

Master Ingénierie mathématique, Univ. Nantes
Option Mathématiques et applications, ECN

Statistique Inférentielle.

Anne PHILIPPE
Université de Nantes, LMJL

Fiche 3. Estimation paramétrique et vraisemblance

EXERCICE 1. MODÈLE UNIFORME - SUITE

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$. La densité s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{I}_{[0, \theta]}(x)$$

Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance

EXERCICE 2.

On considère un n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ d'une loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

- 1) Écrire la vraisemblance du modèle
- 2) Montrer que le modèle est régulier.
- 3) Quelle est l'information de Fisher dans le cas suivants :
 - σ^2 est connu, μ ne l'est pas.
 - μ est connu, σ^2 ne l'est pas.
 - Aucun des deux paramètres n'est connu.
- 4) Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance du couple (μ, σ^2)

EXERCICE 3. *Modèle de capture-recapture*

Dans un bassin, il y a un nombre inconnu N de poissons. On souhaite estimer N . Pour cela on capture n poissons et on les remet à l'eau après les avoir marqués. Ultérieurement on capture à nouveau K poissons ($K \geq n$). Soit X la variable aléatoire égale au nombre de poissons marqués parmi les K qui viennent d'être capturés.

- 1) Quelle est la loi de X ?
- 2) En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre N .
- 3) Que pensez vous de cet estimateur ?
- 4) Une autre expérience destinée à estimer N consiste à capturer les poissons les uns après les autres (avec remise...) jusqu'à la capture du premier poisson marqué. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de poissons capturés.
 - (a) Quelle est la loi de Y ?
 - (b) Calculer son espérance et sa variance. En déduire un estimateur de N .

EXERCICE 4.

Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$.

Les variables X_i ne sont pas observées, on observe uniquement les variables aléatoires Y_i définies par

$$Y_i = \begin{cases} 0 & \text{si } X_i = 0 \\ 1 & \text{si } X_i > 0 \end{cases}$$

- 1) Ecrire la vraisemblance des observations $(Y_1, \dots, Y_n)$
- 2) Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance existe si et seulement si tous les Y_i ne sont pas égaux à 1. Sous cette condition montrer qu'il est égal à $-\log(1 - \bar{Y}_n)$ avec

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

Comme l'estimateur n'est pas défini si $\bar{Y}_n = 1$, on modifie l'estimateur du MV en prenant une valeur arbitraire quand $\bar{Y}_n = 1$ c'est à dire

$$\hat{\theta}_n = \begin{cases} -\log(1 - \bar{Y}_n) & \text{si } \bar{Y}_n \neq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 3) Calculer la probabilité de l'événement $[\bar{Y}_n \neq 1]$
- 4) Montrer que presque sûrement, l'événement $[\bar{Y}_n \neq 1]$ est réalisé à partir d'un certain rang.
- 5) Montrer que $\hat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers θ .
- 6) Montrer que

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{LOI} \mathcal{N}(0, e^\theta - 1)$$