Séminaire BOURBAKI Mars 2018
70ème année, 2017-2018, n$^{\text{o}}$ 1146

DYNAMIQUE DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER SUR LE DISQUE
[D'après N. Anantharaman, M. Léautaud et F. Macià]

par **Gabriel RIVIÈRE**

INTRODUCTION

Le régime semi-classique de la mécanique quantique est un régime où la constante de Planck est négligeable devant les autres actions physiques mises en jeu dans le système. À la limite, le système considéré est alors régi par les équations de la mécanique classique et on s'attend à ce que la nature du système classique associé (par exemple, chaotique *vs.* intégrable) se reflète dans le comportement du système quantique. D'un point de vue mathématique, ce type d'asymptotique est au cœur de ce qu'on appelle l'analyse microlocale dont le champ d'applications est extrêmement varié : théorie spectrale, équations aux dérivées partielles, topologie symplectique, systèmes dynamiques hyperboliques, géométrie aléatoire, etc. L'objet de cet exposé est l'étude de problématiques de géométrie spectrale et d'équations aux dérivées partielles à travers cette perspective. Précisément, nous discuterons les propriétés des solutions de l'équation de Schrödinger dans la limite semi-classique de la mécanique quantique. Un cas particulier important est celui des vecteurs propres du Laplacien ou plus généralement de l'opérateur de Schrödinger sur une variété compacte lorsque la valeur propre tend vers l'infini. De ce point de vue, il s'agit de questions typiques de géométrie spectrale qui ont fait l'objet d'une grande attention ces quarante dernières années notamment en lien avec le problème de l'ergodicité quantique que nous décrirons brièvement. Dans ce texte, nous mettrons plutôt l'accent sur la situation opposée, à savoir celle des systèmes complètement intégrables et, à travers les exemples du tore et du disque, nous essayerons de comprendre de manière fine la dynamique de l'équation de Schrödinger.

1. LE CAS STATIONNAIRE

1.1. Mesures semi-classiques

Présentons maintenant un peu plus précisément les objets de notre étude. Pour simplifier, on se limite dans cette première partie au cas d'une variété M qui est lisse ($\mathcal{C}^\infty$), compacte et *sans bord*. On suppose aussi cette variété connexe, orientée et munie d'une métrique riemannienne g lisse et on note $d \geq 1$ sa dimension. Un cas particulier du problème que l'on va étudier est l'équation suivante :

$$\left(-\frac{\Delta_g}{2} + V\right)\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda, \quad \|\psi_\lambda\|_{L^2} = 1, \tag{1}$$

où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami (ou laplacien) associé à la métrique g, où V appartient(1) à $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ et où l'espace L^2 est défini par rapport au volume riemannien. Sous nos hypothèses, on sait [70, Th. 14.7] qu'il existe une base orthonormée $(e_j)_{j\geq 0}$ de $L^2(M)$ composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et une suite croissante $(\lambda_j)_{j\geq 0}$ tendant vers $+\infty$ telles que

$$\forall j \geq 0, \quad \left(-\frac{\Delta_g}{2} + V\right) e_j = \lambda_j e_j.$$

À part dans certains cas très particuliers(2), on n'a en général pas d'expression explicite de ces fonctions et il est naturel de chercher à les décrire. Du point de vue physique, les solutions de (1) sont des états stationnaires de l'équation de Schrödinger :

$$i\partial_t u = -\frac{\Delta_g}{2} u + Vu, \quad u(t=0) = \psi \in L^2(M).$$

Les valeurs propres λ représentent l'énergie de l'état quantique ψ_λ [25, § 2.5] et l'objet de cet exposé est l'étude de la limite où les états quantiques sont de plus en plus « excités », *i.e.* $\lambda \to +\infty$. Le principe de correspondance affirme que, dans ce régime asymptotique, les propriétés des états quantiques seront régies par celles du système classique sous-jacent [25, § 7.4], ici le flot géodésique sur le fibré cotangent T^*M. On parle alors de limite *semi-classique* de la mécanique quantique.

L'objet de cette note est d'étudier les propriétés de concentration de ces états stationnaires ou plus généralement des solutions de l'équation de Schrödinger dans cette limite. Rappelons qu'il s'agit de fonctions lisses et notre but est de comprendre si ces solutions peuvent développer asymptotiquement des singularités. Afin de mesurer ceci, nous allons étudier ces états quantiques à travers des mesures de probabilité qui leur sont naturellement associées. Précisément, pour toute solution de (1), on pose

$$d\nu_\lambda(x) := |\psi_\lambda(x)|^2 d\mathrm{Vol}_g(x),$$

où Vol_g est le volume riemannien associé à g. Du point de vue de la mécanique quantique, cette mesure représente la probabilité de trouver en x une particule dans l'état ψ_λ. Nous nous intéressons au comportement asymptotique de ces mesures et nous notons $\mathcal{N}(\infty)$ l'ensemble des points d'accumulation de la suite de mesures $(\nu_{\lambda_j})_{j\geq 0}$ lorsque $\lambda_j \to +\infty$.

Afin d'étudier cet ensemble, il est utile de relever ces mesures de probabilité en des distributions sur le fibré cotangent T^*M. Ce type de construction apparaît déjà dans les travaux de Wigner [64] et porte parfois le nom de *distribution de Wigner*. D'un point

(1)Dans tout l'exposé, on suppose le potentiel lisse mais une grande partie des résultats resteraient valables sous des hypothèses de régularité plus faibles.

(2)Par exemple, si $V \equiv 0$ et si M est un tore ou une sphère (munis de leurs métriques canoniques).

de vue mathématique, ceci nécessite de faire appel à la notion d'opérateurs pseudo-différentiels [70, Ch. 4]. On définit, pour $\lambda > 0$,

$$\mu_\lambda : \mathcal{C}_c^\infty(T^*M) \ni a \mapsto \left\langle \psi_\lambda, \mathrm{Op}_{\lambda^{-\frac{1}{2}}}(a)\psi_\lambda \right\rangle_{L^2} \in \mathbb{C},$$

où $\mathrm{Op}_{\lambda^{-\frac{1}{2}}}(a)$ est un opérateur pseudo-différentiel (semi-classique) de symbole principal a. Notons que, si l'on étend la définition à des fonctions a dans $\mathcal{C}^\infty(M)$, on a $\langle \mu_\lambda, a\rangle = \langle \nu_\lambda, a\rangle$ et cet objet encode plus d'information que ν_λ. Dans la littérature mathématique, ce type de quantités apparaît par exemple dans le théorème d'ergodicité quantique sur lequel nous reviendrons au paragraphe suivant. Leur étude systématique pour les problèmes d'équations aux dérivées partielles est due à Tartar [61], Gérard [27, 26], Lions-Paul [44], etc. Nous renvoyons par exemple à l'article de Burq dans ce même séminaire pour plus de précisions à ce sujet [12]. Le théorème de Calderón-Vaillancourt [70, Th. 4.23] nous assure que la suite μ_λ est bornée dans $\mathcal{D}'(T^*M)$. Nous notons $\mathcal{M}(\infty)$ l'ensemble de ses points d'accumulation lorsque $\lambda \to +\infty$. Les éléments de $\mathcal{M}(\infty)$ sont appelés les *mesures semi-classiques* de l'opérateur de Schrödinger. Les théorèmes d'analyse semi-classique nous permettent en effet de démontrer [70, Ch. 5] que tout élément μ de $\mathcal{M}(\infty)$ est une *mesure de probabilité à support dans le fibré unitaire cotangent S^*M et invariante par le flot géodésique*

$$\varphi^t : T^*M \to T^*M.$$

Les mesures de probabilité invariantes peuvent être régulières (mesure de Liouville) ou très singulières (mesure portée par une géodésique fermée). L'une des questions au cœur de cet exposé est d'essayer de caractériser parmi elles les mesures semi-classiques. Autrement dit, quelles mesures invariantes peuvent effectivement être obtenues comme limites de fonctions propres de l'opérateur de Schrödinger ? On cherche notamment à comprendre leur régularité. Finalement, pour faire le lien avec l'ensemble plus simple $\mathcal{N}(\infty)$, mentionnons que l'on a

$$\mathcal{N}(\infty) = \left\{ \int_{S_x^*M} \mu(x, d\xi) : \mu \in \mathcal{M}(\infty) \right\}.$$

Pour illustrer le principe de correspondance semi-classique et l'influence de la dynamique du flot géodésique sur la structure des fonctions propres, nous décrivons maintenant quelques propriétés connues de ces mesures semi-classiques dans trois cadres dynamiques assez distincts.

1.2. Le cas des variétés à courbure négative

Commençons par le cas historique des variétés à courbure strictement négative. Il s'agit du cadre diamétralement opposé à celui qui occupera le reste de l'exposé au sens où le flot géodésique est dans ce cas ergodique pour la mesure de Liouville sur S^*M. En utilisant cette propriété dynamique et la loi de Weyl microlocale, Šnirel'man [60], Zelditch [67] et Colin de Verdière [17] démontrent la propriété dite d'*ergodicité quantique* : étant donnée une base orthonormée $(e_j)_{j\geq 0}$ de solutions de (1), on peut trouver

$S \subset \mathbb{N}$ de densité 1 tel que

$$(2)\qquad \forall a \in \mathcal{C}^0(M), \quad \lim_{j\to+\infty, j\in S} \int_M a(x)|e_j(x)|^2 d\mathrm{Vol}_g(x) = \frac{1}{\mathrm{Vol}_g(M)} \int_M a(x) d\mathrm{Vol}_g(x).$$

Autrement dit, le volume riemannien est un élément de $\mathcal{N}(\infty)$ et la plupart des fonctions propres d'une base orthonormée ont tendance à s'équidistribuer sur M. Le résultat s'étend en fait aux distributions de Wigner :

$$(3)\qquad \forall a \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*M), \quad \lim_{j\to+\infty, j\in S} \langle \mu_{\lambda_j}, a\rangle = \int_{S^*M} a(x,\xi) dL(x,\xi),$$

où L est la désintégration de la mesure de Liouville sur S^*M. Ce théorème est à la base de la conjecture d'unique ergodicité quantique de Rudnick et Sarnak [56] qui affirme que l'on n'a en fait pas besoin d'extraire une sous suite, *i.e.* $S = \mathbb{N}$. Cette conjecture reste largement ouverte même si de nombreux résultats ont été obtenus ces quinze dernières années [22, 43, 2, 7, 39, 30, 21]. Nous renvoyons par exemple à l'article de Colin de Verdière dans ce séminaire pour une description d'une partie de ces résultats [18].

Le résultat d'ergodicité quantique est assez robuste et s'étend à toutes les situations où l'on a un flot hamiltonien ergodique pour la mesure de Liouville [32]. En particulier, Gérard-Leichtnam et Zelditch-Zworski ont démontré qu'il reste valable pour des variétés à bord pour lesquelles la mesure de Liouville est ergodique [28, 69]. Notons toutefois qu'à l'exception du résultat [30], nous en savons beaucoup moins sur la structure des mesures semi-classiques dans le cas à bord.

