** Pour A linéaire, $x \mapsto U(Ax + b)$ est quasi-convexe si U l'est.
- 3.5.12** Si $U(x, y)$ est quasi-convexe et C convexe, alors $\inf_{y \in C} U(x, y)$ est quasi-convexe.
- 3.5.13** $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2}$ est quasi-concave, mais non concave. \triangleleft

PROPOSITION 3.6: *Soit C convexe. La fonction $U : C \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction quasi-convexe sur C si et seulement si*

$$U(x + \lambda(y - x)) \leq \max[U(x), U(y)], \quad x, y \in C, \lambda \in [0, 1].$$

DÉMONSTRATION. Si U est quasi-convexe, les points x et y , pour lesquels on supposera $U(x) \leq U(y)$ à l'échange de x, y près, sont dans $U^{-1}((-\infty, U(y)])$ qui, convexe, contient le segment $[x, y]$: ainsi, $U(x + \lambda(y - x)) \leq U(y) = \max(U(x), U(y))$ pour $\lambda \in [0, 1]$.

Pour la réciproque, soit $S_A = U^{-1}((-\infty, A])$ et $x, y \in S_A$: vu que $U(x + \lambda(y - x)) \leq \max(U(x), U(y)) \leq A$, le segment $[x, y]$ est inclus dans S_A , qui est donc convexe. \square

Cette proposition permet la définition de stricte quasi-convexité (et stricte quasi-concavité) :

DÉFINITION 3.5: *Soit C convexe. La fonction $U : C \rightarrow \mathbb{R}$ est dite strictement quasi-convexe si*

$$U(x + \lambda(y - x)) < \max[U(x), U(y)], \quad x, y \in C, \lambda \in (0, 1).$$

\triangleright **EXEMPLE 3.6.** Notons $\text{card}(x)$ le nombre de composantes non nulles de x : la fonction card est quasi-concave sur \mathbb{R}_+^n (mais pas sur \mathbb{R}^n !) vu

$$\text{card}(x + y) \geq \min(\text{card}(x), \text{card}(y)), \quad x, y \in \mathbb{R}_+^n \quad \triangleleft$$

Comme pour la convexité, la quasi-convexité de U est caractérisée par le comportement de U en restriction aux intersections de droites avec le domaine de U .

PROPOSITION 3.7: *Soit U continue sur \mathbb{R} . La fonction U est quasi-convexe si et seulement si U est monotone ou si U est unimodale avec un minimum (i. e. il existe $x_* \in \text{dom } U$ tel que U est décroissante sur $(-\infty, x_*) \cap \text{dom } U$ et croissante sur $[x_*, \infty) \cap \text{dom } U$).*

DÉMONSTRATION. Si U est croissante, $U^{-1}((-\infty, A]) = (-\infty, x_A]$ avec $x_A = \sup\{x, U(x) \leq A\}$: U est donc quasi-convexe. Si U est décroissante, alors \widehat{U} définie par $\widehat{U}(x) = U(-x)$ est croissante, donc quasi-convexe : il en est de même pour U .

Soit U avec valeur minimum m prise sur l'intervalle maximal $[x_-, x_+]$, décroissante sur $(-\infty, x_-]$ et croissante sur $[x_+, \infty)$: $U^{-1}((-\infty, A])$ est vide si $A \leq m$, sinon égal à l'intervalle $[x_-(A), x_+(A)]$ avec $x_-(A) = \inf\{x \leq x_-, U(x) \leq A\}$ et $x_+(A) = \sup\{x \geq x_+, U(x) \leq A\}$. Ainsi, U est quasi-convexe.

Si U n'est pas d'un des trois types précédents, quitte à considérer \widehat{U} , il existe $x_- < x_0 < x_1$ tels que $U(x_-) < U(x_0)$ et $U(x_0) > U(x_1)$: si $A \in (U(x_-), U(x_0)) \cap (U(x_1), U(x_0))$, alors $U^{-1}((-\infty, A])$ n'est pas connexe (et par suite non convexe) : d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction U continue, il contient un point dans chaque intervalle (x_-, x_0) et (x_0, x_1) , mais pas x_0 . \square

Pour les fonctions différentiables, la quasi-convexité est exprimable en termes analogues à la convexité

PROPOSITION 3.8: Soit C un ouvert convexe de E . (i) Soit U différentiable définie sur C de E . La fonction $U : C \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable est quasi-convexe si et seulement si

$$U(y) \leq U(x) \implies \langle \nabla U(x), y - x \rangle \leq 0, \quad x, y \in C.$$

(ii) Soit U deux fois différentiable définie sur un ouvert convexe C de E avec $\nabla U(x) \neq 0$ pour $x \in C$. Si la fonction U est quasi-convexe, alors la hessienne $\text{Hess}U(x)$ est positive sur l'hyperplan orthogonal à $\nabla U(x)$ pour tout $x \in C$; réciproquement si la hessienne $\text{Hess}U(x)$ est strictement positive sur l'hyperplan orthogonal à $\nabla U(x)$ pour tout $x \in C$, alors U est quasi-convexe.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer la propriété au premier ordre pour des fonctions d'une variable. Supposons U quasi-convexe et soient x, y avec $U(y) \leq U(x)$. On a donc $U(x + t(y - x)) \leq U(x)$ pour $t \in (0, 1)$, d'où, en dérivant en $t = 0$ l'inégalité $\langle \nabla U(x), y - x \rangle \leq 0$. Réciproquement, supposons x, y avec $U(y) \leq U(x)$, $\pm(x - y) \geq 0$ et $\langle \nabla U(x), y - x \rangle > 0$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $U(x \pm \varepsilon) > U(x \pm \varepsilon/2) > U(x)$: la partie $U^{-1}((-\infty, U(x \pm \varepsilon/2)])$ contient x et y , sans contenir $x + \varepsilon$; ainsi U n'est pas quasi-convexe.

Pour (ii), remarquons que si $\dim E = 1$, la condition de non annulation de ∇U implique que U est monotone: U est donc quasi convexe. On suppose dans la suite $\dim E \geq 2$.

Supposons tout d'abord U quasi-convexe. D'après le (i), si $\langle \nabla U(x), z \rangle > 0$, alors $U(x) < U(x + z)$: ainsi par continuité $U(x) \leq U(x + z)$ pour tout z orthogonal à $\nabla U(x)$: x est un minimum de $y \mapsto U(y)$ sous la condition $\langle \nabla U(x), y - x \rangle = 0$; il en résulte la positivité de la restriction de $\text{Hess}U(x)$ à l'orthogonal de $\nabla U(x)$ (égale à la hessienne de la restriction de U à l'orthogonal de $\nabla U(x)$).

Réciproquement supposons la hessienne de U strictement positive sur l'orthogonal de $\nabla U(x)$ passant par x , soit l'hyperplan $H_x = \{\langle \nabla U(x), Y - x \rangle = 0\}$. Alors le point x est minimum local de la restriction de U à $H_x \cap C$ d'après le théorème 2.4.(ii). Montrons que x est un minimum local de U dans le demi-espace $E_x = \{\langle \nabla U(x), y - x \rangle \geq 0\}$ (i. e. minimum global sur $E_x \cap B(x, \rho)$ avec ρ assez petit): soit en effet $y \in (E_x \setminus H_x) \cap C$, $y(\theta) = \theta y + (1 - \theta)x$ et $F_y(\theta) = U(y(\theta))$. Soit θ_0 le sup des θ tels que $F_y(\theta)$ soit le maximum de F_y sur $[0, 1]$. Vu que $F'_y(0) = \langle \nabla U(x), y - x \rangle > 0$, $U(y(\theta)) > U(x)$ pour $\theta > 0$ au voisinage de $\theta = 0$: ainsi $\theta_0 > 0$. Si $\theta_0 < 1$, on a $0 = F'_y(\theta_0) = \langle \nabla U(y(\theta_0)), y - x \rangle = 0$ et donc $\langle \nabla U(y(\theta_0)), y(\theta_0 + h) - y(\theta_0) \rangle = 0$. Par hypothèse, $y(\theta_0)$ est un minimum strict de la restriction de U à l'hyperplan $H_{y(\theta_0)}$ qui contient $y(\theta_0 + h)$: ainsi pour $h > 0$ suffisamment petit, $U(y(\theta_0)) < U(y(\theta_0 + h))$, ce qui contredit le caractère maximal de θ_0 dans $[0, 1]$. On a donc $\theta_0 = 1$, et par suite $U(y) = F_y(1) \geq U(x)$ et x est un minimum local de U sur E_x .

Soit $x, y \in C$ et $z \in [x, y]$. Le point z minimise localement U sous la contrainte $\langle \nabla U(z), y - z \rangle \geq 0$, i. e. dans le demi-espace E_z . Si $z = \theta x + (1 - \theta)y$,

$$\langle \nabla U(z), z \rangle = \theta \langle \nabla U(z), x \rangle + (1 - \theta) \langle \nabla U(z), y \rangle,$$

ainsi a-t-on $\langle \nabla U(z), z \rangle \leq \max(\langle \nabla U(z), x \rangle, \langle \nabla U(z), y \rangle)$: soit ¹⁰ $\langle \nabla U(z), z \rangle \leq \langle \nabla U(z), y \rangle$, c'est à dire $y \in E_z$ et alors $U(z) \leq U(y)$, soit $\langle \nabla U(z), z \rangle \leq \langle \nabla U(z), x \rangle$ et alors $U(z) \leq U(x)$: dans tous les cas, on a $U(z) \leq \max(U(x), U(y))$, ce qui démontre la quasi-convexité de U . \square

10. Géométriquement, $\nabla U(z)$ fait un angle aigu avec $x - z$ ou avec $y - z$.

△ REMARQUE 3.6. Ainsi, si $E = \mathbb{R}^n$, d'après le théorème A.4 de l'appendice, la condition du deuxième ordre de quasi-convexité pour U se lit sur les $n - 1$ mineurs principaux dominants d'ordre $3, \dots, n, n + 1$ de la matrice hessienne $\text{Hess } U$ bordée par le gradient ∇U

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^T\nabla U(x) \\ \nabla U(x) & \text{Hess } U(x) \end{pmatrix}$$

où il a été supposé la première coordonnée de $\nabla U(x)$ non nulle. ▽

▷ EXEMPLE 3.7. La fonction de Cobb-Douglas $U_{CD}^{\alpha, \beta}(x, y) = x^\alpha y^\beta$ a pour hessienne bordée par $\nabla U_{CD}^{\alpha, \beta}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha x^{\alpha-1} y^\beta & \beta x^\alpha y^{\beta-1} \\ \alpha x^{\alpha-1} y^\beta & \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} y^\beta & \alpha\beta x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \\ \beta x^\alpha y^{\beta-1} & \alpha\beta x^{\alpha-1} y^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2} \end{pmatrix} = U_{CD}^{\alpha, \beta} \begin{pmatrix} 0 & \alpha x^{-1} & \beta y^{-1} \\ \alpha x^{-1} & \alpha(\alpha-1)x^{-2} & \alpha\beta(xy)^{-1} \\ \beta y^{-1} & \alpha\beta(xy)^{-1} & \beta(\beta-1)y^{-2} \end{pmatrix}$$

de déterminant

$$d_3(x, y) = \alpha\beta(\alpha + \beta)U_{CD}^{\alpha, \beta}(x, y)^3(xy)^{-2}.$$

elle est donc quasi-concave pour $\alpha, \beta > 0$. ◁

△ REMARQUE 3.7. Malgré cette similarité des caractérisations de la convexité et quasi-convexité à l'ordre 1, il y a des différences importantes : un minimum local d'une fonction convexe est un minimum global, ce n'est pas nécessairement le cas pour une fonction quasi-convexe : par ex., la fonction sur \mathbb{R} constante sur l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ et strictement croissante en dehors admet x_0 comme minimum local non global. ▽

PROPOSITION 3.9: Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et U_{CD}^α la fonction de Cobb-Douglas définie par $U_{CD}^\alpha(x) = \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}$. La fonction U_{CD}^α est quasi-concave, concave si et seulement si $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq 1$.

