Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2016/2017 – Préparation au CAPES – Semestre 2

Écrit blanc du CAPES

11 janvier 2017. **Durée : 5h.**
Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits**.

Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses.
Les deux problèmes sont indépendants.

1. Suites et fonctions

1.1. **Préliminaires.** On pourra utiliser (sans les démontrer) les résultats suivants :
— toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ;
— soient $a < b$ deux réels tels que $a < b$; toute application continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes ;
— toute suite réelle, croissante et majorée est convergente ; toute suite réelle, décroissante et minorée est convergente ;
— si deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n,$$

et si, pour tout entier n, on a $u_n \leq v_n$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Les résultats qui suivent sont à démontrer ; ils ne doivent pas être considérés ici comme des propriétés connues.

(1) Démontrer que si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite l alors, pour tout entier n, on a $w_n \geq l$. *On pourra raisonner par l'absurde.*

(2) On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes, c'est-à-dire telles que
— $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante,
— $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante,
— la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

(a) Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
(b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, on a $v_n - u_n \geq 0$.
(c) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
(d) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

(3) Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers un réel $l \in X$. Soit f une application définie sur X, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continue en l. Montrer que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$.

1.2. **Valeurs intermédiaires.** Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I d'intérieur non vide. On dit que f possède la propriété des valeurs intermédiaires si, pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$ et pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.
Cette propriété sera notée $\mathcal{P}$ dans la suite.

(1) On se propose dans ce qui suit de démontrer le théorème suivant (théorème des valeurs intermédiaires) :

$$f : I \to \mathbb{R} \text{ continue} \Longrightarrow f \text{ vérifie } \mathcal{P}.$$

Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$. La conclusion étant immédiate si $f(a) = f(b)$, on peut toujours supposer (quitte à remplacer f par $-f$) que $f(a) < f(b)$. Dans la suite, on supposera cette hypothèse vérifiée.
On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et, pour tout entier n,

$$\text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < \lambda, \text{ alors } a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n$$

et

$$\text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq \lambda, \text{ alors } a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(a) Justifier que, pour tout entier n, $a_n \in [a, b]$ et $b_n \in [a, b]$.

(b) Montrer, pour tout entier n,

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}.$$

(c) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(d) Conclure.

(2) Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

(3) Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs réelles. Montrer que, si g est positive sur $[a, b]$, alors il existe c dans $[a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

(4) Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

(a) Montrer que, pour tout entier n non nul, il existe $c_n \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que

$$f(c_n) = f\left(c_n + \frac{1}{n}\right).$$

On pourra considérer la fonction f_n définie sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ par

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$$

et écrire $f(1) - f(0)$ en fonction de f_n.

(b) Montrer que, si on remplace $\frac{1}{n}$ par un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$, alors le résultat précédent n'est plus vrai. On pourra considérer la fonction f sur $[0, 1]$ définie par

$$f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - x\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right].$$

2. Nombres de Stirling et nombres de Bell

Soient n et k deux entiers strictement positifs. On note $\mathbb{N}_n^*$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n, i.e.

$$\mathbb{N}_n^* = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

On note E_n^k l'ensemble des partitions strictes de $\mathbb{N}_n^*$ en k sous-ensembles. Autrement dit, $\mathcal{P} = \{X_1, \ldots, X_k\}$ appartient à E_n^k si et seulement si

— $\forall 1 \leq i \leq k$, $X_i \subset \mathbb{N}_n^*$ et $X_i \neq \emptyset$,

— $\mathbb{N}_n^* = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} X_i$,

— $\forall i \neq j$, $X_i \cap X_j = \emptyset$.

On introduit

$$E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_n^k,$$

et on note P_n^k le cardinal de E_n^k (nombre de Stirling) et B_n celui de E_n (nombre de Bell). Pour $0 \leq j \leq l$ deux entiers, on utilisera la convention

$$\begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} = \frac{l!}{j!(l-j)!}.$$

On pourra utiliser (sans le démontrer) le fait suivant :

— Le nombre de sous-ensembles (éventuellement vide) de $\mathbb{N}_n^*$ est égal à 2^n.

La première partie utilise seulement des notions de combinatoire. Les parties 2 *et* 3 *(à l'exception des questions (2.7) et (3.2)) sont indépendantes de la partie* 1.

2.1. **Calcul des nombres de Stirling.**

(1) (a) Déterminer les partitions strictes de $\mathbb{N}_n^*$ pour $n \in \{1,2,3\}$. En déduire les valeurs des P_n^k et des B_n pour $n \in \{1,2,3\}$.

(b) Montrer que $P_n^n = P_n^1 = 1$.

(c) Que peut-on dire de P_n^k si $k > n$?

(d) Montrer que $P_n^2 = 2^{n-1} - 1$.

(e) Montrer que $P_n^{n-1} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$.

(f) Justifier que $B_n = \sum_{k=1}^n P_n^k$.

(2) On considère la partition de E_n^k en deux sous-ensembles :

$$E_n'^k = \{\mathcal{P} \in E_n^k : \{n\} \in \mathcal{P}\}$$

et son complémentaire

$$E_n''^k = E_n^k \backslash E_n'^k.$$

(a) Pour $n = 3$ et $k = 2$, déterminer ces deux sous ensembles.

(b) Pour $k \geq 2$ et $n \geq 2$, montrer que le cardinal de $E_n'^k$ est égal à P_{n-1}^{k-1}. *On pourra établir une bijection entre E_{n-1}^{k-1} et $E_n'^k$.*

(c) Pour $k \geq 2$ et $n \geq 2$, établir une surjection de $E_n''^k$ sur E_{n-1}^k tel que le nombre d'antécédants d'un élément de E_{n-1}^k soit égal à k.

(d) En déduire que, pour tout $k \geq 2$ et tout $n \geq 2$, on a

$$P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + kP_{n-1}^k.$$

(3) Montrer que, pour $n \geq 3$, $P_n^3 = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}$.

(4) Montrer que, pour tout $k \geq 1$, on a

$$P_1^k = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} j.$$

(5) Montrer que, pour tout $k \geq 1$ et pour tout $n \geq 1$, on a

$$P_n^k = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} j^n.$$

2.2. **Lien avec les polynômes.** Soient F_k les polynômes définis par : $F_0(X) = 1$ et, pour tout $k \geq 1$,

$$F_k(X) = X(X-1)\dots(X-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(X-i).$$

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

(1) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$.

(2) Pour $0 \leq k \leq n$, montrer que F_k appartient à $\mathbb{R}_n[X]$.

(3) Montrer que $(F_k)_{k=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire qu'il existe des nombres réels $(a_{n,k})$ tels que
$$X^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} F_k(X).$$

(4) (a) Calculer les $a_{n,k}$ pour $n \leq 2$.

(b) Calculer $a_{n,0}$ et $a_{n,n}$.

(5) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}^*$, on a
$$a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + k a_{n-1,k}.$$
On pourra écrire $X = X - k + k$.

(6) En déduire la valeur de $a_{n,1}$.

(7) Conclure que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_n^*$, $P_n^k = a_{n,k}$.

2.3. **Calcul des nombres de Bell.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{e^x - 1}.$$

(1) Montrer que f est indéfiniment dérivable et calculer $f'(x)$.

(2) (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout x dans $\mathbb{R}$,
$$f^{(n)}(x) = f(x) \sum_{k=0}^{n} P_n^k e^{kx},$$
avec la convention $P_n^0 = 0$.

(b) Donner en fonction des B_n le développement limité à l'ordre p de $f(x)$.

(3) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$B_{n+1} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} B_j.$$