1.3. Le cas du tore

L'article d'Anantharaman, Léautaud et Macià s'intéresse à la situation des systèmes intégrables et plus précisément au cas de l'équation de Schrödinger sur le disque. Avant d'y venir, commençons par décrire ce qui est connu dans le cas (sans bord) du tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z}^d$ muni de sa métrique canonique sous l'hypothèse $V \equiv 0$: c'est l'exemple le plus simple d'un système *complètement intégrable* (non dégénéré). Dans ce cadre particulier, nous pouvons faire appel à des techniques d'analyse harmonique et de théorie des nombres pour décrire la structure de $\mathcal{N}(\infty)$. Rappelons en effet que, pour $V \equiv 0$, toute solution ψ_λ de (1) est de la forme

$$\psi_\lambda = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d:\|k\|^2=2\lambda} \widehat{c}_k e^{ik.x}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}^d:\|k\|^2=2\lambda} |\widehat{c}_k|^2 = 1.$$

Ainsi, la structure des vecteurs propres du laplacien est intimement liée dans ce cadre à la description des solutions de l'équation diophantienne

$$k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_d^2 = 2\lambda$$

dans $\mathbb{Z}^d$. Or le nombre de solutions de cette équation tend vers $+\infty$ le long de certaines sous-suites $\lambda_n \to +\infty$ [29]. En d'autres termes, le spectre du laplacien a de fortes multiplicités et ceci rend délicat la description des vecteurs propres lorsque λ tend vers l'infini. En se basant sur cette structure arithmétique, Zygmund [71] a démontré que, pour $d = 2$, $V \equiv 0$ et pour toute solution de (1), $\|\psi_\lambda\|_{L^4(\mathbb{T}^2)} \leq 5^{\frac{1}{4}}$. Ceci implique en particulier que tout élement de $\mathcal{N}(\infty)$ est dans ce cas absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue sur le tore et que la densité des mesures est en fait un élément de L^2. Ceci exclut la possiblité qu'une suite de fonctions propres se concentre sur une orbite périodique du flot géodésique. Toujours en dimension 2, Jaffard a quant à lui démontré que cette densité était strictement positive presque partout [35] en utilisant la théorie des séries de Fourier lacunaires de Kahane [38]. Ce résultat a été ensuite généralisé par Jakobson [36] qui a démontré, en se ramenant à la résolution de certaines équations de Pell, que tout élément de $\mathcal{N}(\infty)$ est en fait un polynôme trigonométrique dont les modes de Fourier sont contenus dans deux cercles centrés en l'origine. Pour $d \geq 3$ et en se servant aussi de la structure arithmétique sous-jacente, Bourgain a démontré que les éléments de $\mathcal{N}(\infty)$ restaient des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue [36] et leur régularité a été décrite par Jakobson dans ce même article. Dans le cas où V ne s'annule pas, les méthodes d'analyse harmonique continuent de s'appliquer et nous pouvons par exemple mentionner l'article de Bourgain, Burq et Zworski en dimension 2 [10] – voir aussi [16]. Finalement, mentionnons que Marklof et Rudnick ont démontré la version faible (2) du théorème d'ergodicité quantique dans le cas du tore [51] même si (3) n'est pas vraie pour une base orthonormée quelconque. Dans ce contexte géométrique, il est toutefois nécessaire d'extraire une sous-suite pour assurer la convergence vers la mesure volume [42].

L'avantage de ces techniques d'analyse harmonique est de donner des résultats très précis sur la régularité des solutions [36] et de pouvoir être poussées jusqu'à traiter des potentiels peu réguliers en dimension 2 [10, 16]. Toutefois, elles se généralisent *a priori* mal à des systèmes intégrables plus généraux comme ceux qui nous intéressent ici. Avec cet objectif en tête, il est donc nécessaire de comprendre comment ces résultats peuvent être obtenus par des techniques différentes qui sont d'une certaine manière plus robustes du point de vue de la dynamique classique. En utilisant des outils d'analyse semi-classique, Anantharaman et Macià ont démontré en toute dimension l'absolue continuité des élément de $\mathcal{N}(\infty)$ pour des potentiels assez généraux et étendu cette régularité aux solutions de l'équation de Schrödinger dépendant du temps [47, 6]. Par ailleurs, leur argument permet de donner une nouvelle démonstration du théorème de Jaffard. En dimension 2, ces résultats peuvent aussi être obtenus plus directement comme conséquence de l'analyse de Burq et Zworski dans [13, 15] dont les démonstrations sont intermédiaires entre les deux types d'approche. Pour résumer, par des méthodes diverses et variées, on a le théorème suivant dans le cas du tore :

Théorème 1.1 ([71, 35, 36, 13, 47, 6, 15, 10]). — *Pour $d \geq 1$ et $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, on a :*

1. $\mathcal{N}(\infty) \subset L^1(\mathbb{T}^d)$,
2. *pour tout ouvert non vide ω de $\mathbb{T}^d$, il existe $C(\omega) > 0$ telle que*

$$\forall \nu \in \mathcal{N}(\infty), \quad \nu(\omega) \geq C(\omega).$$

La stratégie (semi-classique) d'Anantharaman et Macià pour démontrer ce théorème consiste à introduire des généralisations des distributions de Wigner pour étudier la régularité des solutions de (1) au voisinage de sous-variétés où le flot géodésique remplit des tores invariants de dimension $< d$, *e.g.* le long de géodésiques fermées. On parle de *seconde microlocalisation* le long de ces sous-variétés invariantes et nous reviendrons plus en détail sur l'exemple du tore ainsi que sur cette procédure qui est plus ou moins classique en analyse microlocale [58, 40, 9, 20, 54, 59, 24]. L'avantage de cette approche est qu'elle se généralise à des systèmes complètement intégrables plus généraux (non dégénérés) que le tore. Elle met ainsi en lumière le fait que la régularité des éléments de $\mathcal{N}(\infty)$ est essentiellement due à la structure complètement intégrable du système classique. Par exemple, Anantharaman, Fermanian-Kammerer et Macià ont démontré comment étendre cette analyse à des systèmes complètement intégrables dont l'hamiltonien classique sous-jacent est une fonction strictement convexe des variables d'action [3]. Notons que ces procédures de seconde microlocalisation étaient aussi au cœur de la série de travaux de Vasy et Wunsch [65, 63, 66] sur la régularité des quasi-modes pour les systèmes complètement intégrables en dimension 2 via la notion de front d'onde. Enfin, cette stratégie est centrale dans l'article d'Anantharaman, Léautaud et Macià [5] que nous voulons décrire ici et qui concerne le cas du disque euclidien.

1.4. Le cas de la sphère

Pour conclure cette introduction, discutons brièvement le cas de systèmes complètement intégrables dégénérés comme la sphère munie de sa métrique canonique. Dans ce cas et en supposant $V \equiv 0$, Jakobson et Zelditch ont démontré [37], en se servant de la structure algébrique sous-jacente, que toute mesure invariante par le flot géodésique appartient à l'ensemble $\mathcal{M}(\infty)$. En particulier, l'ensemble $\mathcal{M}(\infty)$ est de taille maximale dans ce cadre géométrique. Ce résultat a été généralisé aux autres variétés compactes symétriques de rang 1 par Macià [45] en se servant de méthodes de nature plus semi-classique – voir aussi [8, 34] pour d'autres démonstrations. Notons toutefois que, si V n'est pas identiquement nul ou si (M, g) est une variété de Zoll quelconque[(3)], cette propriété n'est plus satisfaite en général [48, 49]. Finalement, si on revient au cas où $V \equiv 0$, on a la propriété d'unique ergodicité quantique pour un choix aléatoire de base orthonormée de fonctions propres [68, 62] et la version faible (2) est vérifiée pour des bases vérifiant certaines symétries de type Hecke [11].

2. MESURES SEMI-CLASSIQUES DÉPENDANT DU TEMPS

Jusqu'à présent, nous nous sommes limités, par souci de simplicité, au cas stationnaire mais les quantités et la plupart des résultats de l'introduction se généralisent au cas de l'équation dépendant du temps que nous allons maintenant décrire afin de pouvoir

[(3)] C'est-à-dire dont toutes les géodésiques sont fermées.

énoncer le résultat d'Anantharaman, Léautaud et Macià dans toute sa généralité. Le problème qui nous intéresse est donc

$$i\partial_t u_n = \left(-\frac{\Delta_g}{2} + V\right) u_n, \quad u_n(t=0) = \psi_n, \tag{4}$$

où $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite normalisée dans $L^2(M)$. Nous continuons de décrire le cas d'une variété sans bord. On s'intéresse à la suite des solutions (u_n) de cette équation et, de nouveau, on se place dans un cadre semi-classique où la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conditions initiales correspond à des états de plus en plus « excités ». En plus d'être normalisées dans L^2, on suppose donc aussi que ces états *oscillent à une fréquence* $\hbar_n^{-1}$, *i.e.*

$$\lim_{R\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \sum_{j:\hbar_n^2\lambda_j\geq R} |\langle e_j, \psi_n\rangle_{L^2}|^2 = 0 \tag{5}$$

et

$$\lim_{\delta\to 0^+} \limsup_{n\to+\infty} \sum_{j:\hbar_n^2\lambda_j\leq \delta} |\langle e_j, \psi_n\rangle_{L^2}|^2 = 0 \tag{6}$$

où $(e_j)_{j\geq 0}$ est une base orthonormée de fonctions propres de Δ_g (associées aux valeurs propres λ_j) et $\hbar_n \to 0^+$ lorsque n tend vers $+\infty$. Afin d'alléger la présentation, nous faisons par la suite l'abus de notation (standard en analyse semi-classique) d'omettre le paramètre n et donc de considérer la limite $\hbar \to 0^+$. De nouveau, on cherche à étudier les points d'accumulation des distributions de Wigner associées à ces suites de solutions. L'étude systématique de ces objets dans le cas dépendant du temps a été faite par Macià dans [46].

Remarque 2.1. — Observons que, pour une suite quelconque de données initiales $(\psi_n)_{n\geq 1}$, on ne peut pas forcément trouver une suite $\hbar_n \to 0^+$ de telle sorte que (5) et (6) soient satisfaites simultanément. On pourrait prolonger l'analyse de cet exposé à des données plus générales mais nous ne discutons pas cette question ici. Nous renvoyons le lecteur désireux d'en savoir plus à [5, §2.1, §2.6] pour une discussion précise sur les hypothèses d'oscillation des données initiales.

Fixons maintenant une suite $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ normalisée dans $L^2(M)$ et vérifiant les hypothèses (5) et (6). Quitte à extraire une sous-suite, on peut toujours supposer que, pour tout θ dans $L^1(\mathbb{R})$ et pour toute a dans $\mathcal{C}^0(M)$,

$$\lim_{\hbar\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \theta(t) \left(\int_M a(x)|u_\hbar(x,t)|^2 d\mathrm{Vol}_g(x)\right) dt = \int_{\mathbb{R}} \theta(t) \left(\int_M a(x) d\nu_t(x)\right) dt,$$

où, pour presque tout t dans $\mathbb{R}$, ν_t est une mesure de probabilité sur M. On note par la suite $\mathcal{N}_{\mathrm{Schr}}$ l'ensemble des éléments $t \mapsto \nu_t$ obtenus de cette manière et notre objectif est de décrire la régularité de ces objets (*e.g.* absolue continuité) dans le cas de systèmes complètement intégrables. Une nouvelle fois, leur étude repose sur la description de leur relevé à l'espace cotangent :

$$w_\hbar(t) : \mathcal{C}_c^\infty(T^*M) \ni a \mapsto \langle u_\hbar(t), \mathrm{Op}_\hbar(a) u_\hbar(t)\rangle_{L^2} \in \mathbb{C}.$$

D'après [46], on peut, quitte à extraire une nouvelle sous-suite, supposer que, pour tout θ dans $L^1(\mathbb{R})$ et pour toute a dans $\mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$,

$$\lim_{\hbar\to 0^+}\int_{\mathbb{R}}\theta(t)\,\langle w_\hbar(t),a\rangle\,dt=\int_{\mathbb{R}}\theta(t)\left(\int_{T^*M}a(x,\xi)d\mu_t(x,\xi)\right)dt,$$

où, pour presque tout t dans $\mathbb{R}$, μ_t est une mesure de probabilité invariante par le flot géodésique et supportée dans T^*M. On note $\mathcal{M}_{\mathrm{Schr}}$ l'ensemble de ces points d'accumulation qui sont donc des familles de mesures de probabilité. En utilisant (6), on a $\mu_t(M\times\{0\})=0$ pour presque tout t dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2.2. — Comme ce type d'argument reviendra à de multiples reprises dans la suite, expliquons comment déterminer cette propriété d'invariance. Pour cela, nous devons dériver la distribution de Wigner et exploiter le fait que $u_\hbar(t)$ résout l'équation de Schrödinger (4) :

$$\frac{d}{dt}\langle w_\hbar(t),a\rangle=i\left\langle u_\hbar(t),\left[-\frac{1}{2}\Delta_g+V,\mathrm{Op}_\hbar(a)\right]u_\hbar(t)\right\rangle=\frac{1}{\hbar}\left\langle w_\hbar(t),\left\{\frac{\|\xi\|_x^2}{2},a(x,\xi)\right\}\right\rangle+\mathcal{O}(1),$$

où $\{.,.\}$ est le crochet de Poisson [70, p. 20]. La seconde égalité est une conséquence du théorème de composition des opérateurs pseudo-différentiels [70, Th. 4.18] et du théorème de Calderón-Vaillancourt [70, Th. 4.23]. En intégrant contre une fonction test θ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et en utilisant le théorème de Calderón-Vaillancourt une nouvelle fois, on trouve, après passage à la limite $\hbar\to 0^+$,

$$\int_{\mathbb{R}}\theta(t)\left\langle\mu_t,\left\{\frac{\|\xi\|_x^2}{2},a(x,\xi)\right\}\right\rangle dt=0.$$

Rappelons que $H(x,\xi):=\frac{\|\xi\|_x^2}{2}$ est l'hamiltonien associé au flot géodésique. En particulier, si on note X le champ de vecteurs hamiltonien générant le flot géodésique φ^s, la relation précédente se lit, pour presque tout t dans $\mathbb{R}$,

$$X(\mu_t)=0,$$

ou, de manière équivalente, pour presque tout t dans $\mathbb{R}$,

$$\forall s\in\mathbb{R},\quad \varphi_*^s\mu_t=\mu_t.$$

Par la suite, nous serons amenés à raffiner ce type de raisonnement afin d'en tirer le maximum de propriétés d'invariance des élements μ_t.