DÉMONSTRATION. Vu que la fonction \log est croissante, U_{CD}^α et $\log U_{CD}^\alpha$ sont simultanément quasi-concaves : $\log U_{CD}^\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j \log x_j$ est clairement concave, donc quasi-concave.

Démontrons le lemme suivant

LEMME 3.6: Si U est quasi-concave sur \mathbb{R}_+^n à valeurs positives et homogène de degré $d \in [0, 1]$, alors U est concave.

DÉMONSTRATION DU LEMME. Posons $C_{x,y} = (U(y)/U(x))^{1/d}$. Par d -homogénéité et la concavité de $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto U(tx) = t^d U(x)$ puisque $d \leq 1$, on a,

$$\alpha U(x) + (1 - \alpha)U(y) = \alpha U(x) + (1 - \alpha)U(C_{x,y}x) \leq U((\alpha + (1 - \alpha)C_{x,y})x)$$

et de manière analogue

$$\alpha U(x) + (1 - \alpha)U(y) \leq U((1 - \alpha + \alpha C_{y,x})y).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \alpha U(x) + (1 - \alpha)U(y) &\leq \inf \{U((\alpha + (1 - \alpha)C_{x,y})x), U((1 - \alpha + \alpha C_{y,x})y)\} \\ &\leq U(\theta(\alpha + (1 - \alpha)C_{x,y})x + (1 - \theta)(1 - \alpha + \alpha C_{y,x})y) \\ &= U(\alpha x + (1 - \alpha)y), \end{aligned}$$

où on a utilisé la quasi-concavité de U , puis introduit θ tel que $\theta(\alpha + (1 - \alpha)C_{x,y}) = \alpha$ qui vérifie aussi, vu $C_{x,y} = C_{y,x}^{-1}$,

$$\begin{aligned} (1 - \theta)(1 - \alpha + \alpha C_{y,x}) &= \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + (1 - \alpha)C_{x,y}}\right) (1 - \alpha + \alpha C_{y,x}) \\ &= \frac{(1 - \alpha)C_{x,y}}{\alpha + (1 - \alpha)C_{x,y}} (1 - \alpha + \alpha C_{y,x}) = 1 - \alpha. \quad \square \end{aligned}$$

Soit $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$. La fonction U_{CD}^α est homogène de degré $|\alpha|$: vu que son log est concave (donc quasi-concave) et que toute fonction croissante d'une fonction quasi-concave est quasi-concave, elle est donc quasi-concave. Vu l'égalité $U_{CD}^\alpha(x, \dots, x) = x^{|\alpha|}$, une condition nécessaire pour la concavité de U_{CD}^α est $|\alpha| \leq 1$: c'est une condition suffisante vu le lemme précédent et l'homogénéité de degré $|\alpha| \leq 1$ de U_{CD}^α . \square

COROLLAIRE 3.2: Soit $U_{CES}^{\rho,\sigma,\alpha}$ la fonction¹¹ définie par

$$U_{CES}^{\rho,\sigma,\alpha}(x) = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^\rho \right)^\sigma, \quad x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Si $\rho \leq 1$, la fonction $U_{CES}^{\rho,\sigma,\alpha}$ est quasi-concave. Si $\rho \leq 1$ et $\rho\sigma \leq 1$, la fonction $U_{CES}^{\rho,\sigma,\alpha}$ est concave.

DÉMONSTRATION. La fonction $U_{CES}^{\rho,\sigma,\alpha}$ est la composée de la fonction concave (et donc quasi-concave) $x \mapsto \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^\rho$ comme somme de fonctions concaves et de la fonction croissante $t \mapsto t^\sigma$: elle est donc quasi-concave. Par ailleurs, $U_{CES}^{\rho,\sigma,\alpha}$ est homogène de degré $\rho\sigma$, et donc par suite concave d'après le lemme 3.6 si $\rho\sigma \leq 1$. \square

Il est utile de représenter les sous-niveaux d'une fonction quasi-convexe par des sous-niveaux d'une fonction convexe : pour A , il existe une fonction convexe φ_A telle que $U^{-1}((-\infty, A]) = \varphi_A^{-1}((-\infty, 0])$. On peut prendre par exemple pour φ_A la fonction valant 0 sur $U^{-1}((-\infty, A])$, $+\infty$ sinon. On peut prendre aussi $\psi_A(x) = d(x, U^{-1}((-\infty, A]))$.

▷ **EXEMPLE 3.8.** Soit p convexe et q concave définie sur C , avec $p(t) \geq 0$ et $q(t) > 0$ sur C . Alors la fonction p/q est quasi-convexe sur C et, notant $\varphi_t = p - tq$ pour $t \geq 0$, on a φ_t convexe avec $t \mapsto \varphi_t(x)$ décroissante à x fixé. \triangleleft

La proposition précédente indique la concavité de la moyenne géométrique M_g : on peut l'établir de diverses manières.

PROPOSITION 3.10: Soit M_g la fonction moyenne géométrique $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{O}_{++}^n \mapsto (x_1 \dots x_n)^{1/n}$. La fonction M_g est concave.

DÉMONSTRATION. En posant $y_i = x_i^{-1}$, la hessienne de M_g est donnée par

$$[\text{Hess } M_g](x) = \frac{M_g(x)}{n^2} \left[(1 - n\delta_{ij}) y_i y_j \right]$$

soit

$$[\text{Hess } M_g](x)[h] = \frac{M_g(x)}{n^2} \left[\langle h, y \rangle^2 - n \|y * h\|^2 \right], \quad h \in \mathbb{R}^n$$

qui est négative d'après Cauchy-Schwarz, d'où la concavité de M_g .

11. Cette fonction de production est dite à élasticité constante de substitution (CES : *Constant Elasticity of Substitution* en anglais). Si $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$, alors $U_{CES}^{\rho,1/\rho,\alpha} \mapsto U_{CD}^\alpha$ lorsque $\rho \rightarrow 0^+$, vu que $\sum_j \alpha_j x_j^\rho = \sum_j \alpha_j + \rho(\sum_j \alpha_j \ln x_j) + o(\rho)$.

Autre méthode : D'après l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique, on a pour $\xi \in \mathbb{O}_{++}^n$

$$\frac{1}{n} \langle \xi, x \rangle \geq \left(\prod_{i=1}^n \xi_i x_i \right)^{1/n} = \left(\prod_{i=1}^n \xi_i \right)^{1/n} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} = M_g(\xi) M_g(x)$$

ce qui implique

$$(36) \quad \langle \xi, x \rangle \geq \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} = M_g(x),$$

si $M_g(\xi) \geq n^{-1}$, et par suite

$$\min_{\substack{\xi_i > 0, i=1, \dots, n \\ M_g(\xi) \geq n^{-1}}} \langle \xi, x \rangle = M_g(x), \quad x \in \mathbb{O}_{++}$$

vu que la moyenne $M_g(x)$ minore le membre de gauche en vertu de l'inégalité précédente, cette inégalité étant une égalité pour $\xi_* = (M_g(x)/(nx_i))$ qui vérifie $\prod_{i=1}^n \xi_{*i} = n^{-n}$, soit $M_g(\xi_*) = n^{-1}$. La fonction M_g , min de fonctions linéaires, est donc concave. \square

6. Programmation convexe

DÉFINITION 3.6: Soient C un convexe de \mathbb{R}^n , une fonction $U : C \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, une matrice A d'ordre (m, n) avec un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ et des fonctions $h_j : C \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, p$ concaves. Le programme convexe associé est le problème d'optimisation

$$(37) \quad \inf_{\substack{Ax=b \\ h_j(x) \geq 0, j=1, \dots, p}} U(x).$$

Si U est concave, le problème (équivalent à la recherche du minimum de la fonction convexe $-U$) suivant

$$\sup_{\substack{Ax=b \\ h_j(x) \geq 0, j=1, \dots, p}} U(x)$$

est dit aussi convexe.

Par concavité des h_j , la partie $R = C \cap \bigcap_{j=1}^p h_j^{-1}(\mathbb{R}_+) \cap \{Ax = b\}$ des points réalisables du programme (38) est fermée convexe : un problème d'optimisation convexe est donc de la forme générale $\inf_{x \in C} U(x)$ où la fonction U et la partie C sont convexes. Le théorème 3.1 a énoncé comment tout convexe fermé C est égal à l'intersection de demi-espaces $\{\langle v, x \rangle \geq C_v\}$ avec $v \in E \setminus \{0\}$: ainsi, le problème d'optimisation $\inf_{x \in C} U(x)$ peut être présenté comme $\inf_{f_a(x) \geq 0, a \in A} U(x)$ avec une famille (finie ou infinie) $(f_a)_{a \in A}$ de formes affines. En fait, il y a beaucoup de problèmes d'optimisation qui peuvent être présentés comme des problème d'optimisation convexe !

▷ **EXEMPLES 3.9.**

3.9.1 Les deux programmes

$$\inf_{\substack{x/(1+y^2) \geq 0 \\ (x+y)^2 \leq 0}} [x^2 + y^2] \quad \inf_{\substack{x \geq 0 \\ x+y=0}} [x^2 + y^2]$$

sont différents, mais néanmoins équivalents, le second étant convexe.

3.9.2 Les programmes

$$\min_x \left(\max_{j=1}^p [\langle a_j, x \rangle + b_j] \right) \quad \min_{\langle a_j, x \rangle + b_j \leq t, j=1, \dots, p} [t].$$

sont équivalents, le second étant linéaire. \triangleleft

△ REMARQUES 3.8.

