

Master Ingénierie mathématique, Univ. Nantes
Option Mathématiques et applications, ECN

Statistique Inférentielle.

Anne PHILIPPE
Université de Nantes, LMJL

Fiche 2. Estimation fonctionnelle

EXERCICE 1.

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi qui admet pour densité f . On suppose que les variables sont dans L^1

- 1) Rappeler la formule de $\hat{f}_n$ l'estimateur à noyau pour le noyau uniforme (cet estimateur est appelé l'histogramme mobile)

On définit l'intégrale

$$I(X_1, \dots, X_n) = \int x \hat{f}_n(x) \, dx$$

- 2) Que représente cette intégrale ?
3) Calculer $I(X_1, \dots, X_n)$. Commenter le résultat.

On suppose que les variables sont dans L^4 .

On définit l'intégrale

$$J(X_1, \dots, X_n) = \int x^2 \hat{f}_n(x) \, dx$$

- 4) Calculer l'intégrale $J(X_1, \dots, X_n)$.
5) Exprimer $J(X_1, \dots, X_n)$ à partir du moment empirique d'ordre 2 : $\hat{\mu}_n(2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$
6) Rappeler les propriétés de $\hat{\mu}_n(2)$
7) A quelle condition, $J(X_1, \dots, X_n)$ est il un estimateur asymptotiquement sans biais du moment d'ordre 2, $\mu_2 = E(X_1^2)$.
8) Calculer la variance de l'estimateur $J(X_1, \dots, X_n)$.
9) Conclure

EXERCICE 2.

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$.

- 1) Montrer que
— M_n admet pour densité

$$g_n(y) = ny^{n-1} \frac{1}{\theta^n} \mathbb{I}_{[0, \theta]}(y)$$

— $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ est un estimateur de θ asymptotiquement sans biais

On estime la densité de X_1 (notée f) par

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{M_n} \mathbb{I}_{[0, M_n]}(x)$$

- 2) Montrer que $\hat{f}_n(x) = 0$ presque sûrement pour $x < 0$ et pour $x > \theta$.
3) Montrer que pour $x \in [0, \theta]$ on a

$$\mathbb{E}(\hat{f}_n(x)) = \frac{1}{\theta} \frac{n}{n-1} (1 - (x/\theta)^{n-1})$$

- 4) En déduire que $\hat{f}_n(x)$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de $\frac{1}{\theta} \mathbb{I}_{[0, \theta]}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
5) Commenter les résultats obtenus.
6) A x fixé, montrer que l'estimateur $\hat{f}_n(x)$ converge vers $\frac{1}{\theta} \mathbb{I}_{[0, \theta]}(x)$ au sens L^2 .