On a, comme précedemment,

$$\mathcal{N}_{\mathrm{Schr}}=\left\{t\mapsto\int_{T_x^*M}\mu_t(x,d\xi):\ t\mapsto\mu_t\in\mathcal{M}_{\mathrm{Schr}}\right\}.$$

Remarque 2.3. — Le fait que tout élement ν_t de $\mathcal{N}_{\mathrm{Schr}}$ soit le poussé en avant d'une mesure de probabilité positive μ_t ne chargeant pas $\{\xi=0\}$ et vérifiant l'équation (au sens des distributions)

$$\left\{\frac{\|\xi\|_x^2}{2},\mu_t(x,\xi)\right\}=0$$

nous indique déjà certaines propriétés de régularité des ν_t. Par exemple, ν_t ne peut pas être portée par un point. Dans le cas des systèmes complètement intégrables, nous verrons comment dériver encore plus de propriétés de régularité de la limite.

On cherche donc à décrire la structure de $\mathcal{M}_{\text{Schr}}$ pour en déduire des propriétés de l'ensemble $\mathcal{N}_{\text{Schr}}$. Notons que les résultats de la section 1 admettent en fait des généralisations à ce cadre dépendant du temps mais nous n'y revenons pas pour nous concentrer sur le cas des systèmes intégrables et sur les nouvelles questions que soulève cette approche et les possibilités qu'elle offre.

2.1. Nouvelles questions et lien avec le cas stationnaire

En plus des questions de régularité mentionnées plus haut, on peut se demander quel est le lien entre la solution au temps t et la suite de conditions initiales. Quitte à extraire encore une fois une sous-suite, on peut supposer que, pour toute a dans $\mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$,

$$\lim_{\hbar\to 0^+} \langle w_\hbar(0), a\rangle = \lim_{\hbar\to 0^+} \langle \psi_\hbar, \mathrm{Op}_\hbar(a)\psi_\hbar\rangle_{L^2} = \int_{T^*M} a(x,\xi)d\mu_0(x,\xi),$$

où μ_0 est une mesure de probabilité sur T^*M. De nouveau, les hypothèses de fréquence permettent de vérifier que la mesure limite ne charge pas la section nulle. En revanche, μ_0 n'est pas en général invariante par le flot géodésique puisqu'on peut avoir *a priori* n'importe quelle mesure de probabilité. On peut raisonnablement se demander si μ_t est complètement déterminée par μ_0. Pour le cas des *systèmes complètement intégrables* qui nous occupe, nous verrons que ce n'est pas le cas et l'objectif de cet exposé est de reconstruire complètement μ_t à partir de certaines familles de fonctionnelles linéaires associées à la suite des données initiales. Bien entendu, reconstruire μ_t à partir de la suite des données initiales permet de déduire des propriétés de régularité en se basant sur la représentation explicite que nous aurons réussi à obtenir.

Remarque 2.4. — À titre d'exemple, on peut considérer le cas du cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ muni de sa métrique canonique. Pour $a(\xi) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$\frac{d}{dt}\langle w_\hbar(t), a(\xi)\rangle = i\left\langle u_\hbar(t), \left[-\frac{\Delta}{2} + V, \mathrm{Op}_\hbar(a(\xi))\right] u_\hbar(t)\right\rangle = \mathcal{O}(\hbar),$$

où l'on a utilisé le théorème de composition pour les opérateurs pseudo-différentiels. Ainsi, en intégrant contre une fonction test θ dans $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ et en passant à la limite $\hbar \to 0^+$, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}} \theta'(t)\left(\int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}} a(\xi)\mu_t(dx,d\xi)\right)dt = 0.$$

Ainsi, $\int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}} a(\xi)\mu_t(dx,d\xi)$ est indépendante du temps. L'invariance par le flot géodésique $\varphi^s : (x,\xi) \mapsto (x+s\xi,\xi)$ et le fait que $\mu_t(\{\xi=0\}) = 0$ nous permettent alors de conclure que

$$\mu_t(x,\xi) = \int_{\mathbb{S}^1} \mu_0(dx',\xi).$$

Dans cet exemple particulier, la mesure μ_t est donc complètement déterminée par μ_0 et la projection sur $\mathbb{S}^1$ est aussi régulière que possible. Notons que, dans cet exemple particulier, $\mu_t(x,\xi)$ ne dépend *in fine* ni de t ni de x.

Faisons l'observation que l'on pourrait considérer la version semi-classique de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\partial_t v_\hbar = \left(-\frac{\hbar^2\Delta_g}{2} + \hbar^2 V\right) v_\hbar, \quad v_\hbar(t=0) = \psi_\hbar,$$

où nous rappelons que V ne dépend pas de t. Avec cette convention, le fait de considérer $u_\hbar(t)$ solution de (4) revient à se placer sur une échelle de temps semi-classique d'ordre $1/\hbar$. C'est bien entendu naturel mais on aurait pu aussi regarder une autre échelle $\tau_\hbar \to +\infty$. Les résultats obtenus sur la structure des mesures limites seraient alors différents. Nous nous contentons de dire que l'échelle $1/\hbar$ est en fait la taille critique jusqu'à laquelle on peut reconstruire la mesure au temps t à partir des données initiales pour les systèmes intégrables non dégénérés et nous renvoyons à l'article d'Anantharaman, Fermanian-Kammerer et Macià [3, § 6] pour une discussion plus détaillée sur ces aspects.

Finalement, notons que si les conditions initiales $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ vérifient l'équation des quasi-modes[(4)]

$$\left(-\frac{\hbar^2\Delta_g}{2} + \hbar^2 V\right)\psi_\hbar = \psi_\hbar + o(\hbar^2),$$

alors $\langle w_\hbar(t), a\rangle = \langle w_\hbar(0), a\rangle + o_t(1)$ pour toute a dans $\mathcal{C}_c^\infty(T^*M)$. Ainsi, la mesure limite vérifie $\mu_t = \mu_0$ pour presque tout t dans $\mathbb{R}$. En particulier, toute information obtenue à partir du cas non stationnaire nous permet de déduire des propriétés sur les mesures semi-classiques de quasi-modes. Même si la version dépendant du temps est légèrement plus précise, il est possible de déduire un grand nombre d'informations sur le problème non stationnaire à partir de l'étude des quasi-modes. Pour cet aspect du problème, nous renvoyons par exemple à l'article de Burq et Zworski qui établit un lien entre ces deux questions [14, Th. 4].

2.2. Le cas du disque

Concentrons-nous maintenant sur le cas de la dynamique de l'équation de Schrödinger sur le disque. Pour cela, il convient avant toute chose de fixer quelques notations. Le disque euclidien est défini comme suit

$$\mathbb{D} := \left\{z = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

L'équation qui nous intéresse est alors

$$\left\{\begin{array}{ll} i\partial_t u = \left(-\frac{\Delta}{2} + V\right) u, & t \in \mathbb{R}, \quad (x,y) \in \mathbb{D} \\ u(t=0) = \psi, & u\rceil_{\partial\mathbb{D}} = 0 \end{array}\right., \tag{7}$$

[(4)]De manière équivalente, on parle de solutions quasi-stationnaires de l'équation de Schrödinger.

où V appartient à $\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{R})$. Comme précédemment, on peut introduire les ensembles $\mathcal{M}_{\text{Schr}}$ et $\mathcal{N}_{\text{Schr}}$ associés à des suites de données initiales oscillantes et chercher à décrire leur régularité ainsi que leur dépendance par rapport aux conditions initiales. De nouveau, ce sont des mesures de probabilité dont le support le long de la variable x est inclus dans $\overline{\mathbb{D}}$.

Remarque 2.5. — Rappelons que le Laplacien s'écrit de la manière suivante en coordonnées polaires $(r, \vartheta) \in (0, 1] \times \mathbb{S}^1$:

$$\Delta u = \partial_r^2 u + r^{-1}\partial_r u + r^{-2}\partial_\vartheta^2 u.$$

En décomposant en série de Fourier le long de la variable angulaire, on trouve que les vecteurs propres sont de la forme

$$\psi_{n,k}^{\pm}(r, \vartheta) = e^{\pm in\vartheta} J_n(\alpha_{n,k} r),$$

où J_n est la n-ième fonction de Bessel et $(\alpha_{n,k})_{k\geq 1}$ la suite strictement croissante de ses zéros. Dans ce cas, on peut vérifier que $\alpha_{n,k}^2$ est la valeur propre correspondante du Laplacien de Dirichlet[(5)] $-\Delta_D$. Rappelons qu'un résultat classique de Siegel démontre que J_n et J_m n'ont pas de zéros communs (à l'exception de 0) dès que $n \neq m$.

La description des éléments de $\mathcal{M}_{\text{Schr}}$ en fonction des conditions initiales nécessite l'introduction d'un peu de formalisme. Nous nous limitons à ce stade de l'exposé à l'énoncé de quelques conséquences marquantes de ce résultat sur la régularité des éléments de $\mathcal{N}_{\text{Schr}}$. Rappelons-nous que les résultats s'appliquent notamment au cas des quasi-modes de $-\frac{\hbar^2\Delta}{2} + \hbar^2 V$ d'ordre $o(\hbar^2)$ pour lesquels $t \mapsto \nu_t$ est indépendant du temps – voir [4] pour une discussion détaillée de ce cas. Un premier résultat de régularité est le suivant :

Théorème 2.6 ([5]). — *Soit $t \mapsto \nu_t$ un élément de $\mathcal{N}_{Schr}$ sur $\overline{\mathbb{D}}$. Alors, il existe ϵ dans $[0, 1]$ tel que, pour presque tout t dans $\mathbb{R}$, on peut trouver une mesure de probabilité $\tilde{\nu}_t$ absolument continue vérifiant*[(6)]

$$\nu_t = \epsilon\tilde{\nu}_t + (1 - \epsilon)\frac{1}{2\pi}\delta_{\partial\mathbb{D}},$$

En particulier, $\nu_t\rceil_{\mathbb{D}}$ est absolument continue pour presque tout t dans $\mathbb{R}$.

Notons que ce théorème n'interdit pas que ν_t se concentre sur le bord $\partial\mathbb{D}$, *i.e.* le cas $\epsilon = 0$. À titre d'exemple, il suffit de considérer le cas où $V \equiv 0$ et la suite de vecteurs propres du Laplacien de Dirichlet $(\psi_{n,k}^+)_{n\geq 1}$ avec $k \geq 1$ fixé. Dans ce cas, on peut démontrer que la mesure limite est égale à $(2\pi)^{-1}\delta_{\partial\mathbb{D}}$ [5]. Notons tout de même que ce théorème exclut la possibilité qu'une suite de vecteurs propres se concentre le long d'une orbite fermée du flot du billard (à l'exception de la trajectoire au bord). Concernant le bord, nous pouvons mentionner le résultat suivant qui est aussi obtenu dans l'article [5] que nous présentons :

(5) Par la suite, on utilisera l'indice D pour rappeler la condition au bord.

(6) Ici, $\delta_{\partial\mathbb{D}}(r, \vartheta) := \delta_0(r - 1)$ est la mesure de Lebesgue le long du cercle de rayon $r = 1$ centré en 0.