- (1) Le problème $\max_{x \in C} U(x)$ où U est convexe n'est pas un problème d'optimisation convexe : cela peut être un problème difficile, tant pour l'analyse des solutions que pour leur calcul numérique.
- (2) La classe importante des programmes linéaires correspond aux programmes avec fonction d'objectifs linéaires et contraintes affines en égalités ou inégalités

LEMME 3.7: *Quitte à rajouter des variables, un programme linéaire peut être mis sous l'une ou l'autre des deux formes*

$$\inf_{Ax \leq b} \langle h, x \rangle, \quad \inf_{B(y', y'') = v, y' \geq 0} \langle h, (y', y'') \rangle,$$

où A et B sont des opérateurs linéaires.

DÉMONSTRATION. Un programme linéaire est de la forme

$$\inf_{\substack{\langle g_i, x \rangle = \alpha_i, i=1, \dots, k \\ \langle h_j, x \rangle \leq \beta_j, j=1, \dots, \ell}} \langle h, x \rangle$$

Chaque égalité $\langle g_i, x \rangle = \alpha_i$ est équivalente à la conjonction des deux inégalités $-\langle g_i, x \rangle \leq -\alpha_i, \langle g_i, x \rangle \leq \alpha_i$, l'ensemble des inégalités se rassemblant ainsi dans l'inégalité vectorielle, composante par composante, $Ax - b \geq 0$, où A est une matrice à $m = 2k + \ell$ lignes et n colonnes : cela donne une présentation suivant la première forme. Pour obtenir la seconde forme à partir de la première, on introduit des variables, dites d'*ajustement* ou d'*écart*, $s_i, i = 1, \dots, m$ telles que l'inégalité $Ax \leq b$ soit équivalente à $(A \text{ Id})^\top(x \ s) = Ax + s = b$ avec $s = (s_i) \geq 0$: c'est la deuxième forme. Cette deuxième forme est équivalente à la première d'après l'argument précédent. □

- (3) Le programme en moindres carrés $\inf_{x \in C} \|Ax - b\|^2$ est un exemple de programme convexe quadratique.
- (4) Définissant la partie convexe $C_g = \{x \geq 0, y \geq 0, g(x, y) \geq 0\}$, la fonction $g(x, y) = xy - 1$ n'est ni convexe ni concave (mais quasi-concave) vu que sa hessienne $\text{Hess}(xy) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est ni positive ni négative. Cependant les fonctions $\bar{g}(x, y) = \sqrt{xy} - 1$ et $\tilde{g}(x, y) = \log x + \log y$ sont concaves, avec $C_g = C_{\bar{g}} = C_{\tilde{g}}$ et peuvent être prises à la place de g pour définir la partie. Par ailleurs, la fonction g est quasi-concave. ▽

THÉORÈME 3.3: *Soit C un convexe de E et une fonction $U : C \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.*

(i) *L'ensemble des points minima de U est, s'il n'est pas vide, convexe. Si la fonction U est strictement convexe, elle a au plus un minimum.*

(ii) *Tout minimum local de U est un minimum global.*

(iii) [Euler] *Si U est différentiable, le point x_* est un point de minimum de U si et seulement si $\langle \nabla U(x_*), x - x_* \rangle \geq 0$ pour $x \in C$.*

(iv) *Si x_* est intérieur à C , U différentiable en x_* et $\nabla U(x_*) = 0$, alors x_* est un minimum de U .*

DÉMONSTRATION. Soit $m = \inf_{c \in C} U(c)$ et $x, y \in \text{argmin}(U)$. Alors $U(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta U(x) + (1 - \theta)U(y) \leq m$ pour $\theta \in [0, 1]$, soit l'inclusion du segment $[x, y]$ dans $\text{argmin} U$, qui est donc convexe. Si la fonction U est strictement convexe avec deux minima distincts x et y , tout point intérieur au segment $[x, y]$ a une valeur strictement inférieure à $U(x) =$

$U(y)$, ce qui est contradictoire avec la propriété de minima de x et y , ce qui achève d'établir l'assertion (i).

Soit x_* minimum local et supposons l'existence de $y \in C$ tel que $U(y) < U(x_*)$. Alors le point $z_\lambda = \lambda x_* + (1 - \lambda)y$ est arbitrairement près de x_* lorsque $\lambda \rightarrow 0^+$ et

$$U(z_\lambda) \leq \lambda U(x_*) + (1 - \lambda)U(y) < \lambda U(x_*) + (1 - \lambda)U(x_*) \leq U(x_*)$$

ce qui est contradictoire avec x_* minimum local : la propriété (ii) est établie.

Si x_* est minimum local et $x \in C$, alors $x_* + t(x - x_*)$ est dans le convexe C pour $t \in (0, 1)$ et l'inégalité $U(x_* + t(x - x_*)) - U(x_*) \geq 0$ implique, en prenant la limite de son quotient par $t \rightarrow 0^+$, l'inégalité $\langle \nabla U(x_*), x - x_* \rangle \geq 0$. Si celle-ci vaut, alors l'inégalité (i).2 de la proposition 3.5 indique que x_* est un minimum de U .

Si $\nabla U(x_*) = 0$, alors $U(v) \geq U(x_*)$ vu l'inégalité (i).2 dans la proposition 3.5. \square

Le théorème suivant indique que les conditions KKT nécessaires en un point de minimum d'un problème avec contraintes (cf. théorèmes 2.7 et ??) sont en fait suffisantes pour un programme convexe. Dans cet énoncé, il n'est pas imposé de condition de régularité sur x_* pour le système de fonctions actives en x_* , au contraire des conditions nécessaires de type KKT.

THÉORÈME 3.4 (KKT convexe): *Soit C convexe de E , U, h_1, \dots, h_p définies sur C et différentiables¹², $A \in M_{m,n}, b \in \mathbb{R}^m$, U convexe et h_1, \dots, h_p concaves. Soit le programme convexe*

$$(38) \quad \mathcal{P}_{U,A,b,h} : \quad \min_{\substack{Ax=b \\ h_j(x) \geq 0, j=1, \dots, p}} U(x).$$

Soit x_ un point qualifié du programme $\mathcal{P}_{U,A,b,h}$ (i. e. $Ax_* = b$ et $h_j(x_*) \geq 0$), $J_{x_*} = \{j, h_j(x_*) = 0\}$ l'ensemble des indices des contraintes h_j actives en x_* et \mathcal{L}_{x_*} le lagrangien associé aux contraintes J_{x_*}*

$$\mathcal{L}_{x_*}(x, \Lambda, (\mu_j)_{j \in J_{x_*}}) = U(x) - \langle \Lambda, Ax - b \rangle - \sum_{j \in J_{x_*}} \mu_j h_j(x)$$

S'il existe des multiplicateurs de Lagrange $\Lambda_ \in \mathbb{R}^m, (\mu_j^*)_{j \in J_{x_*}}$ avec $\mu_j^* \geq 0$ tels que $(x_*, \Lambda^*, M_{J_{x_*}} = (\mu_j^*) \in \mathbb{R}_+^{J_{x_*}})$ soit un point critique du lagrangien \mathcal{L}_{x_*}*

$$(KKT) \quad \nabla \mathcal{L}_{x_*}(x_*, \Lambda^*, (\mu_j^*)_{j \in J_{x_*}}) = 0,$$

alors x_ est un minimum global du programme $\mathcal{P}_{U,A,b,h}$.*

DÉMONSTRATION. Soit x dans le convexe $C = \{Ax = b, h_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, p\}$. Vu que

$$\mathcal{L}_{x_*}(x, \Lambda, (\mu_j)_{j \in J_{x_*}}) = U(x) + \langle \Lambda, Ax - b \rangle - \sum_{(\mu_j)_{j \in J_{x_*}}} \mu_j h_j(x),$$

la fonction $U_{xx_*} : t \in [0, 1] \mapsto \mathcal{L}_{x_*}(x_* + t(x - x_*), \Lambda^*, (\mu_j^*)_{j \in J_{x_*}})$ est convexe, de dérivée nulle en $t = 0$ puisque \mathcal{L}_{x_*} est critique en $(x_*, \Lambda^*, M_{J_{x_*}})$: en résulte d'après (i).2 de la prop. 3.4 l'inégalité $U_{xx_*}(1) \geq U_{xx_*}(0)$, soit

$$\mathcal{L}_{x_*}(x, \Lambda^*, (\mu_j^*)_{j \in J_{x_*}}) \geq \mathcal{L}_{x_*}(x_*, \Lambda^*, (\mu_j^*)_{j \in J_{x_*}}).$$

Ainsi, pour x admissible

$$U(x) - \sum_{j \in J_{x_*}} \mu_j^* h_j(x) \geq U(x_*),$$

12. Une fonction $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable s'il existe un voisinage ouvert Ω de C tel que φ admette un prolongement différentiable à Ω .

soit finalement, vue la positivité des h_j sur C et celle des multiplicateurs μ_{j*} , l'inégalité $U(x) \geq U(x_*)$. Il en résulte que x_* est un point de minimum de U , soit une solution du programme $\mathcal{P}_{U,A,b,h}$, et ce pour $x \in C$. \square

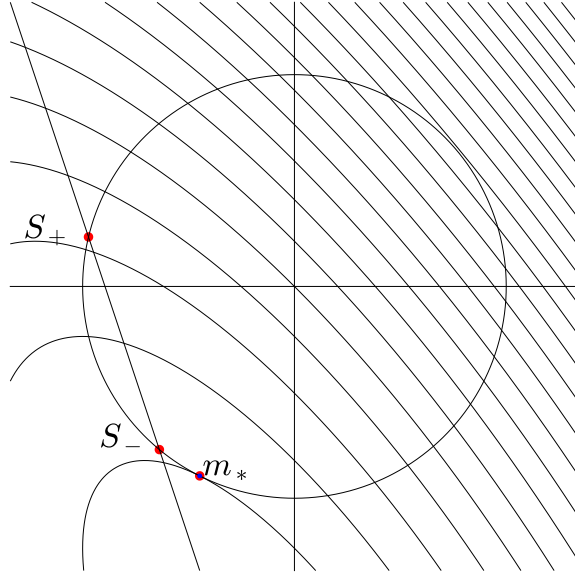


FIGURE III.6. Les courbes de niveau de la fonction d'objectifs $U(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 10x + 10y$ et le domaine des réalisables $\{x^2 + y^2 \leq 5, 3x + y + 6 \geq 0\}$.

