Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2017/2018 – Préparation au CAPES – Semestre 2

Corrigé de l'écrit blanc du CAPES du 17 janvier 2018

1. Interpolation et intégration numérique

Partie A – Interpolation de Lagrange.

(1) Pour deux polynômes P et Q, on sait que deg P + deg Q = deg(PQ) (avec la convention deg(0) = $-\infty$). En particulier,

$$\deg(\pi_j) = \deg\left(\prod_{i\neq j}(x-\tau_i)\right) = \sum_{i\neq j}\deg(x-\tau_i) = n-1.$$

(2) Supposons qu'il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\pi_j(x) = 0.$$

En appliquant cette relation en $x = \tau_j$, on a

$$\alpha_j\prod_{i\neq j}(\tau_j-\tau_i) = 0.$$

Comme les τ_i sont tous distincts, ceci implique que $\alpha_j = 0$. C'est vrai pour chaque $1 \leq j \leq n$. Ainsi, la famille est libre dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Puisqu'il s'agit d'une famille libre à n éléments dans un espace vectoriel de dimension n, c'est une base.

(3) On pose

$$L : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto (P(\tau_1), \ldots, P(\tau_n)) \in \mathbb{R}^n.$$

C'est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension n. Si on montre qu'elle est injective, alors elle sera automatiquement surjective. Or la question est équivalente à la surjectivité de L. Pour montrer l'injectivité, on se fixe un élément du noyau de L, i.e. un polynôme P de degré inférieur à $n-1$ et vérifiant $L(P) = 0$. De manière équivalente, ceci signifie que $P(\tau_j) = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$. Comme les x_j sont tous distincts, P a n racines distinctes. Par ailleurs, on sait que $\deg(P) \leq n-1$. Donc P est nécessairement nul, ce qui achève la preuve de l'injectivité de L. On peut vérifier que

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j\frac{\pi_j(x)}{\pi_j(\tau_j)}.$$

(4) Le polynôme $Q_{n+1}-Q_n$ s'annule en tous les $(\tau_j)_{1\leq j\leq n}$. Par ailleurs, c'est un polynôme de degré $\leq n$ et il a donc au plus n racines distinctes. Comme les x_j sont distincts, le polynôme s'écrit

$$Q_{n+1}(x) - Q_n(x) = c\prod_{j=1}^{n}(x-\tau_j),$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

(5) Sans perte de généralité, on peut supposer $\tau < \tau_1 < \ldots < \tau_n$. On sait que $g(\tau) = g(\tau_1) = \ldots = g(\tau_n) = 0$. D'après le théorème de Rolle, on sait qu'il existe

$$\xi_1 \in]\tau, \tau_1[\text{ tel que } g'(\xi_1) = 0, \ldots, \xi_n \in]\tau_{n-1}, \tau_n[\text{ tel que } g'(\xi_n) = 0.$$

En appliquant le théorème de Rolle à $g', \ldots, g^{(n-1)}$ (dans cet ordre), on trouve finalement qu'il existe ξ_τ dans $]-1,1[$ tel que $g^{(n)}(\xi_x) = 0$.

(6) Notons déjà que la conclusion est immédiate si $x = \tau_j$ pour un certain $1 \leq j \leq n$ car $P_n(\tau_j) = 0$ et $Q_n(\tau_j) = f(\tau_j)$. Traitons maintenant le cas $x \neq \tau_j$ pour tout $1 \leq j \leq n$. Dans ce cas, on peut appliquer la question A.4 (avec $x = \tau$) pour écrire

$$g(t) = f(t) - Q_{n+1}(t) = f(t) - Q_n(t) - cP_n(t).$$

En dérivant n fois, on sait d'après la question A.5 que

$$0 = g^{(n)}(\xi_x) = f^{(n)}(\xi_x) - cP_n^{(n)}(\xi_x) = f^{(n)}(\xi_x) - cn!,$$

où l'on a utilisé que Q_n est de degré $n-1$. Ainsi, $c = f^{(n)}(\xi_x)/n!$ et, comme $g(x) = 0$ par définition de Q_{n+1}, on trouve finalement

$$f(x) = Q_n(x) + \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}P_n(x),$$

qui nous permet de conclure pour $x \neq \tau_j$.

Partie B – Formules de quadrature élémentaires.