Théorème 2.7 ([5]). — *Pour tout ouvert ω de $\overline{\mathbb{D}}$ intersectant $\partial\mathbb{D}$ et pour tout $T > 0$, il existe $C(T,\omega) > 0$ telle que, pour tout $t \mapsto \nu_t$ dans $\mathcal{N}_{Schr}$,*

$$\int_0^T \nu_t(\omega)dt \geq C(T,\omega).$$

Lorsque cette propriété est satisfaite, on dit que les solutions de l'équation de Schrödinger sont *observables* sur l'ouvert ω en tout temps $T > 0$. En d'autres termes, ceci signifie que, pour presque tout temps, la densité de probabilité quantique sur l'ouvert ω est strictement positive. Une nouvelle fois, l'hypothèse d'intersecter le bord est cruciale dans l'énoncé du théorème. Ce théorème est intimement lié à la question du contrôle de l'équation de Schrödinger que nous n'évoquons pas vraiment dans cet exposé pour nous concentrer plutôt sur la dynamique de l'équation de Schrödinger sans terme source (7). En plus de [5], nous renvoyons le lecteur aux articles de Lebeau [41] et de Burq et Zworski [14] pour plus de détails sur ces questions.

Ces deux théorèmes sont les analogues du théorème 1.1 dans le cas du disque et dans le cas dépendant du temps. Comme nous l'avons déjà dit, ce sont des conséquences plus ou moins simples d'un résultat de structure des éléments de $\mathcal{M}_{\mathrm{Schr}}$. Précisément, Anantharaman, Léautaud et Macià réussissent à déterminer complètement un élément $t \mapsto \mu_t$ en fonction de la suite de conditions initiales utilisées pour le générer. À partir de cette expression, il faut bien sûr travailler encore un peu pour déduire les propriétés de régularité que nous venons d'énoncer, *e.g.* utiliser des propriétés de prolongement unique. Dans la suite de ce texte, nous chercherons surtout à comprendre comment les éléments de $\mathcal{M}_{\mathrm{Schr}}$ peuvent être exprimés en fonction des données initiales, ce qui est en fait le coeur de l'analyse faite dans [5]. Nous renvoyons le lecteur à la section 7 de cette référence pour comprendre comment ce résultat de structure de $\mathcal{M}_{\mathrm{Schr}}$ implique les deux théorèmes que nous venons d'énoncer.

3. LE CAS DU TORE

Avant de décrire la structure des mesures semi-classiques μ_t sur le disque, commençons par nous intéresser à la structure des mesures semi-classiques dans le cas du tore euclidien $\mathbb{T}^2$ lorsque $V \equiv 0$. Ceci nous familiarisera avec les outils utilisés ainsi qu'avec la stratégie mise en œuvre dans ce type de démonstration. Ce modèle nous évite les problématiques liées à la présence du bord et nous permet de travailler avec un système complètement intégrable non dégénéré qui se présente directement sous une forme « action-angle ». Ce cas avait été traité par Macià dans [47] et nous reprenons ici sa démonstration en nous inspirant de la généralisation de ce résultat qu'il a donné en dimension $d \geq 2$ avec Anantharaman dans [6] – voir aussi [3, 50].

3.1. Structure des mesures semi-classiques

Afin d'énoncer un résultat de structure dans le cas du tore, nous avons besoin de fixer quelques conventions. On suppose dans toute cette section que $V \equiv 0$. On note $\mathcal{L}_1$ l'ensemble des sous-réseaux primitifs Λ de $\mathbb{Z}^2$ qui sont de rang 1. Ceci signifie que $\dim\langle\Lambda\rangle = 1$ et que $\langle\Lambda\rangle \cap \mathbb{Z}^2 = \Lambda$ où $\langle\Lambda\rangle$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par Λ. Pour chaque Λ dans $\mathcal{L}_1$, on fixe $\mathfrak{e}_\Lambda \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\mathbb{Z}\mathfrak{e}_\Lambda = \Lambda$. On note aussi $\mathfrak{e}_\Lambda^\perp$ l'élément de $\mathbb{Z}^2$ qui lui est directement orthogonal, L_Λ la longueur commune de ces deux vecteurs et $\Lambda^\perp = \mathbb{R}\mathfrak{e}_\Lambda^\perp$. Le flot géodésique sur le tore $\mathbb{T}^2$ s'écrit

$$\varphi^s : (x,\xi) \in T^*\mathbb{T}^2 \mapsto (x + s\xi, \xi) \in T^*\mathbb{T}^2,$$

qui est périodique dans chacune des directions $\Lambda^\perp - \{0\}$. Par contraste, si ξ appartient à

$$\Omega_2 := \mathbb{R}^2 \backslash \left(\bigcup_{\Lambda \in \mathcal{L}_1} \Lambda^\perp \right),$$

alors, pour toute a dans $\mathcal{C}_c^\infty(T^*\mathbb{T}^2)$, on a

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T a \circ \varphi^s(x,\xi) ds = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} a(x',\xi) dx'.$$

Remarquons que chacun des $\mathbb{T}^2 \times \Lambda^\perp - \{0\}$ est feuilleté par des tores invariants de dimension 1 (les géodésiques périodiques) et $\mathbb{T}^2 \times \Omega_2$ est quant à lui feuilleté par des tores invariants de dimension 2. Ce sont les *tores invariants* du sytème complètement intégrable sur $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Fixons maintenant un élément $t \mapsto \mu_t$ dans $\mathcal{M}_{\mathrm{Schr}}$. Comme μ_t ne charge pas $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$, décomposons-le selon les sous-ensembles invariants que nous venons juste d'introduire :

$$\mu_t = \mu_t \rceil_{\mathbb{T}^2 \times \Omega_2} + \sum_{\Lambda \in \mathcal{L}_1} \mu_t \rceil_{\mathbb{T}^2 \times \Lambda^\perp - \{0\}}. \tag{8}$$

Écrivons aussi la décomposition de Fourier de cette mesure :

$$\mu_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \widehat{\mu}_{k,t}(\xi) \frac{e^{ik.x}}{(2\pi)^2}.$$

En utilisant l'invariance de μ_t par le flot géodésique, μ_t peut alors se récrire

$$\mu_t = \widehat{\mu}_{0,t} \rceil_{\mathbb{T}^2 \times \Omega_2} + \sum_{\Lambda \in \mathcal{L}_1} \mathcal{I}_\Lambda(\mu_t) \rceil_{\mathbb{T}^2 \times \Lambda^\perp - \{0\}}, \tag{9}$$

où

$$\mathcal{I}_\Lambda(\mu_t) = \sum_{k \in \Lambda} \widehat{\mu}_{k,t}(\xi) \frac{e^{ik.x}}{(2\pi)^2}.$$

On peut vérifier que, pour presque tout t dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{I}_\Lambda(\mu_t)$ est encore une mesure positive.

Fixons maintenant $a(\xi)$ appartenant à $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. On peut faire le même calcul que sur le cercle :

$$\frac{d}{dt}\langle u_\hbar(t), \mathrm{Op}_\hbar^w(a) u_\hbar(t)\rangle = i \left\langle u_\hbar(t), \left[-\frac{\Delta}{2}, \mathrm{Op}_\hbar^w(a(\xi))\right] u_\hbar(t) \right\rangle = 0, \tag{10}$$

où la seconde égalité vient du théorème de composition pour la quantification de Weyl [70, Chap. 4].

Remarque 3.1. — Remarquons qu'on fait ici un choix particulier de quantification en choisissant d'utiliser la quantification de Weyl $\mathrm{Op}_\hbar^w$. On aurait aussi pu utiliser la quantification standard $\mathrm{Op}_\hbar$ et le calcul précédent resterait vrai. En revanche, les choix de quantification vont affecter en un certain sens les objets 2-microlocaux que nous allons introduire dans un instant. Par exemple, l'énoncé du théorème 3.2 ci-dessous dépend implicitement du choix de quantification et un autre choix mènerait à une formulation légèrement différente.

De (10), on déduit que le mode de Fourier d'indice 0 est indépendant de t dans $\mathbb{R}$. Ainsi, pour a dans $\mathcal{C}_c^\infty(T^*\mathbb{T}^2)$ et pour presque tout t dans $\mathbb{R}$, on trouve finalement(7)

$$\begin{aligned}\int_{T^*\mathbb{T}^2} a(x,\xi)d\mu_t(x,\xi) &= \int_{T^*\mathbb{T}^2}\left(\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2} a(x',\xi)dx'\right)d\mu_0(x,\xi)\\ &+ \sum_{\Lambda\in\mathcal{L}_1}\int_{\mathbb{T}^2\times\Lambda^\perp}\mathring{\mathcal{I}}_\Lambda(a)d\mu_t(x,\xi),\end{aligned}$$

où

$$\mathring{\mathcal{I}}_\Lambda(a)(x,\xi) := \sum_{k\in\Lambda-\{0\}}\widehat{a}_k(\xi)\frac{e^{ik.x}}{2\pi}.$$

Il nous suffit donc de déterminer la restriction de μ_t le long des orbites périodiques du flot géodésique. Pour cela, on analysera précisément la structure des solutions de l'équation de Schrödinger au voisinage de chacun des sous ensembles $\mathbb{T}^2\times\Lambda^\perp-\{0\}$ et on définit la généralisation suivante des distributions de Wigner :

$$\tilde{w}_{\Lambda,\hbar} : a\in\mathcal{C}_c^\infty(T^*\mathbb{T}^2\times\mathbb{R})\mapsto\left\langle\psi_\hbar, \mathrm{Op}_\hbar^w\left(\mathring{\mathcal{I}}_\Lambda(a)\left(x,\xi,\frac{\langle\xi,\mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda\hbar}\right)\right)\psi_\hbar\right\rangle_{L^2}.$$

Ces nouvelles familles de distributions mesurent la façon dont les données initiales se concentrent dans un voisinage de taille $\hbar$ de $\Lambda^\perp$ et on dit qu'on effectue une *seconde microlocalisation* le long de la sous-variété $\mathbb{T}^2\times\Lambda^\perp$. De nouveau, quitte à extraire via un procédé diagonal, on peut supposer que, pour tout Λ dans $\mathcal{L}_1$, la suite de distributions $(\tilde{w}_{\Lambda,\hbar})_{\hbar\to0^+}$ converge vers une certaine limite $\tilde{\mu}_{\Lambda,0}$ dont on peut écrire la décomposition de Fourier

$$\tilde{\mu}_{\Lambda,0}(x,\xi,\eta) = \sum_{k\in\Lambda-\{0\}}\widehat{\mu}_k^0(\xi,\eta)\frac{e^{ik.x}}{2\pi}.$$

On parle de *mesures 2-microlocales*. Ce type de raffinement des mesures semi-classiques a été introduit par Fermanian-Kammerer [23], Miller [53] et Nier [54] et ces objets joueront un rôle crucial dans l'analyse à venir. Notons que, grâce à [57, Th. 4.8.1], on sait que $\widehat{\mu}_k^0(\xi,\eta)$ est une mesure de Radon finie même si $\tilde{\mu}_{\Lambda,0}$ n'en est pas une *a priori*. Nous pouvons maintenant formuler le théorème de structure dans le cas du tore :

(7) On peut remplacer l'intégrale sur $\Lambda^\perp-\{0\}$ par une intégrale sur $\Lambda^\perp$ grâce à l'hypothèse (6).

Théorème 3.2 ([47, 6]). — *Supposons que $V \equiv 0$ et que $d = 2$. Alors, pour tout $t \mapsto \mu_t$ dans $\mathcal{M}_{Schr}$, on a*

$$\begin{aligned}\int_{T^*\mathbb{T}^2} a(x,\xi)d\mu_t(x,\xi) &= \int_{T^*\mathbb{T}^2} \left(\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2} a(x',\xi)dx'\right) d\mu_0(x,\xi) \\ &+ \sum_{\Lambda\in\mathcal{L}_1} \int_{T^*\mathbb{T}^2\times\mathbb{R}} a\left(x + t\eta\frac{\mathfrak{e}_\Lambda}{L_\Lambda},\xi\right) d\tilde{\mu}_{\Lambda,0}(x,\xi,\eta),\end{aligned}$$

où μ_0 et $(\tilde{\mu}_{\Lambda,0})_{\Lambda\in\mathcal{L}_1}$ sont les distributions associées à la suite de données initiales $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$ utilisée pour générer μ_t.

