

Master Ingénierie mathématique, Univ. Nantes
Option Mathématiques et applications, ECN

Statistique Inférentielle.

Anne PHILIPPE
Université de Nantes, LMJL

Fiche 5. Efficacité

EXERCICE 1.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que ϕ la transformée de Laplace de X_1 est finie, c'est à dire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \mathbb{E}(e^{-tX_1}) < +\infty$.

- 1) Quelle est la transformée de Laplace de la loi qui admet pour fonction de répartition F_n . On la note $\hat{\phi}_n$
 - 2) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\hat{\phi}_n(t)$ est un estimateur consistant (au sens de la convergence presque sûre) de $\phi(t)$.
 - 3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\hat{\phi}_n(t)$ est un estimateur sans biais de $\phi(t)$
 - 4) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\hat{\phi}_n(t)$ est un estimateur de $\phi(t)$ convergent au sens L^2 .
- On suppose que X_1 est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et $P_\theta(X_1 = 1) = \theta \in]0, 1[$.
- 5) Montrer que $\{P_\theta, \theta \in]0, 1[\}$ est une famille exponentielle.
 - 6) Calculer ϕ_θ la transformée de la Laplace de X_1 .
 - 7) Calculer $\hat{\theta}_n$ l'estimateur du MV de θ .
 - 8) Montrer que l'estimateur du MV est efficace.
 - 9) Pour t fixé, $\hat{\phi}_n(t)$ est il un estimateur efficace de $\phi(t)$? est il asymptotiquement efficace ?

EXERCICE 2.

On dispose d'un n-échantillon $X_1, \dots, X_n$ d'une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ inconnu. On veut montrer qu'il n'existe pas d'estimateur sans biais de $\frac{1}{p}$.

- 1) Calculer la loi conditionnelle de $(X_1, \dots, X_n)$ sachant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

- 2) Justifier que si $h(X_1, \dots, X_n)$ est un estimateur de $1/p$ alors $E_p(h(X_1, \dots, X_n)|S_n)$ est aussi un estimateur de $1/p$.
- 3) Montrer que si $h(X_1, \dots, X_n)$ est un estimateur sans biais de $1/p$ alors $E_p(h(X_1, \dots, X_n)|S_n)$ est aussi un estimateur sans biais de $1/p$.
- 4) Montrer qu'il n'existe pas d'estimateur sans biais de $1/p$ de la forme $g(S_n)$
- 5) En déduire qu'il n'existe pas d'estimateur sans biais de $1/p$

EXERCICE 3.

On considère un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ d'une loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On estime σ^2 par la variance empirique modifiée

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2.$$

- 1) Quel est son biais, son risque quadratique ?
- 2) Quel est parmi les estimateurs de la forme

$$c \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2$$

(où $c > 0$) celui qui minimise l'erreur quadratique ?

EXERCICE 4.

Montrer que les statistiques suivantes sont exhaustives et totales

- La somme pour le modèle de Poisson.
- $\max\{X_1, \dots, X_n\}$ pour un modèle uniforme sur $[0, \theta]$.

EXERCICE 5.

On dispose d'un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

- 1) Montrer que $\bar{X}_n$ est un estimateur efficace de λ
On désire estimer $\tau = e^{-k\lambda}$ où k est un entier positif fixé.
- 2) Montrer que $\hat{\tau}_n = \mathbb{I}_{X_1 + \dots + X_k = 0}$ est un estimateur sans biais de τ .
- 3) Cet estimateur est-il efficace ?
- 4) Améliorez l'estimateur $\hat{\tau}_n$ en utilisant la statistique exhaustive $\sum_{j=1}^n X_j$.
- 5) Peut-on trouver un estimateur efficace de τ ?

EXERCICE 6.

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une suite de longueur n , de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

- 1) Écrire la vraisemblance.
- 2) Montrer que la statistique $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est exhaustive.
- 3) Montrer que la statistique S_n est totale.
- 4) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de p .
- 5) Cet estimateur peut-il être amélioré à l'aide de la statistique exhaustive S_n ?
- 6) Est-il un estimateur efficace du paramètre p ?
- 7) Proposer un estimateur sans biais de p^k où k est un entier connu.
- 8) En déduire un estimateur sans biais de variance minimale.