\triangleright EXEMPLE 3.10. La fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto U(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 10x + 10y$, de hessienne $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ est strictement convexe sur \mathbb{R}^2 : son minimum sur tout convexe compact est donc unique. Le convexe compact $C = \{x^2 + y^2 \leq 5, -6 \leq 3x + y\}$ est l'intersection du disque $\delta = \{x^2 + y^2 \leq 5\}$ et du demi-plan $\{-6 \leq 3x + y\}$: son bord est l'union d'un arc de cercle a et d'un segment $\sigma = [S_+, S_-]$. Le lagrangien à étudier pour les points sur l'arc a est $\mathcal{L}_a(x, y, \mu) = U(x, y) - \mu(5 - x^2 - y^2)$ avec gradient

$$\nabla \mathcal{L}_a(x, y, \mu) = (4x + 2y + 10 + 2\mu x, 2x + 2y + 10 + 2\mu y, x^2 + y^2 - 5).$$

Le point $m_* = (-1, -2)$ avec $\mu_* = 1$ et $U(m_*) = -20$ donne un point critique du lagrangien \mathcal{L}_a vérifiant les conditions KKT : c'est donc l'unique point minimum de U restreint à C . La recherche sur l'arc de cercle des points critiques du lagrangien \mathcal{L}_a passe par la résolution du système

$$(2 + \mu)x + y = -5, \quad x + (\mu + 1)y = -5,$$

soit les coordonnées $x(\mu), y(\mu)$ en fonction du multiplicateur μ

$$[(2 + \mu)(\mu + 1) - 1]y = 5(\mu + 1), \quad [(2 + \mu)(\mu + 1) - 1]x = 5(2 + \mu).$$

La substitution de ces valeurs $x(\mu), y(\mu)$ dans la contrainte $g_a = 5 - x^2 - y^2 = 0$ fournit une équation du quatrième degré pour le coefficient de Lagrange μ avec 1 comme racine évidente et une seule autre racine réelle $\mu_1 = -5.725\dots$ qui, négative, correspond à un maximum local $M = (1.725\dots, 1.423)$ de U , avec $U(M) = 44.365$. Pour la contrainte linéaire $g_\sigma = 3x + y + 6 = 0$, l'annulation du gradient du lagrangien $\mathcal{L}_\sigma(x, y, \mu) = U(x, y) - \mu(3x + Y + 6)$ donne un multiplicateur de Lagrange $\mu_{**} = -2/5 > 0$

et un point unique $m_{**} = (-2/5, -24/5)$ sur la droite contenant σ , mais hors du disque δ . Les points à l'intersection des deux bords a et σ sont $S_+ = (-2.174, 0.522)$ et $S_- = (-1.425, -1.722)$, avec valeurs respectives -9.061 et -19.538 . En ces points, les multiplicateurs de Lagrange (λ, μ) tels que $\nabla U = \lambda \nabla g_\sigma + \mu \nabla g_a$ sont resp. $(4.219, 2.370)$ et $(-1.019, 1.371)$ et vérifient pas les conditions KKT : le problème a un seul point de maximum M . Le point $M_* = (0, -5)$ de minimum global, avec $U(M_*) = -25$, de la fonction U sur \mathbb{R}^2 est aussi hors du disque δ . \triangleleft

Optimisation vectorielle

L'optimisation vectorielle, connue sous le nom de théorie de Pareto, étudie l'optimisation suivant plusieurs critères (ou du même critère attaché à des agents multiples) : c'est donc une généralisation de l'optimisation d'une unique fonction d'objectifs. Tranchant avec les chapitres précédents, ce chapitre ne considère que des maxima dits de Pareto (parfois désignés comme point efficient, point admissible ou point non dominé) : un tel optimum est atteint par un état où on peut accroître le profit (bien-être, revenu, situation sociale) d'un agent sans en diminuer un autre. Les maxima de Pareto apparaissent de manière cruciale dans l'étude des équilibres des marchés compétitifs.

Terminons cette introduction par un exemple apparaissant dans la localisation d'un équipement public (école, pompiers, ambulancier, ...) desservant une communauté : si $M_i, i = 1, \dots, p$ représentent les habitations, on cherchera un minimum de Pareto pour les fonctions $M \in \mathbb{R}^2 \mapsto MM_i = d(M, M_i), i = 1, \dots, p$: l'exemple *infra* traite le cas $p = 2$.

1. Ordres de Pareto et optima

Autant sur \mathbb{R} l'ordre¹ naturel s'impose, autant en dimension supérieure il y a différentes relations d'ordre, même si on se limite à des relations associées à des cônes convexes $K \subset \mathbb{R}^p$ pris comme cône des éléments *positifs* de la relation d'ordre : $x \geq_K y$ si $x - y \in K$. Par exemple, K est le quadrant ouvert $\{u \in \mathbb{R}^p; u_i > 0, i = 1, \dots, p\}$ ou le quadrant fermé $\{u \in \mathbb{R}^p; u_i \geq 0, i = 1, \dots, p\}$. En outre, ces ordres ne sont pas totaux : deux points de \mathbb{R}^p ne sont pas nécessairement comparables.

Commençons par définir² deux relations d'ordre de Pareto, ainsi que les notions attachées de maximum des valeurs et point de maximum de Pareto

DÉFINITION 4.1: *Soit X un espace (l'espace des décisions ou espace des états) et U la fonction vectorielle $U : x \in X \mapsto U(x) = (U_j(x)) \in \mathbb{R}^p$. L'espace \mathbb{R}^p est l'espace des objectifs.*

- (1)(a) *L'objectif $u \in \mathbb{R}^p$ est Pareto supérieur strictement (ou efficient) à $v \in \mathbb{R}^p$, et on notera $u \geq_P v$, si $u_i \geq v_i$ pour $i = 1, \dots, p$.*
- (b) *L'objectif $u \in \mathbb{R}^p$ est faiblement Pareto supérieur à $v \in \mathbb{R}^p$, et on notera $u \geq_{P_f} v$, si $u = v$ ou $u_i > v_i$ pour $i = 1, \dots, p$.*
- (2)(a) *La décision $x \in X$ est dite (strictement) Pareto supérieure à $y \in X$ relativement à la fonction U , et on notera $x \geq_{P,U} y$, si $U(x) \geq_P U(y)$, i. e. $U_i(x) \geq U_j(y)$ pour $i = 1, \dots, p$.*

1. Les ordres considérés ici n'induisent pas de relations d'ordre, i. e. relation réflexive, transitive et antisymétrique.

2. La littérature, mathématique ou économique, n'est pas homogène, souvent contradictoire, sur ces définitions. Dans cette présentation, un maximum de Pareto fort est aussi un maximum de Pareto faible, même si l'ordre fort \geq_P semble plus faible que l'ordre faible \geq_{P_f} . D'autres choix échantent le parti pris ici pour ce qui est fort et ce qui est faible ou inversent chaque relation d'ordre même.

- (b) La décision $x \in X$ est dit faiblement Pareto supérieure à $y \in X$ relativement à la fonction U , et on notera $x \geq_{P_f, U} y$, si $U(x) \geq_{P_f} U(y)$, i. e. si $U(x) = U(y)$ ou si $U_i(x) > U_i(y)$ pour $i = 1, \dots, p$.
- (3) (a) La décision $x \in X$ est un maximum de Pareto pour U , s'il n'existe aucun majorant de x autre que x pour l'ordre de Pareto : il n'existe aucun y distinct de x ayant un indice j_0 pour lequel $U_{j_0}(y) > U_{j_0}(x)$, avec inégalités $U_j(y) \geq U_j(x)$ pour les autres indices.
- (b) La décision $x \in X$ est un maximum faible de Pareto pour U , s'il n'existe aucun majorant de x autre que x pour l'ordre faible de Pareto : il n'existe aucun y distinct de x avec $U_j(y) > U_j(x)$ pour tout indice j .

La partie des maxima de Pareto de U sera notée P_U , celle des maxima faibles de Pareto $P_{f,U}$: l'ensemble des valeurs $U(P_U)$ (resp. $U(P_{f,U})$) est appelé front de Pareto³ (resp. faible).

▷ EXEMPLES 4.1.

4.1.1 Soit $U_{\pm} : m \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\mp \|m\|^2, \mp \|m - (1, 0)\|^2)$. Le front de Pareto (minimum) de U_- est l'image du segment $[(0, 0), (1, 0)]$ par U_- : c'est un arc de parabole.

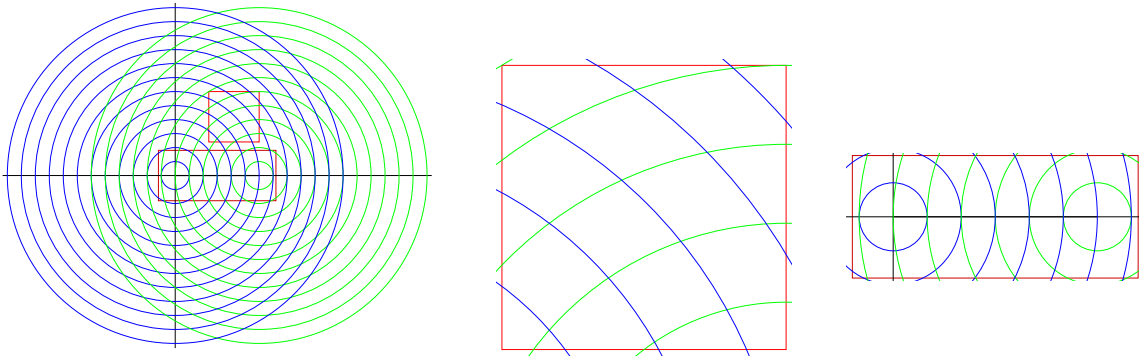


FIGURE IV.1. Les courbes d'indifférence pour $U_-(m) = (\|m\|^2, \|m - (1, 0)\|^2)$ sont des cercles : le front de Pareto (minimum) est le segment $[(0, 0), (1, 0)]$, où les courbes des deux familles sont tangentes : en dehors de ce front, on a une configuration des courbes des deux familles analogue à celle de la boîte d'Edgeworth-Bowley.

4.1.2 La boîte d'Edgeworth-Bowley modélise l'allocation de deux quantités q_1, q_2 de produits partagés par deux agents A et B : $q_1 = a_1 + b_1$ et $q_2 = a_2 + b_2$. Chaque agent (A et B resp.) a une fonction d'utilité $u_A(a_1, a_2)$ et $u_B(b_1, b_2)$ resp. qu'il cherche à maximiser. Les courbes de niveau de ces fonctions (dites courbes d'indifférence) sont tracées dans la boîte $\{(\alpha_1, \alpha_2), 0 \leq \alpha_1 \leq q_1, 0 \leq \alpha_2 \leq q_2\}$ de manière complémentaire : le panier de A avec les produits en quantité (a_1, a_2) est tracé dans le repère d'origine $O = (0, 0)$ avec pour axes d'abscisse et d'ordonnée les axes standard, alors que celui B l'est dans le repère d'origine (q_1, q_2) et d'axes d'abscisse b_1 l'axe horizontal et d'ordonnée b_2 l'axe vertical, de telle sorte qu'un point (α_1, α_2) représente le panier de l'individu A et celui complémentaire égal à $(q_1 - \alpha_1, q_2 - \alpha_2)$ pour B . Vu les hypothèses habituelles en économie, ces courbes sont en général convexes. Localement, la configuration est celle de l'exemple précédent : en un point $M = (a_1, a_2) = (q_1 - b_1, q_2 - b_2)$ où les courbes ne sont pas

3. Ce front est diversement nommé : *ensemble d'efficience, courbe des contrats...*

tangentes, on peut augmenter les valeurs des fonctions d'utilité u_A, u_B simultanément : un tel point n'est pas un maximum de Pareto. Le front de Pareto est la courbe où les courbes d'indifférences sont tangentes. \triangleleft

\triangle REMARQUES 4.1.