Ce théorème permet donc de déterminer complètement μ_t à partir des conditions initiales en faisant intervenir à la fois la mesure semi-classique de la suite de données initiales et ces mesures 2-microlocales qui quantifient la concentration des données initiales dans un voisinage de taille $\hbar$ des orbites périodiques du flot géodésique. Notons en particulier que la seule connaissance de μ_0 ne permet pas de déterminer μ_t – voir [46, Prop. 11] pour un exemple explicite. Ce résultat s'étend à des potentiels assez généraux et aussi en dimension $d \geq 3$. Maintenant que nous avons cette description complète de μ_t, la question de la régularité en x consiste à comprendre la régularité en x des $(\tilde{\mu}_{\Lambda,0}(x + t\mathfrak{e}_\Lambda/L_\Lambda,\xi,\eta))_{\Lambda\in\mathcal{L}_1}$. À titre d'illustration, nous verrons au paragraphe 3.5 que l'on a la propriété suivante :

Corollaire 3.3. — *Supposons que $V \equiv 0$ et que $d = 2$. Alors, pour tout $t \mapsto \nu_t$ dans $\mathcal{N}_{Schr}$ et pour presque tout t dans $\mathbb{R}$, ν_t appartient à $L^1(\mathbb{T}^2)$. En d'autres termes, la mesure est absolument continue.*

En particulier, ceci implique la partie 1 du théorème 1.1 lorsque $V \equiv 0$ et $d = 2$. De nouveau, ce résultat reste vrai pour des tores de dimension $d \geq 3$ et des potentiels plus généraux. Ce type de stratégie permet aussi de traiter le cas de systèmes complètement intégrables dont l'hamiltonien est une fonction strictement convexe des variables d'action [3]. Dans le cas du disque, l'objectif est de mettre en place la même stratégie que sur le tore mais cette fois-ci, plusieurs difficultés vont s'ajouter : le système ne se présente pas directement dans un système de coordonnées action-angle et les conditions aux bords s'expriment mal dans ces coordonnées.

3.2. Seconde microlocalisation le long des tores d'orbites périodiques

Démontrons maintenant ce théorème de structure sur le tore. Nous avons vu précédemment que tout revenait à comprendre la structure des mesures semi-classiques le long des orbites périodiques $\mathbb{T}^2 \times (\Lambda^\perp - \{0\})$. L'invariance par le flot géodésique nous a aussi permis de réduire la question à l'analyse des mesures

$$a \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*\mathbb{T}^2) \mapsto \int_{\mathbb{T}^2\times\Lambda^\perp} \mathring{\mathcal{I}}_\Lambda(a)d\mu_t(x,\xi).$$

En d'autres termes, nous ne devons nous soucier que des coefficients de Fourier le long du sous-réseau Λ. Pour Λ dans $\mathcal{L}_1$, nous introduisons donc

$$w_{\hbar,\Lambda}(t) : a \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*\mathbb{T}^2 \times \widehat{\mathbb{R}}) \mapsto \left\langle u_\hbar(t), \mathrm{Op}_\hbar^w \left(\mathring{\mathcal{I}}_\Lambda(a) \left(x, \xi, \frac{\langle \xi, \mathfrak{e}_\Lambda \rangle}{L_\Lambda \hbar} \right) \right) u_\hbar(t) \right\rangle_{L^2},$$

où $u_\hbar(t)$ est la solution de l'équation (4).

Remarque 3.4. — On note $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \simeq [-1, 1]$ et on se servira des propriétés classiques des opérateurs pseudo-différentiels que l'on peut par exemple retrouver dans [70, Ch. 4 et 5].

D'une certaine manière, le fait d'introduire cette nouvelle variable $\frac{\langle \xi, \mathfrak{e}_\Lambda \rangle}{L_\Lambda \hbar}$ dans la distribution de Wigner nous permet de zoomer sur ce qui se passe à une distance $\hbar$ de l'ensemble $\mathbb{T}^2 \times \Lambda^\perp$ qui nous intéresse. On parle de *seconde microlocalisation* le long de la sous-variété $\mathbb{T}^2 \times \Lambda^\perp$ et nous allons voir que l'analyse de la structure de ces nouveaux objets est possible. En particulier, on pourra les déterminer complètement en fonction de la suite de conditions initiales, *i.e.* de $\tilde{\mu}_{\Lambda,0}$.

Expliquons brièvement comment extraire des sous-suites de ces nouvelles distributions. En utilisant le théorème de Calderón-Vaillancourt [70, Th. 5.5], on peut vérifier que $t \mapsto w_{\hbar,\Lambda}(t)$ est une suite bornée dans $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{C}^l(T^*\mathbb{T}^2 \times \widehat{\mathbb{R}}))'$ pour un l assez grand. Ainsi, quitte à faire une extraction diagonale, on peut supposer que, pour tout Λ dans $\mathcal{L}_1$, pour toute a dans $\mathcal{C}_c^\infty(T^*\mathbb{T}^2 \times \widehat{\mathbb{R}})$ et pour tout θ dans $L^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\hbar \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \theta(t) \langle w_{\hbar,\Lambda}(t), a \rangle dt = \int_{\mathbb{R}} \theta(t) \langle \mu_\Lambda(t), a \rangle dt,$$

où $\mu_\Lambda(t)$ appartient à $\mathcal{C}^l(T^*\mathbb{T}^2 \times \widehat{\mathbb{R}})'$ pour presque tout t dans $\mathbb{R}$. Écrivons maintenant la décomposition de Fourier de a :

$$\int_{\mathbb{R}} \theta(t) \langle \mu_\Lambda(t), a \rangle dt = \sum_{k \in \Lambda - \{0\}} \int_{\mathbb{R}} \theta(t) \left\langle \mu_\Lambda(t), \frac{e^{ik.x}}{2\pi} \widehat{a}_k(\xi, \eta) \right\rangle dt.$$

En utilisant [57, Th. 4.8.1], on vérifie que, pour tout $a \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2 \times \widehat{\mathbb{R}})$ et pour tout θ dans $L^1(\mathbb{R})$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \theta(t) \left\langle \mu_\Lambda(t), \frac{e^{ik.x}}{2\pi} a(\xi, \eta) \right\rangle dt \right| \leq C \|k\|^3 \int_{\mathbb{R}} |\theta(t)| \, \|a\|_{\mathcal{C}^0},$$

pour une certaine constante $C > 0$ indépendante de a et de k. Ainsi, pour presque tout t dans $\mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{T}^2} \frac{e^{ik.x}}{2\pi} \mu_\Lambda(t, dx, \xi, \eta)$ est une mesure de Radon finie sur $\mathbb{R}^2 \times \widehat{\mathbb{R}}$ et on peut prendre sa restriction à $\mathbb{T}^2 \times \Lambda^\perp \times \mathbb{R}$ et à $\mathbb{T}^2 \times \Lambda^\perp \times \{\pm\infty\}$. On les note respectivement $\widehat{\mu}_{\Lambda,-k}(t)$ et $\widehat{\mu}^{\Lambda,-k}(t)$.

Relions maintenant ces quantités à celles qui nous intéressent originellement, i.e. $\mathring{\mathcal{I}}_\Lambda(\mu_t)$. On a, pour toute a dans $\mathcal{C}_c^\infty(T^*\mathbb{T}^2)$ et pour tout θ dans $L^1(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \theta(t) \left(\int_{\mathbb{T}^2\times\Lambda^\perp} \mathring{\mathcal{I}}_\Lambda(a)(x,\xi)\mu_t(dx,d\xi) \right) dt &= \sum_{k\in\Lambda-\{0\}} \int_{\mathbb{R}} \theta(t) \left\langle \widehat{\mu}_{\Lambda,-k}(t), \widehat{a}_k(\xi) \right\rangle dt \\ &+ \sum_{k\in\Lambda-\{0\}} \int_{\mathbb{R}} \theta(t) \left\langle \widehat{\mu}^{\Lambda,-k}(t), \widehat{a}_k(\xi) \right\rangle dt.\end{aligned}$$

Nous allons maintenant séparer l'analyse de la partie à l'infini $\widehat{\mu}^{\Lambda,-k}(t,\xi,\eta)$ de la partie compacte $\widehat{\mu}_{\Lambda,-k}(t,\xi,\eta)$. Dans le premier cas, nous montrerons que cette quantité est nulle car nous pourrons en quelque sorte faire marcher l'argument qui permet de montrer l'invariance des mesures semi-classiques par le flot géodésique. L'idée heuristique est la suivante. On a seulement besoin de tester la distribution à l'infini contre des fonctions test ayant leurs coefficients de Fourier le long de Λ. Or, lorsqu'on regarde la partie à l'infini dans la seconde microlocalisation, on a coupé les co-vecteurs ξ qui sont à une distance $\leq R\hbar$ de $\Lambda^\perp$ (avec R grand). Ainsi, lorsqu'on écrit le théorème d'Egorov sur des échelles de temps semi-classiques $\hbar^{-1}$, on réussit à montrer l'équidistribution en x. Pour $\widehat{\mu}_{\Lambda,-k}(t)$, on reprend le même argument mais cette fois les co-vecteurs sont à une distance d'ordre $\hbar$ et on n'a plus ce phénomène de régularisation en x par le flot géodésique. À la place, nous vérifierons que la distribution est déterminée par une certaine équation de transport. Dans les deux cas, le principe de démonstration consiste à revisiter la démonstration que nous avons donnée pour l'invariance des μ_t par le flot géodésique et à essayer d'en tirer le maximum d'informations.

Remarque 3.5. — Notons que l'on peut faire la même extraction pour le problème indépendant du temps associé à la suite de données intiales $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0^+}$. De cette manière, on définit $\mu_\Lambda(0)$, $\widehat{\mu}^{\Lambda,-k}(0)$ et $\widehat{\mu}_{\Lambda,-k}(0)$ pour tout Λ dans $\mathcal{L}_1$ et pour tout k dans $\Lambda-\{0\}$. Observons aussi que $\widehat{\mu}_{\Lambda,-k}(0)$ coïncide avec la mesure $\widehat{\mu}^0_{-k}$ définie plus haut.

3.3. Analyse de la partie à l'infini

Fixons k dans $\Lambda-\{0\}$ et commençons par démontrer que $\widehat{\mu}^{\Lambda,-k}(t)$ est nulle pour presque tout t dans $\mathbb{R}$. Il suffit donc de vérifier que

$$\int_{T^*\mathbb{T}^2\times\{\pm\infty\}} a(\xi,\eta)e^{ik.x}\mu_\Lambda(t,dx,d\xi,d\eta) = 0.$$

Pour cela, on fixe une fonction $\tilde{\chi}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ qui est égale à 1 pour $\eta\geq 2$ et à 0 pour $\eta\leq 1$. On pose alors $a^R(x,\xi,\eta)=\tilde{\chi}_R(\eta)a(\xi,\eta)e^{ik.x}$ où $\chi_R(\eta)=\chi(\eta/R)$ et on écrit (11)

$$\frac{d}{dt}\left\langle w_{\Lambda,\hbar}(t), \frac{a^R(x,\xi,\eta)}{\eta} \right\rangle = i\left\langle u_\hbar(t), \left[-\frac{\Delta}{2}, \mathrm{Op}_\hbar^w\left(\frac{L_\Lambda\hbar}{\langle\xi,\mathfrak{e}_\Lambda\rangle} a^R\left(x,\xi,\frac{\langle\xi,\mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda\hbar}\right)\right)\right] u_\hbar(t)\right\rangle.$$

En utilisant le théorème de composition pour les opérateurs pseudo-différentiels [70, Th. 4.14], ceci se récrit :

$$\frac{d}{dt}\left\langle w_{\Lambda,\hbar}(t), \frac{a^R(x,\xi,\eta)}{\eta}\right\rangle = \frac{1}{\hbar}\left\langle u_\hbar(t), \mathrm{Op}_\hbar^w\left(\frac{L_\Lambda \hbar}{\langle \xi, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}\xi.\partial_x a^R\left(x,\xi,\frac{\langle \xi, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda\hbar}\right)\right) u_\hbar(t)\right\rangle.$$

Observons que la formule précédente est exacte car nous utilisons la quantification de Weyl. En utilisant l'expression de a^R, on a alors

$$\frac{d}{dt}\left\langle w_{\Lambda,\hbar}(t), \frac{a^R(x,\xi,\eta)}{\eta}\right\rangle = i\frac{\langle k, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda}\left\langle u_\hbar(t), \mathrm{Op}_\hbar^w\left(a^R\left(x,\xi,\frac{\langle \xi, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda\hbar}\right)\right) u_\hbar(t)\right\rangle.$$

On intègre alors contre une fonction θ dans $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ et on trouve

$$\frac{\langle k, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda}\int_{\mathbb{R}}\theta(t)\langle \mu_\Lambda(t), a^R\rangle dt = \lim_{\hbar\to 0^+} i\int_{\mathbb{R}}\theta'(t)\left\langle w_{\Lambda,\hbar}(t), \frac{a^R(x,\xi,\eta)}{\eta}\right\rangle dt.$$

Une nouvelle application du théorème de Calderón-Vaillancourt nous permet vérifier que le terme de droite est un $\mathcal{O}(R^{-1})$. Ainsi, en faisant tendre R vers $+\infty$, on trouve finalement que

$$\forall k\in\Lambda-\{0\},\quad \int_{\mathbb{R}}\theta(t)\left(\int_{T^*\mathbb{T}^2\times\{+\infty\}} a(x,\eta)e^{ik.x}\mu_\Lambda(t,dx,d\xi,d\eta)\right)dt = 0.$$

Ceci étant valable pour toute fonction θ dans $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ et pour toute a dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2\times\widehat{\mathbb{R}})$, on peut conclure que $\widehat{\mu}^{\Lambda,-k}(t)\rceil_{\Lambda^\perp\times\{+\infty\}}\equiv 0$. Le même argument étant valable pour la partie en $-\infty$, on conclut donc

$$\int_{\mathbb{T}^2\times\Lambda^\perp}\mathring{\mathcal{I}}_\Lambda(a)d\mu_t(x,\xi) = \sum_{k\in\Lambda-\{0\}}\int_{\Lambda^\perp\times\mathbb{R}}\widehat{a}_k(\xi,\eta)d\widehat{\mu}_{\Lambda,-k}(t,\xi,\eta),$$

où le membre de gauche est la quantité que l'on doit calculer pour conclure la preuve du théorème.