(1) Les polynômes de degré inférieur ou égal à 0 sont exactement les polynômes constant. Par linérarité et pour que la méthode soit au moins d'ordre 0, il faut donc imposer que

$$2 = \int_{-1}^{1} 1dx = J^{QE}(1) = \sum_{j=1}^{n}\omega_j.$$

(2) Pour la méthode du rectangle droit, on a $J^{QE}(1) = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$ et $J^{QE}(x) = -2 \neq 0 = \int_{-1}^{1} xdx$. La méthode est donc d'ordre 0. Pour la méthode du rectangle milieu, on a bien

$$J^{QE}(1) = 2 = \int_{-1}^{1} dx \quad \text{et} \quad J^{QE}(x) = 0 = \int_{-1}^{1} xdx.$$

En revanche, $J^{QE}(x^2) = 0 \neq \frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x^2 dx$. La méthode du rectangle milieu est donc d'ordre 1. Pour la méthode des trapèzes, on a encore

$$J^{QE}(1) = 2 = \int_{-1}^{1} dx \quad \text{et} \quad J^{QE}(x) = 0 = \int_{-1}^{1} x dx.$$

Par ailleurs, $J^{QE}(x^2) = 2 \neq \frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x^2 dx$. La méthode du trapèze est donc aussi d'ordre 1.

(3) En utilisant l'inégalité triangulaire, on écrit

$$\begin{aligned}\left| \int_{-1}^{1} f(x)dx - J^{QE}(f) \right| &\leq \left| \int_{-1}^{1} f(x)dx \right| + \left| J^{QE}(f) \right| \\ &\leq \int_{-1}^{1} |f(x)|dx + \sum_{j=1}^{l} \omega_j |f(\tau_j)| \\ &\leq 2\|f\|_{\mathcal{C}^0} + \sum_{j=1}^{n} \omega_j \|f\|_{\mathcal{C}^0}.\end{aligned}$$

En utilisant que la méthode est au moins d'ordre 0, on sait que la somme des ω_j est égale à 2, ce qui permet de conclure.

(4) On écrit la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt.$$

Par linéarité, on a

$$J^{QE}(f) = \sum_{k=0}^{p} f^{(k)}(0) J^{QE}\left(\frac{x^k}{k!}\right) + J^{QE}\left(\int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt\right).$$

Comme la formule de quadrature est au moins d'ordre p, on sait alors que

$$J^{QE}(f) = \sum_{k=0}^{p} f^{(k)}(0) \int_{-1}^{1} \frac{x^k}{k!} dx + J^{QE}\left(\int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt\right).$$

En applicant une nouvelle fois la formule de Taylor avec reste intégral, on trouve

$$J^{QE}(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{-1}^{1} \left(\int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt\right) dx + J^{QE}\left(\int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt\right).$$

En utilisant la question B.3, on trouve donc que

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)dx - J^{QE}(f) \right| \leq 4 \left\| \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt \right\|_{\mathcal{C}^0}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt\right| &\leq \left|\int_0^x \frac{|x-t|^p}{p!} |f^{(p+1)}(t)|dt\right| \\
&\leq \|f^{(p+1)}\|_{\mathcal{C}^0} \left|\int_0^x \frac{|x-t|^p}{p!} dt\right| \\
&\leq \|f^{(p+1)}\|_{\mathcal{C}^0} \left|\left[\frac{|x-t|^{p+1}}{(p+1)!}\right]_0^x\right| \\
&\leq \frac{\|f^{(p+1)}\|_{\mathcal{C}^0}}{(p+1)!}.
\end{aligned}$$

On a finalement

$$\left|\int_{-1}^1 f(x)dx - J^{QE}(f)\right| \leq 4\frac{\|f^{(p+1)}\|_{\mathcal{C}^0}}{(p+1)!}.$$

(5) Si la méthode est au moins d'ordre $n-1$, alors on doit avoir

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad \int_{-1}^1 \frac{\pi_j(x)}{\pi_j(\tau_j)} dx = J^{QE}\left(\frac{\pi_j}{\pi_j(\tau_j)}\right).$$

En effet, tous les polynômes π_j sont de degré $n-1$ d'après la question A.1. Par ailleurs, par défintion de J^{QE}, $J^{QE}(\pi_j/\pi_j(\tau_j)) = \omega_j$, ce qui conclut la question.