- (1) Soit $U = (U_1, \dots, U_p)$ la fonction de profit de p acteurs. En un état optimum de Pareto de U , on ne peut augmenter le profit d'un acteur sans diminuer celui d'un autre.
- (2) Les relations de Pareto (faible ou non) définies sur les objectifs, valeurs de la fonction U , sont des relations d'ordre, i. e. réflexive, transitive et antisymétrique. Celles sur les points de X sont de pré-ordre, vu que la propriété d'antisymétrie n'est pas nécessairement assurée : il se peut qu'il existe un point y distinct de x avec $U(x) = U(y)$.

(3) Si $x \geq_{P_f} y$, alors $x \geq_P y$.

(4) Soient les quadrants

$$Q_{++}^p = \{(u_1, \dots, u_p), u_i \geq 0, i = 1, \dots, p\}, \quad Q_{++}^p = \{(u_1, \dots, u_p), u_i > 0, i = 1, \dots, p\},$$

et Ω une partie de \mathbb{R}^p . On peut définir la notion de valeur maximale dans l'ensemble Ω : il suffit de considérer $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ avec l'application identité. Une valeur u est Pareto maximale (relativement à Ω) si et seulement si $(\{x\} + Q_{++}^p) \cap \Omega = \{x\}$, elle est faiblement Pareto maximale si $(\{x\} + Q_{++}^p) \cap \Omega = \emptyset$.

(5) Les maxima de Pareto sont incomparables entre eux ; un état non maximal n'est pas nécessairement comparable à un maximum de Pareto. Il existe en général une infinité de maxima de Pareto.

(6) La notion de *minimum de Pareto*, strict ou faible, pour une partie Ω de \mathbb{R}^p ou un application vectorielle U se définit pareillement : ainsi, $x \in X$ est un minimum de Pareto pour U si et seulement si x un maximum de Pareto pour $-U$. On parlera d'optimum de Pareto. De même, la notion d'optimum de Pareto local s'introduit naturellement. ∇

LEMME 4.1: *Tout maximum de Pareto est faiblement maximal, i. e. $P_U \subset P_{f,U}$.*

DÉMONSTRATION. Soit x Pareto maximal. Supposons que x n'est pas faiblement Pareto maximal : il existe donc y tel que $U_j(y) > U_j(x)$ pour tout j : cet y , distinct de x , domine x pour l'ordre de Pareto et ne peut donc exister vu que x est Pareto maximal. Ainsi, x est faiblement Pareto maximal. \square

\triangleright EXEMPLES 4.2.

4.2.1 Soit U à valeurs scalaires : un point de maximum de U est un maximum (faible) de Pareto.

4.2.2 Soit $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{-1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}$ (cf. ?? (a)) sur lequel est définie la fonction $U(x, y) = (x, y)$. Alors l'ensemble des maxima de Pareto est $P_U = \{x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ et celui des maxima faibles est $P_{f,U} = P_U \cup \{(u, 1), u \in [-1, 0]\}$ \triangleleft

Si X est ouvert, il se peut que U n'ait pas de maximum de Pareto. Néanmoins, on a un énoncé de type Bolzano-Weierstrass si X est compact.

PROPOSITION 4.1: *Soit X compact et $U : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ continue. Alors la partie P_U est non vide et la partie $P_{f,U} (\supset P_U)$ compacte. De plus pour tout $x \in X$, il existe un maximum de Pareto strict x_* dominant x (i. e. $x_* \geq_P x$).*

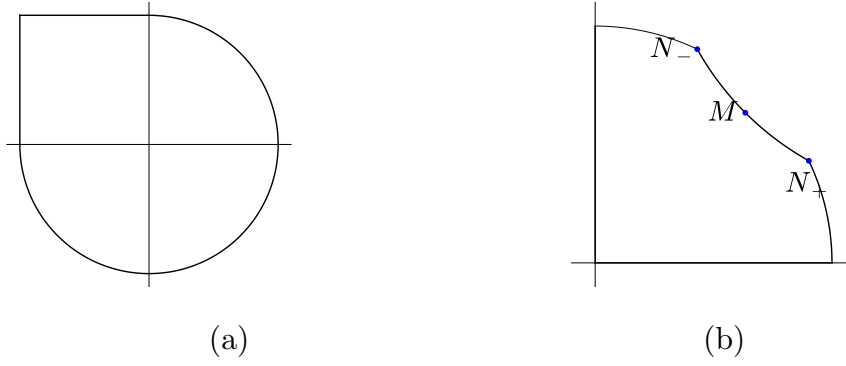


FIGURE IV.2. (a) Le domaine (convexe) Ω obtenu par ajout d'un carré au disque; (b) Le domaine X intersection du quadrant positif, de l'intérieur du disque $D(0, 1)$ et de l'extérieur du disque $D((3/2, 3/2), \sqrt{3/2})$.

DÉMONSTRATION. La partie

$$D_x = \{y \in X, y \geq_{P,U} x\} = \bigcap_j \{y \in X, U_j(y) \geq U_j(x)\}$$

est compacte non vide, aussi la fonction $S = \sum_j U_j$ atteint son maximum sur D_x : tout point $x_* \in \operatorname{argmax}_{D_x} (\sum_j U_j)$ est un maximum de Pareto : sinon⁴, il existerait $z \in X$ tel que $U_j(z) \geq U_j(x_*)$ pour tout j , avec inégalité stricte pour au moins un indice j_0 , ce qui donnerait $z \in D_x$ et $S(z) > S(x_*)$, contredisant le caractère maximal de x_* relativement à S . Tout ensemble D_x contient un maximum de Pareto, donc P_U est non vide.

Soit $A = U(X) + \mathbb{R}_+^p$. L'état x admet un majorant y au sens faible de Pareto si et seulement si $U(x)$ est dans l'intérieur de A . Ainsi l'ensemble $P_{f,U}$ des maxima faibles de Pareto de U est l'image réciproque par U du complémentaire de l'intérieur de A : c'est donc un fermé. \square

2. Scalarisation

Un point x_* maximum de la fonction numérique U est un maximum de Pareto de U : si U est vectorielle, un maximum d'une combinaison convexe $\langle \Lambda, U \rangle$ est un maximum de Pareto, c'est le contenu du théorème suivant.

THÉORÈME 4.1: *S'il existe un $\Lambda \in Q_+^p \setminus \{0\}$ (resp. $\Lambda \in Q_{++}^p$) et un x_* tels que*

$$(39) \quad x_* \in \operatorname{argmax}_y (\langle \Lambda, U(y) \rangle),$$

alors x_ est un maximum de Pareto faible (resp. un maximum de Pareto).*

DÉMONSTRATION. Commençons par la preuve pour un maximum faible de Pareto. Si x_* n'est pas un maximum faible de Pareto, il existe un y dominant faiblement x_* , i. e. $U_j(y) > U_j(x_*)$ pour tout j , point y pour lequel on a l'inégalité stricte

$$(40) \quad \langle \Lambda, U(y) \rangle - \langle \Lambda, U(x_*) \rangle = \sum_{j=1}^p \lambda_j [U_j(y) - U_j(x_*)] > 0,$$

vu que $\lambda_j [U_j(y) - U_j(x_*)] > 0$ pour un j (qui existe) avec $\lambda_j > 0$. Ainsi x_* ne serait pas un maximum de $\langle \Lambda, U \rangle$. Par ailleurs, si $\Lambda \in Q_{++}^p$ et y est un majorant strict de x_* distinct de x_* , alors le terme d'indice j pour lequel $U_j(y) - U_j(x_*) > 0$ induit dans

4. Voir le théorème 4.1 qui s'applique ici avec $\Lambda = (1)$.

(40) une somme strictement positive et empêche donc que x_* ne soit un maximum de $\langle \Lambda, U \rangle$. \square

\triangle REMARQUE 4.2. La combinaison linéaire $\langle \Lambda, U \rangle$ est une scalarisation de l'application vectorielle U : d'autres scalarisations sont d'intérêt, par ex. $\langle \Lambda, U^\rho \rangle$ si $U > 0$ ou la scalarisation de Chebychev $\min_j w_j [u_j - U_j(x)]$ pour un ensemble de poids (w_j) avec cible $u = (u_j)$. De manière générale, on peut prendre $S : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\nabla S \in Q_{++}^p$. ∇

THÉORÈME 4.2: Soit X ouvert de \mathbb{R}^n et $U : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable. Si x_* est un maximum faible de Pareto pour U , alors il existe un multiplicateur $\Lambda \in Q_+^p$ non nul tel que x_* soit un point critique de $\langle \Lambda, U \rangle$.

DÉMONSTRATION. Commençons par le cas $p = 2$. Supposons les gradients $\nabla U_1(x_*)$ et $\nabla U_2(x_*)$ linéairement indépendants ou colinéaires non nuls dans la même direction. Il existe un vecteur v tel que $\langle \nabla U_j(x_*), v \rangle < 0$ pour $j = 1, 2$. Ces conditions assurent que au voisinage de 0, le chemin $t \in (0, \varepsilon) \mapsto x_* - tv$ augmente toutes les valeurs des fonctions U_j pour ε assez petit, ce qui contredit la qualité maximale de Pareto de x_* . Les vecteurs $\nabla U_1(x_*)$ et $\nabla U_2(x_*)$ sont colinéaires, de direction opposée : il existe $\Lambda \in Q_+$ tel que $\Lambda_1 \nabla U_1(x_*) + \Lambda_2 \nabla U_2(x_*) = 0$

Si $p \geq 3$, soit K_{x_*} le cône convexe (fermé) engendré par les $\nabla U_j(x_*)$. Supposons qu'il n'existe pas de $\Lambda \in Q_+^p$ comme affirmé dans le théorème. Ainsi $K_{x_*} \cap -K_{x_*} = \{0\}$ et par suite, le cône polaire de $K_{x_*}^\dagger = \{z : \langle z, \nabla U_j(x_*) \rangle \geq 0, j = 1, \dots, p\}$ est d'intérieur non vide (cf. le lemme suivant). Un point v de cet intérieur vérifie

$$\langle v, \nabla U_j(x_*) \rangle > 0, \quad j = 1, \dots, p.$$

Ces conditions permettent de terminer comme en dimension $p = 2$. \square

LEMME 4.2: Le cône polaire de C est le cône C^\dagger défini par $C^\dagger = \{\langle x, y \rangle \geq 0, x \in C\}$. Un cône C est dit pointé si $C \cap -C = \{0\}$.