Remarque 3.6. — Nous avons déjà soulevé l'importance du choix de quantification dans notre seconde microlocalisation. Ici, ce choix ne changerait pas notre conclusion. En effet, si nous remplacions $\mathrm{Op}_\hbar^w$ par $\mathrm{Op}_\hbar$, nous trouverions

$$\frac{d}{dt}\left\langle w_{\Lambda,\hbar}(t), \frac{a^R(x,\xi,\eta)}{\eta}\right\rangle = i\frac{\langle k, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda}\left\langle u_\hbar(t), \mathrm{Op}_\hbar\left(a^R\left(x,\xi,\frac{\langle \xi, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda\hbar}\right)\right) u_\hbar(t)\right\rangle + \mathcal{O}_k(R^{-1}),$$

qui nous mènerait au même résultat *in fine*.

3.4. Transport de la partie « compacte »

Pour conclure, nous allons donc déterminer $\widehat{\mu}_{\Lambda,-k}(t)$ en fonction de $\widehat{\mu}_{\Lambda,-k}(0)$. Pour cela, nous allons vérifier que $\widehat{\mu}_{\Lambda,-k}(t)$ vérifie une équation de transport linéaire pour tout k dans $\Lambda-\{0\}$. Fixons $a_k(x,\eta)=e^{ik.x}a(\xi,\eta)$ dans $\mathcal{C}_c^\infty(T^*\mathbb{T}^2\times\mathbb{R})$ et écrivons

$$\frac{d}{dt}\langle w_{\Lambda,\hbar}(t), a_k\rangle = i\left\langle u_\hbar(t), \left[-\frac{\Delta}{2}, \mathrm{Op}_\hbar^w\left(e^{ik.x}a\left(\xi,\frac{\langle \xi, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda\hbar}\right)\right)\right] u_\hbar(t)\right\rangle.$$

Une nouvelle application du théorème de composition pour les opérateurs pseudo-différentiels nous donne

$$\frac{d}{dt}\langle w_{\Lambda,\hbar}(t), a_k\rangle = i\frac{\langle k, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda}\left\langle u_\hbar(t), \mathrm{Op}_\hbar^w\left(\frac{\langle \xi, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda \hbar} a_k\left(x, \xi, \frac{\langle \xi, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda \hbar}\right)\right) u_\hbar(t)\right\rangle.$$

On intègre cette expression contre une fonction test dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et on obtient, après passage à la limite $\hbar \to 0^+$,

$$-\int_{\mathbb{R}} \theta'(t)\langle \widehat{\mu}_{\Lambda,-k}(t), a\rangle dt = i\frac{\langle k, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda}\int_{\mathbb{R}} \theta(t)\left\langle \widehat{\mu}_{\Lambda,k}(t), \eta a(\xi, \eta)\right\rangle dt,$$

qui est l'équation de transport attendue. Ceci nous permet de relier $\widehat{\mu}_{\Lambda,-k}(t)$ à $\widehat{\mu}_{\Lambda,-k}(0)$ et donc de conclure la preuve du théorème de structure des mesures semi-classiques dans le cas du tore.

Remarque 3.7. — Pour cette partie de l'argument, le choix de quantification affecte l'équation de transport que nous dérivons (ainsi que les conditions initiales). En reprenant le calcul précédent, nous trouverions

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}} \theta'(t)\langle \widehat{\mu}_{\Lambda,-k}(t), a\rangle dt &= i\frac{\langle k, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda}\int_{\mathbb{R}} \theta(t)\left\langle \widehat{\mu}_{\Lambda,-k}(t), \eta a(\xi, \eta)\right\rangle dt \\ &+ \frac{i}{2}\left(\frac{\langle k, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda}\right)^2\int_{\mathbb{R}} \theta(t)\left\langle \widehat{\mu}_{\Lambda,-k}(t), a(\xi, \eta)\right\rangle dt. \end{aligned}$$

De manière compacte, plutôt qu'une équation de transport, on obtient, pour la partie compacte le long de Λ,

$$\frac{1}{i}\partial_t \widehat{\mu}_\Lambda = i\eta\left(\frac{\mathfrak{e}_\Lambda}{L_\Lambda}.\partial_x\right)\widehat{\mu}_\Lambda - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{e}_\Lambda}{L_\Lambda}.\partial_x\right)^2\widehat{\mu}_\Lambda.$$

L'expression est différente de celle obtenue via la quantification de Weyl mais il faut se rappeler que la donnée initiale est aussi affectée par le changement de quantification. En considérant ces objets comme des mesures à valeurs opérateur[(8)], cette légère différence de formulation disparaîtrait *in fine*.

3.5. Régularité en x

Nous voulons maintenant vérifier que les éléments de $\mathcal{N}_{\mathrm{Schr}}$ sont réguliers en x, *i.e.* $\nu_t(x) \in L^1(\mathbb{T}^2)$ pour presque tout t dans $\mathbb{R}$ (corollaire 3.3). D'après le théorème 3.2, il suffit d'étudier les contributions dues aux tores d'orbites périodiques. Par ailleurs, l'hypothèse de localisation en fréquence (5) nous permet de réduire la question au cas d'observables $a(x, \xi, \eta) \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})$ ne dépendant pas de la variable ξ. Fixons maintenant $R > 0$ et une fonction χ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ qui est égale à 1 sur $[-1, 1]$ et à

[(8)] C'est notamment le bon point de vue si on veut traiter le cas où V est non nul.

0 en dehors de $[-2,2]$. La régularité en x revient à comprendre les points d'accumulation (lorsque $\hbar \to 0^+$ puis $R \to +\infty$) de la quantité suivante, pour $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$,

$$\langle w_{\Lambda,\hbar,R}(t), a\rangle = \left\langle \psi_\hbar, \mathrm{Op}_\hbar^w \left(\mathring{\mathcal{I}}_\Lambda(a) \left(x + t\frac{\langle \xi, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda \hbar} \frac{\mathfrak{e}_\Lambda}{L_\Lambda}\right) \chi^2 \left(\frac{\langle \xi, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{R L_\Lambda \hbar}\right)\right) \psi_\hbar \right\rangle,$$

qui, grâce au théorème d'Egorov, s'écrit aussi

$$\langle w_{\Lambda,\hbar,R}(t), a\rangle = \left\langle e^{it\frac{D_\Lambda^2}{2}} \psi_\hbar, \mathrm{Op}_{R^{-1}}^w \left(\mathring{\mathcal{I}}_\Lambda(a)\,(x)\, \chi^2 \left(\frac{\langle \xi, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda}\right)\right) e^{it\frac{D_\Lambda^2}{2}} \psi_\hbar \right\rangle,$$

où $D_\Lambda := \frac{\langle -i\partial_x, \mathfrak{e}_\Lambda\rangle}{L_\Lambda}$. En utilisant les règles de composition pour le calcul pseudo-différentiel, cette quantité se récrit encore

$$\langle w_{\Lambda,\hbar,R}(t), a\rangle = \int_{\mathbb{T}^2} \mathring{\mathcal{I}}_\Lambda(a) \left| \chi\left(R^{-1} D_\Lambda\right) e^{it\frac{D_\Lambda^2}{2}} \psi_\hbar \right|^2 dx + \mathcal{O}_a(R^{-1}).$$

Autrement dit, pour comprendre la régularité en x des mesures semi-classiques, il suffit de décrire la régularité en x des points d'accumulation de la suite de mesures définies par

$$\langle \nu_{\Lambda,\hbar,R}(t), a\rangle := \int_{\mathbb{T}^2} \mathring{\mathcal{I}}_\Lambda(a) \left| e^{it\frac{D_\Lambda^2}{2}} \chi\left(R^{-1} D_\Lambda\right) \psi_\hbar \right|^2 dx.$$

Pour conclure, il est utile de se placer dans un système de coordonnées adaptées au tore d'orbites périodiques qui nous intéresse. On introduit les deux tores de dimension 1 :

$$\mathbb{T}_{\langle\Lambda\rangle} := \langle \Lambda\rangle/(2\pi\Lambda) \quad \text{et} \quad \mathbb{T}_{\Lambda^\perp} := \Lambda^\perp/2\pi(\mathbb{Z}^2 \cap \Lambda^\perp).$$

Leur produit $\mathbb{T}_{\langle\Lambda\rangle} \times \mathbb{T}_{\Lambda^\perp}$ (vu comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$) contient L_Λ^2 copies du tore $\mathbb{T}^2$. Ceci nous permet alors de séparer les variables comme suit :

$$\langle \nu_{\Lambda,\hbar,R}(t), a\rangle = \frac{1}{L_\Lambda^2} \int_{\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}} \left(\int_{\mathbb{T}_{\langle\Lambda\rangle}} \mathring{\mathcal{I}}_\Lambda(a)(s_1) \left| e^{it\frac{D_\Lambda^2}{2}} \chi\left(R^{-1} D_\Lambda\right) \psi_\hbar(s_1, s_2) \right|^2 ds_1 \right) ds_2.$$

Ainsi, modulo l'intégration le long de $\mathbb{T}_{\Lambda^\perp}$, nous avons d'une certaine manière réduit le problème d'une dimension. La démonstration du corollaire 3.3 devient alors une conséquence du lemme suivant qui est une variante d'un résultat dû à Zygmund [71] :

Lemme 3.8. — *Pour tout Λ dans $\mathcal{L}_1$ et pour tout ψ dans $L^2(\mathbb{T}^2)$,*

$$\int_0^{2\pi L_\Lambda} \left(\int_0^{4\pi L_\Lambda^2} \int_0^{2\pi L_\Lambda} \left| e^{it\frac{D_\Lambda^2}{2}} \psi(s_1, s_2)\right|^4 ds_1 dt \right)^{\frac{1}{2}} ds_2 \leq 8\pi^2 L_\Lambda^{\frac{5}{2}} \|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)},$$

où $(s_1, s_2, t) \in \mathbb{T}_{\langle\Lambda\rangle} \times \mathbb{T}_{\Lambda^\perp} \times \mathbb{R}/(4\pi L_\Lambda^2)$.

En appliquant Cauchy-Schwarz, ce lemme nous permet de montrer que tout point d'accumulation de $(\nu_{\Lambda,\hbar,R})_{\hbar\to 0^+, R\to+\infty}$ est dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^2)$. Par conséquent, en utilisant le théorème 3.2, on peut finalement vérifier que, pour tout ν dans $\mathcal{N}(\infty)$, ν_t appartient à $L^1(\mathbb{T}^2)$ pour presque tout t dans $\mathbb{R}$. L'utilisation de ce lemme n'est pas essentielle pour conclure au caractère L^1 de la limite [6] mais il permet d'illustrer simplement l'utilité des techniques d'analyse harmonique quand il s'agit des questions de régularité.