(6) On fixe un polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On sait qu'il existe un unique polynôme Q dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $Q(\tau_j) = P(\tau_j)$. Par unicité, P est donc égal à Q. On peut aussi vérifier que

$$P(x) = Q(x) = \sum_{j=1}^n P(\tau_j) \frac{\pi_j(x)}{\pi_j(\tau_j)}.$$

On intègre cette expression entre -1 et 1 et on trouve

$$\int_{-1}^1 P(x)dx = \sum_{j=1}^n P(\tau_j) \int_{-1}^1 \frac{\pi_j(x)}{\pi_j(\tau_j)} dx = J^{QE}(P).$$

La méthode est donc bien d'ordre au moins $n-1$ avec ce choix de poids ω_j.

Partie C – Formules de quadrature composées.

(1) En utilisant la relation de Chasles et la changement de variables $x = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} + t\frac{x_{k+1} - x_k}{2}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} + t\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right) dt,
\end{aligned}$$

qui est la relation voulue.

(2) Par définition de $L_k(f)$, on a

$$L_k(f)^{(p+1)}(t) = \frac{(x_{k+1}-x_k)^{p+1}}{2^{p+1}} f^{(p+1)}\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2} + t\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right).$$

En utilisant la définition de h, on trouve que, pour tout $t \in [-1,1]$,

$$|L_k(f)^{(p+1)}(t)| \leq \frac{h^{p+1}}{2^{p+1}} \left| f^{(p+1)}\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2} + t\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)\right| \leq \frac{h^{p+1}}{2^{p+1}} \|f^{(p+1)}\|_{\mathcal{C}^0}.$$

(3) En utilisant la question C.1, on sait que

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x_{k+1}-x_k}{2} J^{QE}(L_k(f)) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\left(\int_{-1}^1 L_k(f)(t)dt - J^{QE}(L_k(f))\right).$$

Par ailleurs, en utilisant les questions B.4 et C.2, on sait que

$$\left|\int_{-1}^1 L_k(f)(t)dt - J^{QE}(L_k(f))\right| \leq \frac{4\left\|L_k(f)^{(p+1)}\right\|_{\mathcal{C}^0}}{(p+1)!} \leq \frac{1}{2^{p-1}(p+1)!}\|f^{(p+1)}\|_{\mathcal{C}^0} h^{p+1}.$$

L'inégalité triangulaire nous donne alors

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x_{k+1}-x_k}{2} J^{QE}(L_k(f))\right| \leq \frac{1}{2^p(p+1)!}\|f^{(p+1)}\|_{\mathcal{C}^0} h^{p+1} \sum_{k=0}^{N-1} x_{k+1}-x_k,$$

qui implique bien l'inégalité attendue puisque $x_0 = a$ et $x_N = b$.

2. Suite de Fibonacci

(1) On procède par récurrence. Pour $n = 1$ et $n = 2$, on a $u_1 = u_2 = 1$ et la propriété est donc vérifiée. Supposons la propriété vrai jusqu'au rang $n \geq 2$ fixé. Comme $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, u_{n+1} est bien un entier strictement positif comme somme de deux entiers strictement positifs.

(2) Pour que r^n vérifie $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, il faut imposer $r^{n+1} = r^n + r^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Ceci est équivalent à imposer

$$r^2 = r + 1.$$

Il faut donc résoudre ce polynôme de degré 2. Le discriminant vaut 5 et on a donc deux solutions

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

On a $r_2 > \frac{1+\sqrt{1}}{2} = 1$. Enfin

$$-1 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} < r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}.$$

(3) Avec la proposition de l'énoncé, on a bien $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Par linéarité, on sait grâce à la question (2) que u_n vérifie bien la relation de récurrence voulue.

(4) En utlisant les questions (2) et (3), on vérifie que $u_n \to +\infty$ Pour v_n, on écrit

$$v_n = \frac{r_2^{n+1} - r_1^{n+1}}{r_2^n - r_1^n} = \frac{r_2 - (r_1/r_2)^n r_1}{1 - (r_1/r_2)^n} \to r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(5) On procède par récurrence sur n. L'hypothèse est clairement vérifiée pour $n = 0$. Supposons donc qu'elle est satisfaite au rang $n \geq 0$ fixé et vérifions qu'elle le reste au rang $n+1$. On a

$$u_{n+2}^2 - u_{n+1}u_{n+3} = u_{n+2}(u_n + u_{n+1}) - u_{n+1}(u_{n+1} + u_{n+2}) = u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = -(-1)^n,$$

qui achève la démonstration par récurrence. Le pgcd de u_n et u_{n+1} doit diviser $(-1)^n$ d'après la relation que nous venons de démontrer. Autrement dit, le pgcd de u_n et u_{n+1} est égal à 1.