Soit C un cône. Sont équivalentes

- (1) Le cône C est pointé.
- (2) Le cône polaire C^\dagger est d'intérieur non vide.
- (3) Tout point a intérieur à C^\dagger est caractérisé par les inégalités $\langle a, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in C \setminus \{0\}$.

L'énoncé suivant est valable sans hypothèse de différentiabilité sur la fonction U .

THÉORÈME 4.3: Soit C convexe et $U : C \rightarrow \mathbb{R}^p$ avec toutes ses composantes concaves. Alors $x_* \in C$ est un maximum de Pareto faible si et seulement si il existe un multiplicateur $\Lambda_* \in Q_+^p$ non nul tel que

$$x_* = \operatorname{argmax}_{x \in C} \langle \Lambda_*, U(x) \rangle.$$

\triangle REMARQUE 4.3. Vu la concavité des composantes de U , la condition précédente est équivalente à x_* critique de $\langle \Lambda_*, U \rangle$ dans le cas C ouvert et U différentiable. ∇

DÉMONSTRATION. D'après les hypothèses de convexité, la partie $A = U(X) + \mathbb{R}_-^p$ est convexe : en effet, par concavité, $\alpha U(x) + (1 - \alpha)U(y) = U(\alpha x + (1 - \alpha)y) + M$ avec $M \in \mathbb{R}_-^p$. Le point x_* est Pareto maximal faible si et seulement si $U(x_*)$ n'appartient pas à l'intérieur de A : on peut séparer strictement l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ (qui est convexe) et le point $U(x_*)$. Ainsi, il existe $\Lambda_* \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ tel que

$$\sup_{a \in A} \langle \Lambda_*, a \rangle \leq \langle \Lambda_*, U(x_*) \rangle$$

soit

$$\sup_{y \in X} \langle \Lambda_*, U(y) \rangle + \sup_{M \in \mathbb{R}_-^p} \langle \Lambda_*, M \rangle \leq \langle \Lambda_*, U(x_*) \rangle$$

La borne $\langle \Lambda_*, M \rangle < +\infty$ pour $M \in \mathbb{R}_-^p$ entraîne les $\Lambda_* \geq 0$ et $\sup_{M \in \mathbb{R}_-^p} \langle \Lambda_*, M \rangle = 0$. On obtient

$$\sup_{x \in C} \langle \Lambda_*, U(x) \rangle \leq \langle \Lambda_*, U(x_*) \rangle,$$

ce qui, avec le théorème 4.1, permet de conclure. \square

\triangleright EXEMPLE 4.3. Reprenons le premier exemple de 4.1 généralisé sur \mathbb{R}^n avec $U(m) = (-\|m\|^2, -\|m - m_0\|^2)$ pour $m \in \mathbb{R}^n$. Pour $\Lambda \in \mathbb{R}^2$, la scalarisation $\langle \Lambda, U(m) \rangle = -\Lambda_1 \|m\|^2 - \Lambda_2 \|m - m_0\|^2$ a pour gradient $\nabla(\langle \Lambda, U \rangle)(m) = -2(\Lambda_1 m + \Lambda_2(m - m_0))$, d'où, en ayant posé $u_0 = m_0/\|m_0\|$ et $m = \langle m, u_0 \rangle u_0 + m^\perp$ où m^\perp est perpendiculaire à m_0 , l'équation

$$0 = \Lambda_1 m + \Lambda_2(m - m_0) = (\Lambda_1 + \Lambda_2)m^\perp + [\Lambda_1 \langle m, u_0 \rangle + \Lambda_2 \langle m - m_0, u_0 \rangle]u_0$$

sous la contrainte $\Lambda_1, \Lambda_2 \geq 0$ non tous deux nuls. La composante orthogonale m^\perp doit être nulle et on trouve $\alpha = \langle m, u_0 \rangle$ vérifiant $\Lambda_1 \alpha - \Lambda_2(\|m_0\| - \alpha) = 0$, soit

$$\alpha = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \|m_0\| \in [0, \|m_0\|], \quad m = \alpha \frac{m_0}{\|m_0\|},$$

ce qui donne comme front de Pareto l'image du segment $(0, m_0)$ par U , soit un arc de parabole. \triangleleft

\triangle REMARQUE 4.4. En général, il n'est pas vrai qu'un maximum de Pareto soit le maximum d'au moins une combinaison convexe des U_j . Ainsi, pour le domaine $X = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\} \cap \{x^2 + y^2 - 3x - 3y + 3 \geq 0\}$ (cf. Fig. ?? (b)) et la fonction $U : (x, y) \in X \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$, le point $M = ((3 - \sqrt{3})/2, (3 - \sqrt{3})/2)$ est un optimum de Pareto par lequel ne passe aucun hyperplan d'appui à X , donc M n'est point de maximum d'aucune combinaison convexe $\alpha x + (1 - \alpha)y$. En fait les maxima de ces combinaisons convexes décrivent l'arc $((1, 0), N_+) \subset \partial X$ si $\alpha \in (0, 1/2)$, l'arc $((0, 1), N_-)$ si $\alpha \in (1/2, 1)$ avec les points N_\pm intersection des deux cercles $\{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{x^2 + y^2 - 3x - 3y + 3 = 0\}$, N_+ ayant l'abscisse la plus grande. ∇

Formes quadratiques

1. Matrices symétriques et formes quadratiques

Une matrice $A = (A_{ij})$ carrée d'ordre n est dite symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$ ou encore $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ pour tout vecteur x, y de \mathbb{R}^n .

À toute matrice symétrique réelle A d'ordre n est associée la forme quadratique Q_A sur \mathbb{R}^n définie suivant

$$Q_A(x) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}x_i x_j = {}^T X A X, \quad x = \sum_{i=1}^n x_i c_i, \quad X = {}^T [x_1 x_2 \dots x_n],$$

où $\mathbf{c} = (c_i)$ est la base canonique de \mathbb{R}^n et X le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base \mathbf{c} . Cette correspondance $A \rightarrow Q_A$ est bijective : la matrice $A(Q)$ associée à la forme Q est

$$A_{ii} = Q(c_i), \quad A_{ij} = \frac{Q(c_i + c_j) - Q(c_i) - Q(c_j)}{2}$$

De manière générale, on notera $A(Q, \mathbf{b})$ la matrice de la forme quadratique Q relativement à la base \mathbf{b} : $A(Q, \mathbf{b})_{ii} = Q(b_i), \dots$

On rappelle les résultats sur la diagonalisation des matrices symétriques réelles et des formes quadratiques

THÉORÈME A.1: *Soit A une matrice symétrique d'ordre n . Il existe une base orthonormée $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^n$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que*

- (i) *cette base est une base de vecteurs propres de A : $Ab_i = \lambda_i b_i$ pour $i = 1, \dots, n$,*
- (ii) *la forme Q_A est une pure somme de carrés pondérés*

$$(41) \quad Q_A(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2, \quad x = \sum_{i=1}^n y_i b_i.$$

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer par récurrence la propriété suivante : si E est un espace isomorphe à \mathbb{R}^n avec son produit scalaire et A un opérateur symétrique de E , alors E admet une base orthonormée de vecteurs propres de A . C'est clair pour $n = 1$. La sphère $S = \{\|x\|^2 = 1\}$ est un compact de \mathbb{R}^n : ainsi la fonction continue $P_A : x \rightarrow \langle Ax, x \rangle$ atteint son minimum m_0 en x_0 , ce x_0 résolvant le problème de minimisation

$$\min_{\|x\|^2=1} \langle Ax, x \rangle,$$

il existe un multiplicateur de Lagrange λ_0 tel que $\nabla P_A(x_0) = \lambda_0 \nabla(\|x\|^2)(x_0)$, soit $Ax_0 = \lambda_0 x_0$: le vecteur x_0 (de norme 1) est un vecteur propre de A . On a une décomposition orthogonale $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}x_0 \oplus (\mathbb{R}x_0)^\perp$, dont le dernier terme $\{\langle y, x_0 \rangle = 0\}$ (de dimension $n-1$) est stable par A :

$$\langle Ay, x_0 \rangle = \langle y, Ax_0 \rangle = \langle y, \lambda_0 x_0 \rangle = \lambda_0 \langle y, x_0 \rangle = 0, \quad y \in (\mathbb{R}x_0)^\perp.$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence à l'opérateur $A_{(\mathbb{R}x_0)^\perp}$, restriction de A à $(\mathbb{R}x_0)^\perp$, ce qui permet de compléter x_0 en une base orthonormée de vecteurs propres diagonalisant A .

Pour la seconde partie du théorème, on prend cette base orthonormée de vecteurs propres $\mathbf{b} = (b_i)$. Ainsi

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i,j} y_i y_j \langle Ab_i, b_j \rangle = \sum_{i,j} y_i y_j \lambda_j \delta_{i,j} = \sum_i \lambda_i y_i^2$$

ce qui conclut la démonstration. \square

On a le corollaire suivant

PROPOSITION A.1: *Le signe de $\det A(Q, \mathbf{b})$ ne dépend pas de la base \mathbf{b} : c'est celui du produit des valeurs propres de la matrice $A(Q, \mathbf{b})$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathbf{b} = (b_i)$, $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}_i)$ deux bases et P la matrice de changement de base : $\tilde{b}_i = \sum_j P_{ij} b_j$. Ainsi

$$x = \sum_i \tilde{x}_i \tilde{b}_i = \sum_i \tilde{x}_i \sum_j P_{ij} b_j = \sum_j \left(\sum_i P_{ij} \tilde{x}_i \right) b_j$$

soit $X = {}^\top P \tilde{X}$ et

$$Q(x) = {}^\top X A(Q, \mathbf{b}) X = {}^\top ({}^\top P \tilde{X}) A(Q, \tilde{\mathbf{b}}) {}^\top P \tilde{X} = {}^\top \tilde{X} P A(Q, \tilde{\mathbf{b}}) {}^\top P \tilde{X}$$

soit $A(Q, \mathbf{b}) = P A(Q, \tilde{\mathbf{b}}) {}^\top P$ et par suite $\det A(Q, \mathbf{b}) = (\det P)^2 \det A(Q, \tilde{\mathbf{b}})$, ce qui établit la proposition. \square

2. Formes définies et hyperboliques

La forme Q est dite *définie positive* (resp. *définie négative*, *semi-définie positive*, *semi-définie négative*) si $Q(x) > 0$ (resp. $< 0, \geq 0, \leq 0$) pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Cela correspond dans (41) aux λ_i tous strictement positifs (strictement négatifs, positifs, négatifs resp.). S'il y a des λ non nuls de signes différents dans (41), la forme Q est dite *hyperbolique* : sa figure de courbes de niveau au voisinage de l'origine (point critique) présente un point selle ou un col, au contraire de celles des formes définies faites d'ellipses centrées à l'origine, cf. la figure A.1

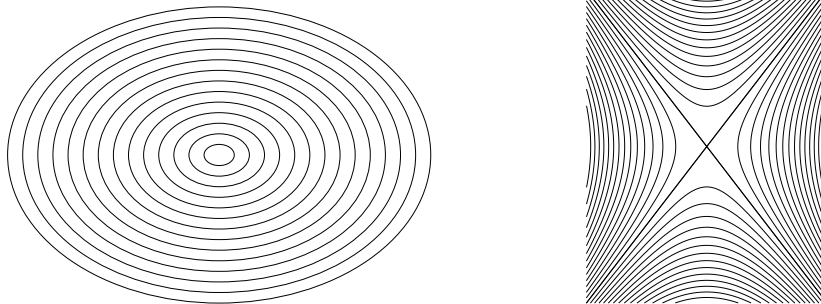


FIGURE A.1. Les courbes de niveau en dimension 2 pour une forme définie et une forme hyperbolique.