En effet, l'argument général de [6] permet *a priori* de conclure au caractère L^1 pour la contribution de chaque tore d'orbites périodiques alors qu'ici on a obtenu une régularité L^2 grâce au lemme 3.8. Insistons sur le fait que cette régularité L^2 est spécifique aux tores invariants de dimension $\geq d-1$ du système complètement intégrable(9) et au potentiel $V \equiv 0$. Pour des tores invariants de dimension $< d-1$ et pour des potentiels généraux, on aurait seulement une régularité L^1 en suivant les arguments généraux [6] – voir tout de même [1] pour des généralisations de cet argument d'analyse harmonique en dimension supérieure.

Même si elle est relativement classique, rappelons la démonstration du lemme 3.8 car elle est courte et instructive. On commence par écrire $e^{it\frac{D_\Lambda^2}{2}}\psi$ dans le système de coordoonées adaptées $(s_1, s_2, t) \in \mathbb{T}_{\langle\Lambda\rangle} \times \mathbb{T}_{\Lambda^\perp} \times \mathbb{R}/(4\pi L_\Lambda^2)$:

$$e^{it\frac{D_\Lambda^2}{2}}\psi(s_1,s_2) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n:\langle n,\mathfrak{e}_\Lambda\rangle = l} \widehat{\psi}(n) e^{i\frac{s_2}{L_\Lambda}\langle n,\mathfrak{e}_\Lambda^\perp\rangle} \right) e^{i\frac{ls_1}{L_\Lambda}} e^{i\frac{l^2 t}{2L_\Lambda^2}} =: \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(l,s_2) e^{i\frac{ls_1}{L_\Lambda}} e^{i\frac{l^2 t}{2L_\Lambda^2}}.$$

À ce stade de la récriture, l'idée de Zygmund est d'utiliser l'égalité de Plancherel appliquée à $|e^{it\frac{D_\Lambda^2}{2}}\psi|^2$ pour les variables (s_1, t). Pour cela, on écrit

$$\left| e^{it\frac{D_\Lambda^2}{2}}\psi(s_1,s_2) \right|^2 = \sum_{l,m\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(l,s_2)\overline{\widehat{\psi}(m,s_2)} e^{i\frac{(l-m)s_1}{L_\Lambda}} e^{i\frac{(l^2-m^2)t}{2L_\Lambda^2}}.$$

Observons maintenant que, pour $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, l'équation diophantienne

$$l - m = k_1 \quad \text{et} \quad l^2 - m^2 = k_2$$

a au plus une solution si $k_1 \neq 0$ et une infinité de solutions si $(k_1, k_2) = (0, 0)$. En utilisant Plancherel, on a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi^2 L_\Lambda^3} \int_0^{4\pi L_\Lambda^2} \int_0^{2\pi L_\Lambda} \left| e^{it\frac{D_\Lambda^2}{2}}\psi(s_1,s_2) \right|^4 ds_1 dt &\leq \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(l,s_2)|^2 \right|^2 + \sum_{l,m\in\mathbb{Z}^2} |\widehat{\psi}(l,s_2)|^2 |\widehat{\psi}(m,s_2)|^2 \\ &\leq 2 \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(l,s_2)|^2 \right|^2. \end{aligned}$$

On va maintenant intégrer par rapport à la variable s_2 et, en utilisant une nouvelle fois Plancherel, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi L_\Lambda} \left(\frac{1}{8\pi^2 L_\Lambda^3} \int_0^{4\pi L_\Lambda^2} \int_0^{2\pi L_\Lambda} \left| e^{it\frac{D_\Lambda^2}{2}}\psi \right|^4 ds_1 dt \right)^{\frac{1}{2}} ds_2 &\leq \sqrt{2} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi L_\Lambda} |\widehat{\psi}(l,s_2)|^2 ds_2 \\ &\leq 2\sqrt{2}\pi L_\Lambda \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{n:\langle n,\mathfrak{e}_\Lambda\rangle = l} |\widehat{\psi}(n)|^2, \end{aligned}$$

qui termine la démonstration du lemme 3.8.

(9) Pour les tores de dimension d, la mesure est constante en x.

4. STRUCTURE DES MESURES SEMI-CLASSIQUES SUR LE DISQUE

Même si nous ne rentrerons pas autant dans les détails, nous allons maintenant essayer de mettre en place dans le cas du disque les outils que nous avons introduits pour l'analyse sur le tore. Remarquons d'ores et déjà que l'une des difficultés à laquelle on est confronté est que le système de coordonnées action-angle est moins simple que sur le tore où le problème est dès le départ exprimé dans un bon système de coordonnées. Une autre difficulté – et d'une certaine manière la principale par rapport à [47, 6, 3] – est le fait que l'on doit tenir compte de la condition de bord et que celle-ci ne s'exprime pas vraiment bien dans le système de coordonnées action-angle du disque et il faut donc en quelque sorte jongler entre différents systèmes de coordonnées. L'article [5] fait appel à tout un arsenal de techniques d'analyse microlocale qu'il ne serait pas raisonnable de décrire en détail ici et nous nous contentons donc d'esquisser les grandes lignes de la preuve en nous appuyant sur la construction faite dans le cas du tore. Mentionnons que l'article s'appuie aussi de manière essentielle sur les techniques développées par Gérard et Leichtnam [28] afin d'analyser les mesures semi-classiques pour des problèmes aux valeurs propres dans des domaines à bord.

Par souci de simplicité, nous faisons une restriction très forte sur les suites de conditions initiales considérées. Ceci nous permettra d'alléger un peu la présentation sans perdre pour autant les idées essentielles. Précisément, nous supposons

$$\forall \delta > 0, \quad \lim_{\hbar \to 0^+} \sum_{j : |\hbar^2 \lambda_j - 1| \geq \delta} |\langle e_j, \psi_\hbar \rangle_{L^2}|^2 = 0, \tag{12}$$

plutôt que (5) et (6) où $(e_j)_j$ est une base orthonormée de fonctions propres du Laplacien de Dirichlet. Anantharaman, Léautaud et Macià traitent le cas d'une suite générale mais nous nous limitons à cette hypothèse plus restrictive qui nous permet d'exposer déjà les points importants de leur démonstration. On note $\mathcal{M}_{\mathrm{Schr}}^{(1)} \subset \mathcal{M}_{\mathrm{Schr}}$ le sous-ensemble des points d'accumulation $t \mapsto \mu_t$ correspondant à ce type de données initiales. Avec cette hypothèse de localisation en fréquence, on peut vérifier que, pour presque tout t dans $\mathbb{R}$, μ_t est une mesure de probabilité à support dans le fibré unitaire cotangent à $\overline{\mathbb{D}}$. Avant d'aller plus loin dans la discussion, il convient de mentionner une chose que nous avons passée sous silence dans le cas du problème à bord, à savoir la classe des fonctions test que nous devons utiliser pour définir les points d'accumulation. Dans le cas sans bord, il était naturel de travailler avec les fonctions lisses à support compact dans T^*M. Dans le cas du disque, nous prolongeons la solution de l'équation de Schrödinger $u_\hbar(t, z)$ par 0 en dehors de $\mathbb{R} \times \mathbb{D}$ et nous notons ce prolongement $\tilde{u}_\hbar(t, z)$. Nous définissons alors la distribution de Wigner :

$$w_\hbar(t) : a \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*\mathbb{R}^2) \mapsto \langle \tilde{u}_\hbar(t), \mathrm{Op}_\hbar(a) \tilde{u}_\hbar(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

où $\mathrm{Op}_\hbar$ est la quantification standard sur $\mathbb{R}^2$ [70, Ch. 4]. Nous faisons ici ce choix pour rester consistant avec les conventions de [5] mais aussi parce que les propriétés de base des mesures semi-classiques pour les problèmes à bord ont été dérivées par Gérard et Leichtnam pour ce choix de quantification [28] qui simplifie un certain nombre de choses.

Remarque 4.1. — Notons que $\tilde{u}_\hbar(t)$ ainsi prolongée vérifie l'équation

$$i\partial_t\tilde{u}_\hbar = \left(-\frac{\Delta}{2}+V\right)\tilde{u}_\hbar - \frac{1}{2}\partial_n u_\hbar\otimes\delta_{\partial\mathbb{D}},$$

où $\partial_n u_\hbar$ est la dérivée normale au bord du disque, *i.e.* $\partial_r u_\hbar$ en coordonnées polaires. L'opérateur Δ est ici le laplacien agissant sur $\mathbb{R}^2$ et pas le laplacien de Dirichlet que nous notons Δ_D pour le distinguer.

Les points d'accumulation $t\mapsto\mu_t$ dans $\mathcal{M}^{(1)}_{\mathrm{Schr}}$ sont donc des éléments de $\mathcal{D}'(T^*\mathbb{R}^2)$ dont on vérifie qu'il s'agit de mesures de probabilité à support dans $S^*\overline{\mathbb{D}}=\overline{\mathbb{D}}\times\mathbb{S}^1$ en adaptant l'argument de [28, Prop. 2.2] au cas dépendant du temps.

4.1. Invariance par le flot du billard

L'espace des phases associé à notre problème sur le disque $\overline{\mathbb{D}}$ est plutôt l'espace quotient

$$\mathbb{W}_1 := \overline{\mathbb{D}}\times\mathbb{S}^1/\sim,$$

où, pour $|z|=1$, on a quotienté par la relation d'équivalence $(z,\zeta)\sim\sigma(z,\zeta)$ avec[10] $\sigma(z,\zeta)=\zeta-2(z.\zeta)z$. La relation d'invariance par le flot géodésique se lit alors, pour presque tout t dans $\mathbb{R}$ et pour toute fonction a dans $\mathcal{C}^\infty_c(T^*\mathbb{R}^2)$ vérifiant $a\circ\sigma=a$ pour $|z|=1$, $\langle\mu_t,\zeta.\partial_z a\rangle=0$. Par la suite, *nous ne considérerons que des fonctions vérifiant cette propriété de symétrie au bord du disque.*

Remarque 4.2. — Nous venons de dire que la propriété (12) assure que les mesures sont supportées par $\mathbb{W}_1$. Dans la suite, nous ferons donc toujours l'hypothèse que les fonctions test a (ou b) sont 0-homogènes au voisinage de la couche d'énergie $\|\zeta\|=1$.

Dans le cas du tore, nous avons vu que la démonstration consistait entre autres choses à raffiner les arguments utilisés pour démontrer l'invariance de μ_t par le flot géodésique. Afin de comprendre les difficultés supplémentaires liées au bord, il est utile de se souvenir des complications liées à ce cadre géométrique. De nouveau, nous calculons la dérivée de la distribution de Wigner :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle w_\hbar(t),a\rangle &= \frac{i}{\hbar^2}\left\langle\tilde{u}_\hbar(t),\left[-\frac{\hbar^2\Delta}{2}+\hbar^2V,\mathrm{Op}_\hbar(a)\right]\tilde{u}_\hbar(t)\right\rangle\\ &+ \frac{i}{2\hbar}\left\langle\hbar\partial_n u_\hbar(t)\otimes\delta_{\partial\mathbb{D}},\mathrm{Op}_\hbar(a)\tilde{u}_\hbar(t)\right\rangle\\ &- \frac{i}{2\hbar}\left\langle\tilde{u}_\hbar(t),\mathrm{Op}_\hbar(a)\hbar\partial_n u_\hbar(t)\otimes\delta_{\partial\mathbb{D}}\right\rangle.\end{aligned}$$

Comme dans le cas sans bord, le premier terme est égal à $\frac{1}{\hbar}\left\langle\tilde{u}_\hbar(t),\mathrm{Op}_\hbar(\zeta.\partial_x a)\tilde{u}_\hbar(t)\right\rangle+\mathcal{O}(1)$ qui est bien la quantité recherchée. Si le support de a n'intersecte pas le bord de

[10] Il s'agit simplement de la symétrie d'axe la tangente au disque en z.

$\mathbb{D}$, alors on vérifie que les autres termes sont nuls. Il nous reste donc à comprendre ce qui se passe près de $\partial\mathbb{D}$. Pour cela, il convient de récrire a sous une forme adaptée à la géométrie du bord [28, Eq. (3.34), p. 589]. Sous les hypothèses de symétrie que nous avons imposées sur a, on peut vérifier que ce reste s'annule lorsqu'on passe à la limite. Pour un a général, il faudrait introduire la mesure semi-classique (sur $\partial\mathbb{D}$) associée à la suite $(\hbar\partial_n u_\hbar(t)\rceil_{\partial\mathbb{D}})_{\hbar\to 0^+}$. La question de l'invariance devient donc plus délicate surtout si on cherche à analyser le problème jusqu'au bord du domaine. Cette question avait été résolue pour des domaines assez généraux par Gérard et Leichtnam [28, Th. 2.3] en adaptant à ce contexte les résultats de Melrose et Sjöstrand sur la propagation des singularités pour les problèmes à bord [52]. Anantharaman, Léautaud et Macià sont amenés à raffiner ce type d'arguments afin de l'adapter à des versions 2-microlocales comme celles introduites dans le cas de $\mathbb{T}^2$. Ils doivent notamment étudier les contributions dues au bord de manière beaucoup plus fine dans le cas où les symboles sont supportés dans des voisinage de taille $\hbar$ des tores invariants d'orbites périodiques.