(6) Fixons un entier strictement positif n et procédons par récurrence sur $p \geq 0$. Pour $p = 0$ et pour $p = 1$, c'est immédiat. Supposons donc l'hypothèse vraie jusqu'au rang $p \geq 1$ fixé. On a

$$u_{n+p+1} = u_{n+p} + u_{n+p-1} = u_{n-1}u_p + u_n u_{p+1} + u_{n-1}u_{p-1} + u_n u_p.$$

En regroupant les u_n et les u_{n-1}, on a alors

$$u_{n+p+1} = u_{n-1}(u_p + u_{p-1}) + u_n(u_{p+1} + u_p) = u_{n-1}u_{p+1} + u_n u_{p+2},$$

qui démontre la propriété au rang $p+1$ et achève la démonstration par récurrence.

(7) Distinguons le cas $n = 1$. Dans ce cas, le pgcd vaut 1 dans chacun des cas et la conclusion est donc immédiate. Supposons maintenant $n > 1$. Si d divise u_{n+p} et u_n, alors d divise $u_{n-1}u_p$ d'après la question précédente. D'après le (5), on sait par ailleurs que u_n et u_{n-1} sont premiers entre eux. Donc, par le théorème de Gauss, d doit diviser u_p. En particulier, comme d divise aussi u_n, d divise le pgcd de u_n et u_p. Ainsi, $u_{n+p} \wedge u_n$ divise $u_n \wedge u_p$. Pour la réciproque, on constate juste que, grâce à la question précédente, $u_n \wedge u_p$ divise u_{n+p}.

(8) Pour trouver le pgcd de m et n, on peut suivre l'algorithme d'Euclide que l'on va rappeler. Pour $m > n$, on écrit la division euclidienne de m par n, i.e.

$$m = k_0 n + r_0,$$

avec $k_0 \geq 1$ et $0 \leq r_0 < n$. Ainsi, $m \wedge n$ divise r_0 et n. De même, $r_0 \wedge n$ divise m et n. On réitère l'argument avec $r_0 < n$:

$$n = k_1 r_0 + r_1,$$

avec $k_1 \geq 1$ et $0 \leq r_1 < r_0$. De nouveau, $r_0 \wedge n$ divise r_1 et r_2 et $r_2 \wedge r_1$ divise r_0 et n. On réitère la procédure un nombre fini de fois :

$$\forall 1 \leq j \leq l, \quad r_{j-1} = k_{j+1} r_j + r_{j+1},$$

avec $k_{j+1} \geq 1$ et $0 \leq r_{j+1} < r_j$. On arrête l'algorithme lorsque $r_j = 0$ est égal à 0, autrement dit lorsque le reste dans la division euclidienne est nul. A chaque étape, on a $r_j \wedge r_{j-1}$ divise r_{j+1} et r_j. En particulier, $r_j \wedge r_{j-1}$ divise $r_j \wedge r_{j+1}$. De même, $r_j \wedge r_{j+1}$ divise $r_j \wedge r_{j-1}$. Ainsi, on a, tout au long de l'algorithme,

$$r_j \wedge r_{j+1} = r_j \wedge r_{j-1}.$$

Notons $j_0 \geq -1$ le plus petit entier tel que $r_{j_0+1} = 0$. Ceci signifie que $r_{j_0-1} \wedge r_{j_0} = r_{j_0}$ (avec la convention $r_{-2} = m$ et $r_{-1} = n$). En particulier, r_{j_0} est le pgcd de m et n. appliquons maintenant cette procédure à notre problème. Avec les conventions de l'énoncé, on a $r_{j_0} = d$. En utilisant la question prédédente, on a

$$u_m \wedge u_n = u_{k_0 n + r_0} \wedge u_n = u_{(k_0-1)n+r_0} \wedge u_n = \ldots = u_{r_0} \wedge u_n.$$

De la même manière, on aura $u_{r_0} \wedge u_n = u_{r_0} \wedge u_{r_1}$ et ainsi de suite jusqu'à j_0 pour lequel $r_{j_0} = d$. Ainsi,

$$u_m \wedge u_n = u_d.$$