COROLLAIRE A.1: *Soit A une matrice définie positive.*

- (i) *Il existe une matrice B symétrique définie positive telle que $A = B^2$.*
- (ii) *Il existe une constante $C = C_A$ telle que*

$$\langle Ax, x \rangle \geq C\|x\|^2.$$

DÉMONSTRATION. Si A est diagonale, de la forme $A_d = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, la matrice $B_d = \text{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$ et la constante $C = \min_i \alpha_i$ répondent à la question.

En général, et avec les notations du dernier paragraphe, le théorème précédent énonce l'existence d'une matrice P unitaire et d'une matrice diagonale A_d telle que $A = {}^T P A_d P$: vu $P {}^T P = I$, la matrice $B = {}^T P B_d P$ vérifie $A = B^2$, alors que

$$\langle Ax, x \rangle = \langle {}^T P A_d P x, x \rangle \geq \langle A_d P x, P x \rangle \geq \min_i (\alpha_i) \|P x\|^2 = \min_i (\alpha_i) \|x\|^2. \quad \square$$

Un mineur m_A d'ordre r de la matrice A d'ordre (p, q) est le déterminant $m_A = \det M_A$ d'une sous-matrice mineure M_A obtenue de A en enlevant $q - r$ lignes et $p - r$ colonnes : on peut noter une telle sous-matrice $A_{I,J}$ où I (J resp.) est la partie des indices de lignes (colonnes resp.) non écartées. La matrice mineure M_A est dite *principale* si ses éléments diagonaux sont des éléments diagonaux de A . La matrice mineure d'ordre r est dite *principale primaire*, ou *principale dominante* si la suite des éléments diagonaux de M_A est celle des r premiers éléments diagonaux de A , *i. e.* il a été enlevé dans A les $p - r$ dernières lignes et les $q - r$ dernières colonnes.

THÉORÈME A.2: *La forme quadratique Q est définie positive (négative resp.) si et seulement si les mineurs principaux primaires de sa matrice $A(Q)$ sont non nuls positifs (resp. du signe de $(-1)^r$ si r est l'ordre du mineur principal dominant).*

DÉMONSTRATION. Le cas *défini négatif* découle du cas *défini positif* en considérant $-Q$.

Soit Q définie positive. Le mineur principal primaire d'ordre r est le déterminant de la forme quadratique $Q|_{V_r}$ obtenue par restriction au sous-espace V_r engendré par les r premiers vecteurs de la base canonique. La forme $q|_{V_r}$ est définie positive : une forme définie positive n'a que des valeurs propres positives non nulles, donc son déterminant est positif non nul.

Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur l'ordre de la matrice $A(Q)$: pour une matrice carrée d'ordre 1, l'équivalence de la positivité de $Q(A)$ et de celle de $A(Q)$ est immédiate. Soit A d'ordre n : d'après l'hypothèse de récurrence au rang $n - 1$, la forme $Q|_{V_{n-1}}$ est définie positive : si on considère le Q -orthogonal K_n de V_{n-1} dans $V_n \simeq \mathbb{R}^n$, on a $\det A(Q) = \det A(Q|_{V_{n-1}}) \det A(Q|_{K_n})$ et par suite $\det A(Q|_{K_n}) > 0$ et $Q|_{K_n}$ définie positive. L'égalité $Q = Q|_{V_{n-1}} + Q|_{K_n}$ issue de la somme directe orthogonale $V_n = V_{n-1} \oplus K_n$ implique alors que $Q(X) > 0$ pour $X \in V_n$: Q est définie positive sur \mathbb{R}^n . \square

PROPOSITION A.2: *La forme quadratique Q sur \mathbb{R}^n est positive (négative resp.) si et seulement si les mineurs principaux sont tous positifs ou nuls (resp. du signe de $(-1)^r$ si r est l'ordre du mineur).*

DÉMONSTRATION. Comme précédemment il suffit d'examiner le cas des formes positives. Soit V_{i_1, \dots, i_k} le sous-espace engendré par c_{i_1}, \dots, c_{i_k} , vecteurs de la base canonique \mathbf{c} . La forme Q étant positive, sa restriction à tout V_{i_1, \dots, i_k} est positive, et donc le mineur correspondant $\det A(Q|_{V_{i_1, \dots, i_k}})$ est positif ou nul.

Réciproquement, on introduit la forme Q_ε de matrice $A(Q_\varepsilon) = A(Q) + \varepsilon \text{Id}$, dont le déterminant est donné par

$$\det A(Q_\varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^{n-k} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \det A(Q|_{V_{i_1, \dots, i_k}}).$$

le coefficient de ε^n étant 1. Ainsi $\det A(Q_\varepsilon)$ est un polynôme à coefficients positifs, positif non nul pour $\varepsilon > 0$. Les mineurs principaux de $A(Q_\varepsilon)$ sont pareillement positifs non nuls : d'après la proposition précédente, la forme Q_ε est définie positive et $Q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Q_\varepsilon$ est positive. \square

3. Formes quadratiques sous contraintes

Dans cette section, A est une matrice carrée d'ordre n , B une matrice d'ordre (m, n) , K_B le sous-espace $\ker B$ de \mathbb{R}^n , Q_A la forme quadratique de matrice A , $Q_{A,B}$ la forme quadratique sur K_B obtenue par restriction de Q_A et $\overline{Q}_{A,B}$ la forme quadratique de matrice $C_{A,B} = \begin{pmatrix} A & {}^\top B \\ B & 0_m \end{pmatrix}$. On suppose le mineur principal dominant $|B_m|$ non nul.

THÉORÈME A.3: Si H_m est la forme quadratique hyperbolique $\begin{pmatrix} 0_m & I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}$, les formes $Q_{A,B} \oplus H_m$ et $\overline{Q}_{A,B}$ sont isomorphes.

DÉMONSTRATION. Soit W_m le sous-espace $W_m = \{ {}^\top(0, Y), Y \in \mathbb{R}^m \}$ de \mathbb{R}^{n+m} . Identifiant \mathbb{R}^{n+m} (et ses sous-espaces) à $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$, on a

$$\mathbb{R}^{n+m} = \ker B \oplus \text{Im } {}^\top B \oplus W_m.$$

Soit $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{n-m})$ une base orthonormée de K_B diagonalisant Q_B . Alors, $Q_B(b_i, b_j) = \delta_{ij}\beta_j$ et $C_{A,B}b_j = {}^\top(Ab_j, 0_m)$ est dans W_m^\perp , de la forme $C_{A,B}b_j = \sum_i x_{ij}b_i + {}^\top Bf_j = \beta_j b_j + C_{A,B}f_j$ avec $f_j \in W_m$: en effet

$$\beta_k \delta_{jk} = Q_{A,B}(b_j, b_k) = \langle C_{A,B}b_j, b_k \rangle = \left\langle \sum_i x_{ij}b_i + {}^\top Bf_j, b_k \right\rangle = \sum_i x_{ij}\delta_{ik} + \langle f_j, Bb_k \rangle = x_{kj}$$

Posons $F = \text{Vect}(b_j - f_j, j = 1, \dots, n - m)$. Les sous-espaces F et $\text{Im } {}^\top B \oplus W$ sont $\overline{Q}_{A,B}$ -orthogonaux : en effet $C(b_j - f_j) = \beta_j b_j \in \ker B$, par suite $C(F)$ est inclus dans $\ker B$ orthogonal à $\text{Im } {}^\top B \oplus W$. La forme $\overline{Q}_{A,B}$ sur F est isomorphe à $Q_{A,B}$, vu que $\overline{Q}_{A,B}(b_j - f_j, b_i - f_i) = \langle (b_i - f_i), C_{A,B}(b_j - f_j) \rangle = \beta_j \delta_{i,j}$.

Si \mathbf{d} est une base de $\text{Im } {}^\top B$, la forme $\overline{Q}_{A,B}$ en restriction à $\text{Im } {}^\top B \oplus W$ a la forme $\begin{pmatrix} \tilde{A} & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$, équivalente à la forme hyperbolique H_m vu qu'elle est non dégénérée identiquement nulle sur W_m . \square

COROLLAIRE A.2: Le déterminant $\det Q_{A,B}$ a même signe que $(-1)^m \det \overline{Q}_{A,B}$.

Nous allons préciser ce corollaire pour en déduire un critère analogue à celui du théorème A.2 pour tester le caractère défini de $Q_{A,B}$ en terme des signes de $n - m$ déterminants

LEMME A.1: La forme $Q_{A,B}$ est définie positive si et seulement si il existe C_0 tel que la forme $Q_A(x) + C(Bx)^2$ est définie positive sur \mathbb{R}^n pour tout $C > C_0$.

DÉMONSTRATION. Supposons $Q_{A,B}$ définie positive. Si S est la sphère $\{\|x\| = 1\}$, la fonction $x \rightarrow Q_{A,B}(x)/\|Bx\|^2$ tend vers $+\infty$ au bord de $S \setminus \{x : Bx = 0\}$: elle admet donc un minimum sur cet ensemble, soit m_0 . Ainsi, pour $m > \max(0, -m_0)$ et x non nul

$$Q_{A,B}(x) + m\|Bx\|^2 \geq \max((m + m_0)\|Bx\|^2, \quad Q_{A,B}(x)) > 0$$

et donc $Q_{A,B} + m\|B \cdot \|^2$ est définie positive. \square

LEMME A.2: *Le déterminant $|A + \lambda^\top BB|$ est un polynôme en λ de degré au plus m et dont le terme (éventuellement nul) de plus haut de degré est $(-1)^m \begin{vmatrix} A & \top B \\ B & 0_m \end{vmatrix}$.*

DÉMONSTRATION. De l'identité

$$\begin{pmatrix} A & \lambda^\top B \\ B & -I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_{nm} \\ B & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + \lambda^\top BB & \lambda^\top B \\ 0_{mn} & -I_m \end{pmatrix}$$

découle celle sur les déterminants

$$\begin{vmatrix} A & \lambda^\top B \\ B & -I_m \end{vmatrix} = (-1)^m |A + \lambda^\top BB|.$$

Pour obtenir le terme en λ^m dans le développement du déterminant de gauche, on considère le seul coefficient λ dans chacune des m dernières colonnes : sans affecter la valeur de ce terme, on peut donc remplacer la matrice I_m par la matrice nulle 0_m et on conclut en remarquant $\begin{vmatrix} A & \lambda^\top B \\ B & 0_m \end{vmatrix} = \lambda^m \begin{vmatrix} A & \top B \\ B & 0_m \end{vmatrix}$. \square

THÉORÈME A.4: *Soit A carrée d'ordre n symétrique, B d'ordre (m, n) avec le mineur principal dominant $|B_m|$ non nul. La forme Q_{AB} induite par A sur $K_B = \ker B$ est définie positive si et seulement si $(-1)^m \begin{vmatrix} A_r & \top B_{rm} \\ B_{rm} & 0 \end{vmatrix} > 0$ pour $r = m + 1, \dots, n$.*

DÉMONSTRATION. Supposons Q_{AB} définie positive. Le déterminant $\begin{vmatrix} A & \top B \\ B & 0 \end{vmatrix}$ est non nul, puisque le système $Ax + \top By = 0, Bx = 0$ n'a pas de solution non triviale : une solution (x, y) vérifie $Q_A(x) + \langle x, \top By \rangle = 0$ et donc $Q_{AB}(x) = 0$, puis $x = 0$ (Q_{AB} est définie) et $y = 0$ puisque B_m est inversible. D'après le théorème A.2 et le lemme A.1, on a pour λ suffisamment grand, $|A + \lambda^\top BB| > 0$ et par suite, grâce au lemme A.2, $(-1)^m \begin{vmatrix} A & \top B \\ B & 0 \end{vmatrix} > 0$. Cet argument vaut pareillement pour $r = n - 1, \dots, m + 1$ en considérant les restrictions $(Q_A)|_{V_r} = Q_{A_r}$ et $B|_{V_r}$.

Réciproquement, on va montrer que le coefficient du terme de plus haut degré dans $|A_r + \lambda^\top B_{rm} B_{rm}|$ est positif pour $r = 1, \dots, n$, impliquant que $A + \lambda^\top BB$ est défini positif pour λ assez grand et Q_{AB} défini positif d'après le lemme A.1. Cette positivité vaut par hypothèse pour $r > m$. Si $r \leq m$, comme dans la preuve du lemme A.2, écrivons

$$(-1)^m |A_r + \lambda^\top B_{rm} B_{rm}| = \begin{vmatrix} A & \lambda^\top B_{rm} \\ B_{rm} & -I_m \end{vmatrix}.$$

Dans un développement par rapport aux lignes, le terme λ^r provient des r premières lignes, indépendamment des autres coefficients de ces lignes. Ainsi le coefficient de λ^r est $\begin{vmatrix} 0 & \top B_{rm} \\ B_{rm} & -I_m \end{vmatrix}$. La matrice $\begin{vmatrix} 0 & \top B_{rm} \\ B_{rm} & -I_m \end{vmatrix}$ est inversible : comme précédemment, il suffit de vérifier que le système $\top B_{rm} y = 0, B_{rm} x - y = 0$ n'a pas de solution non triviale.

qu'on développe relativement aux m dernières colonnes pour obtenir

$$(-1)^{m(n-m)}(-1)^{m(n-m+1)} \begin{vmatrix} \alpha_{m+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{m+2} & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & \alpha_n \end{vmatrix} = (-1)^m \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \dots \alpha_n$$

Un calcul analogue donne les déterminants

$$d_{m+r} = \begin{vmatrix} (D_{A,B})_r & {}^\top B_{mr} \\ B_{mr} & 0_m \end{vmatrix} = (-1)^m \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \dots \alpha_r, \quad r \in [m+1, n].$$

La forme quadratique $Q_{A,B}$ restreinte à $\ker B = \{x_1 = \dots = x_m = 0\}$ est donnée par

$$Q_{A,B}(x) = \alpha_{m+1} x_{m+1}^2 + \dots + \alpha_n x_n^2, \quad x = (0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n) \in \ker B$$

et les $n - m$ conditions de positivité $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n \geq 0$ sont bien équivalentes à la positivité des $(-1)^m d_{m+r}$ pour $r = m + 1, \dots, n$. ∇

Bibliographie

- [1] K. J. Arrow, A. C. Enthoven, *Quasi-Concave Programming*, *Econometrica*, 29# 4 (1961) 779-800. [jstor](#)
- [2] F. Bonnans, *Optimisation continue*, Dunod, 2006.
- [3] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [4] G. Cornuejols, R. Tutuncu, *Optimization methods in finance*, Cambridge University Press, 2007.
- [5] G. Debreu, *Definite and semidefinite quadratic forms*, *Econometrica* 20 (1952) 295-300. [jstor](#)
- [6] P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, 1998.
- [7] H. Hotelling, *Demand functions with limiting budgets*, *Econometrica*, 3 (1935) 66-78. [jstor](#)
- [8] H. Hotelling, *Edgeworth's taxation paradox and the nature of demand and supply function*, *Political Economy*, 40 (1932), 577-616. [jstor](#)
- [9] W. Karush. Minima of functions of several variables with inequalities as side constraints. M.Sc. Dissertation. Dept. of Mathematics, Univ. of Chicago, Chicago, Illinois, 1939.
- [10] H. W. Kuhn, A. W. Tucker. Nonlinear programming. Proceedings of 2nd Berkeley Symposium. Berkeley : University of California Press. pp. 481-492, 1951
- [11] H. B. Mann, *Quadratic forms with linear constraints*, *Amer. Math. Monthly*, 50 (1943), 430-433. [jstor](#)
- [12] H. Moulin, F. Fogelman-Soulié, *Convexité dans les mathématiques de la décision*, Hermann, 1979.
- [13] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical recipes, the art of scientific computing*, Cambridge Univ. Press, 2007. www.nr.com/
- [14] R. Roy, *La distribution du revenu entre les divers biens*, *Econometrica*, 15#3 (1947) 205-225. [jstor](#).
- [15] D. Spring, *On the second derivative test for constrained local extrema*, *Amer. Math. Monthly*, 92 (1985) 631-643. [jstor](#)
- [16] A. Takayama, *Mathematical economics*, Cambridge Univ. Press, 2006.
- [17] H. Varian, *Analyse microéconomique*, De Boeck, Bruxelles, 2008.

Table des figures

I.1 Les courbes de niveau de la fonction d'objectifs $J(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$ sur le carré $[-1, 3]^2$ et la surface de son graphe.	4
II.1 Les courbes de niveau de la fonction d'objectifs $J(x, y) = \cos x + y^2$.	8
II.2 Les courbes de niveau de la fonction de coût $K + 3L$, l'isoquante $K^{1/3}L^{2/3} = 1.587$ avec la tangence au point minimum entre cette isoquante et la droite de coût minimum : les gradients ∇J et ∇g y sont colinéaires.	14
II.3 Le cercle $\mathcal{C} = \{a^2 + b^2 = 1\}$, la droite $\mathcal{D}_L = \{x + y = L\}$ et les points critiques.	16
II.4 Les courbes de niveaux $x^3 + y^3 = h$ et la courbe $x^{-1} + y^{-1} = 1$.	25
II.5 Les lignes de niveau de $J(x, y) = y - x^2$ sur le domaine $y \geq 0$.	29
II.6 Condition KKT de signe sur les multiplicateurs de Lagrange associée à un maximum.	31
II.7 Les lignes de niveau de $J(x, y) = -xy$ sur le domaine $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6$.	33
III. Le graphe d'une fonction convexe $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: la fonction est au-dessous de la corde $[(x, U(x), (y, U(y))]$, <i>i. e.</i> pour $x_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)y$, $U(x_\lambda) \leq \lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y)$.	39
III.1 Le graphe de la fonction $y = \min_{t \in \mathbb{R}}(t^2, (t + 1)^2)$ non convexe.	40
III.2 Comparaison des pentes de cordes.	46
III.3 La convexité est équivalente à la croissance des pentes des cordes, tangentes comprises.	46
III.4 Les fonctions U_1, U_2 sont quasi-convexes, mais pas $U_1 + U_2$.	52
III.5 Les courbes de niveau de la fonction d'objectifs $U(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 10x + 10y$ et le domaine des réalisables $\{x^2 + y^2 \leq 5, 3x + y + 6 \geq 0\}$.	60
IV. Les courbes d'indifférence pour $U_-(m) = (\ m\ ^2, \ m - (1, 0)\ ^2)$ sont des cercles : le front de Pareto (minimum) est le segment $[(0, 0), (1, 0)]$, où les courbes des deux familles sont tangentes : en dehors de ce front, on a une configuration des courbes des deux familles analogue à celle de la boîte d'Edgeworth-Bowley.	63
IV.1a) Le domaine (convexe) Ω obtenu par ajout d'un carré au disque; (b) Le domaine X intersection du quadrant positif, de l'intérieur du disque $D(0, 1)$ et de l'extérieur du disque $D((3/2, 3/2), \sqrt{3}/2)$.	65
A.1 Les courbes de niveau en dimension 2 pour une forme définie et une forme hyperbolique.	69

Index

Index général

- contrainte
 - régulière, 26
 - saturée, 26
- différentielle, 5
- domaine effectif, 42
- epigraphe, 44
- fonction
 - concave, 38
 - convexe, 38
 - de Cobb-Douglas, 6, 51, 55
 - quasi-concave, 51
 - quasi-convexe, 51
 - quasi-linéaire, 51
- gradient, 5
- hessienne, 5
- hypographe, 44
- Inégalité de Jensen, 41
- matrice bordante, 19
- partie
 - convexe, 37
- point
 - actif, 26
 - critique, 7
 - régulier, 26
 - selle, 8
- sage, 4
- simplexe, 2
- sous-variété, 11
- taux de rentabilité interne, 52

Index des noms

C. COBB, 51, 55

G. DANTZIG, 2

G. DEBREU, 19

P. DOUGLAS, 51

P. DOUGLAS, 55

L. EULER, 7, 58

W. FENCHEL, 42

J. JENSEN, 41

W. KARUSH, 26

H. W. KUHN, 26

J.-L. LAGRANGE, 11

A.-M. LEGENDRE, 42

A. MARSHALL, 13

V. PARETO, 62

A. W. TUCKER, 26

W.-H. YOUNG, 42