4.2. La dynamique de billard sur le disque

Comme précedemment, μ_t est une mesure invariante par le flot géodésique que nous allons décrire un peu plus précisément afin de pouvoir décomposer μ_t le long de sous-ensembles invariants, les fameux *tores invariants* du système complètement intégrable. Grâce à notre hypothèse de localisation spectrale (12), nous restreignons notre description du flot géodésique à la couche d'énergie fixée par la première variable d'action $E := |\zeta| = 1$. Commençons par rappeler que le flot géodésique (ou le flot du billard) φ^τ sur $\mathbb{W}_1$ est l'unique action *continue* du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur $\mathbb{W}_1$ vérifiant

$$\varphi^\tau(z, \zeta) = (z + \tau\zeta, \zeta),$$

dès que $\zeta \in \mathbb{D}$ et $z + \tau\zeta \in \mathbb{D}$. Observons que la restriction de ce flot au bord du disque $S^*\partial\mathbb{D}$ est le flot géodésique sur le cercle. Notons aussi que ce flot préserve le moment angulaire :

$$J := z.\zeta^\perp,$$

où $\zeta^\perp = (\zeta_y, -\zeta_x)$. Il s'agit de la deuxième variable d'action de notre système complètement intégrable et nous allons donc décomposer l'espace des phases $\mathbb{W}_1$ le long des sous-ensembles de niveau $J \in [-1, 1]$. Pour cela, il est commode d'introduire l'angle $\alpha_J = -\arcsin J$ que fait la trajectoire du billard avec la normale au bord lorsqu'elle touche celui-ci. Cet angle est bien entendu conservé au cours de l'évolution. Les tores invariants sont donc définis comme suit

$$\mathcal{T}_J := \left\{(z, \zeta) \in \mathbb{W}_1 : z.\zeta^\perp = J\right\}, \quad J \in [-1, 1],$$

et on a

$$\mathbb{W}_1 = \bigsqcup_{J\in[-1,1]} \mathcal{T}_J.$$

Pour $-1 < J < 1$, $\mathcal{T}_J$ est bien un tore de dimension 2 mais, pour $J = \pm 1$, on a un cercle, ce que l'on peut interpréter comme une manifestation du fait que la structure complètement intégrable est dégénérée au bord du disque. Les variables d'angle sur ces tores sont alors définies de la manière suivante :

$$(\theta, s) := \left(-\arctan\left(\frac{\zeta_x}{\zeta_y}\right), z.\zeta\right).$$

Remarquons que θ représente l'angle que fait le covecteur ζ avec la verticale et que, pour $J = \pm 1$, $s = 0$. Chacun de ces tores est muni d'une mesure de Haar naturelle :

$$\forall J \neq \pm 1,\ \lambda_J := \frac{dsd\theta}{\int_{\mathcal{T}_J} dsd\theta} \quad \text{et} \quad \lambda_{\pm 1} := \frac{d\theta}{\int_{\mathcal{T}_{\pm 1}} d\theta}.$$

4.3. Décomposition de μ_t

Fixons maintenant un élément $t \mapsto \mu_t$ de $\mathcal{M}^{(1)}_{\mathrm{Schr}}$ et utilisons le théorème de désintégation des mesures :

$$\mu_t(z,\zeta) = \int_{-1}^{1} \tilde{\mu}_J(t,z,\zeta)\overline{\mu}_t(dJ),$$

où, pour $\overline{\mu}_t$ presque tout J dans $[-1,1]$, $\tilde{\mu}_J$ est une mesure à support dans $\mathcal{T}_J$. Remarquons que

$$\forall a \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}), \quad \frac{d}{dt}\left\langle \tilde{u}_\hbar(t), \mathrm{Op}_\hbar\left(a(z.\zeta^\perp)\right)\tilde{u}_\hbar(t)\right\rangle = \mathcal{O}(\hbar),$$

uniformément en t. En effet, $\mathrm{Op}_\hbar\left(a(z.\zeta^\perp)\right) = a(\hbar\partial_\vartheta)$ où ϑ est la variable angulaire pour les coordonnées polaires. En particulier, $\mathrm{Op}_\hbar\left(a(z.\zeta^\perp)\right)$ définit un opérateur sur $L^2(\mathbb{D})$ qui commute avec Δ_D. Nous avons ainsi vérifié que la mesure $\overline{\mu}_t$ est indépendante du temps. Nous la notons dorénavant $\overline{\mu}_0$ et nous observons qu'elle est complètement déterminée par la mesure semi-classique μ_0 de la suite de données initiales utilisées pour générer μ_t. Par ailleurs, pour $\overline{\mu}_0$ presque tout J et pour presque tout t dans $\mathbb{R}$, on peut vérifier que la mesure $\tilde{\mu}_J(t)$ est invariante par le flot géodésique. Or, pour $\alpha_J \notin \pi\mathbb{Q}$, le flot géodésique est uniquement ergodique sur le tore $\mathcal{T}_J$, i.e.

$$\forall (z,\zeta) \in \mathcal{T}_J,\ \forall a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{W}_1), \quad \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T a \circ \varphi^\tau(z,\zeta)d\tau = \int_{\mathcal{T}_J} ad\lambda_J.$$

Au contraire, si $\alpha_J \in\in \pi\mathbb{Q} \cap [-\pi/2, \pi/2]$, le flot géodésique est périodique de période $L_J > 0$ qui dépend seulement du moment angulaire. Bien entendu, pour $J = \pm 1$, l'unique ergodicité est équivalente à la périodicité puisque les tores $\mathcal{T}_{\pm 1}$ sont de dimension 1. En utilisant une dernière fois que les tores $\mathcal{T}_J$ et la mesure μ_t sont invariants par le flot géodésique, nous venons donc de démontrer le résultat suivant :

Proposition 4.3. — *Soit $t \mapsto \mu_t$ appartenant à $\mathcal{M}^{(1)}_{Schr}$ telle que la suite de données initiales utilisées pour générer μ_t détermine une unique mesure semi-classique μ_0. Si on pose*

$$\overline{\mu}_0 = m_*(\mu_0),$$

où $m : (z,\zeta) \in \mathbb{W}_1 \mapsto J = z.\zeta^{\perp} \in [-1,1]$, alors on a, pour presque tout t dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mu_t &= \int_{\arcsin J \notin \pi\mathbb{Q}} \lambda_J \overline{\mu}_0(dJ) + \overline{\mu}_0(\{1\})\lambda_1 + \overline{\mu}_0(\{-1\})\lambda_{-1} \\ &+ \sum_{\arcsin J \in \pi\mathbb{Q} \cap (-\pi/2,\pi/2)} \frac{1}{L_J}\int_0^{L_J} (\varphi^{\tau})_* \mu_t \rceil_{\mathcal{T}_J} d\tau,\end{aligned}$$

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que la restriction de la mesure semi-classique aux tores uniquement ergodiques est complètement déterminée par la mesure semi-classique de la suite de données initiales, plus précisément par son poussé en avant par l'application m. Par ailleurs, la mesure μ_t est aussi régulière que possible le long de ces tores. Ainsi, comme dans le cas du tore, nous nous sommes ramenés à la description de la restriction de la mesure semi-classique à des tores invariants de dimension 2 sur lesquels le flot géodésique est périodique. Ici, ces tores d'orbites périodiques correspondent à des trajectoires dont l'angle d'impact α_J avec la normale au bord est un multiple rationnel de π. Le cœur de l'analyse de l'article consiste donc à décrire la restriction

$$\frac{1}{L_J}\int_0^{L_J} (\varphi^{\tau})_* \mu_t \rceil_{\mathcal{T}_J} d\tau \tag{13}$$

des mesures semi-classiques à ces tores d'orbites périodiques et à essayer de les exprimer en fonction des données initiales. Notons que la mesure ainsi définie est indépendante de la variable d'angle s mais qu'elle pourrait être *a priori* très irrégulière en la variable θ. De nouveau, l'analyse de la régularité le long de la seconde variable d'angle va passer par une seconde microlocalisation (de taille $\hbar$) sur ces tores $\mathcal{T}_J$ lorsque $\alpha_J \in \pi\mathbb{Q} \cap (-\pi/2, \pi/2)$.

4.4. Analyse le long des tores de trajectoires périodiques

La difficulté à laquelle il faut maintenant se confronter est le choix des coordonnées. Afin de procéder à cette seconde microlocalisation, l'exemple du tore nous invite à nous placer dans un jeu de coordonnées « action-angle ». Rappelons que nous avons introduit de telles coordonnées $(s,\theta,E,J) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$:

$$\Phi : (s,\theta,E,J) \mapsto (x,y,\xi_x,\xi_y) = \left(\frac{J}{E}\cos\theta - s\sin\theta, \frac{J}{E}\sin\theta + s\cos\theta, -E\sin\theta, E\cos\theta\right).$$

Afin de travailler dans ce système, il faut introduire un opérateur (intégral de Fourier) $\mathcal{U}$ [5, §3.1] de telle sorte que, pour toute fonction a dans $\mathcal{C}_c^{\infty}(T^*\mathbb{R}^2)$ supportée en dehors de $E = 0$, on a

$$\langle w_\hbar(t), a\rangle = \underbrace{\langle \mathcal{U}\tilde{u}_\hbar(t), \mathrm{Op}_\hbar(a\circ\Phi)\mathcal{U}\tilde{u}_\hbar(t)\rangle}_{=:\langle \tilde{w}_\hbar(t), a\circ\Phi\rangle} + \mathcal{O}_a(\hbar),$$

avec un reste uniforme en t. Par la suite, on notera $v_\hbar(t) = \mathcal{U}\tilde{u}_\hbar(t)$ qui est un élément de $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1)$. Fixons maintenant J_0 tel que $\alpha_{J_0} \in \pi\mathbb{Q} \cap (-\pi/2, \pi/2)$ et, comme dans le cas du tore $\mathbb{T}^2$, essayons de procéder à une seconde microlocalisation le long du tore invariant $\mathcal{T}_{J_0}$. Comme il ne nous reste qu'à analyser la dépendance en θ le long de

$\mathcal{T}_{J_0}$, nous nous limitons dans ce qui suit à l'étude d'obervables b vérifiant la propriété d'invariance

$$\left((\alpha_{J_0} - \alpha_J)\,\partial_\theta + \sqrt{1-J^2}\partial_s\right) b = 0. \tag{14}$$

De manière intégrée, ceci donne

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad b(s + \tau\sqrt{1-J^2}, \theta + \tau(\alpha_{J_0} - \alpha_J), E, J, \eta) = b(s, \theta, E, J, \eta).$$

Lorsque nous nous restreignons au tore $\mathcal{T}_{J_0}$ (qui est la zone que nous voulons analyser), ceci revient à dire que b est indépendante de s.

Remarque 4.4. — Dans le cas du tore, c'est déjà ce que nous avions fait en prenant des fonctions de la forme $\mathring{\mathcal{I}}_\Lambda(a)$, ce qui revenait *in fine* à considérer des observables invariantes par le flot $(x, \xi) \mapsto (x + t\mathfrak{e}_\Lambda^\perp, \xi)$. Lorsque nous considérions la restriction de la mesure à $\mathbb{T}^2 \times \Lambda^\perp$, nous n'avions en effet besoin d'analyser la mesure que le long de la variable (en x) induite par $\langle \Lambda \rangle$ puisqu'elle était déjà régulière le long de la variable induite par $\Lambda^\perp$ grâce à l'invariance par le flot géodésique. Ici, le tore $\mathcal{T}_{J_0}$ va jouer le rôle[11] de $\mathbb{T}^2 \times \Lambda^\perp$. La mesure étant déterminée le long de la variable s, il nous reste à analyser ce qui se passe le long de la seconde variable d'angle θ.

Découpons de nouveau le problème en deux parties en introduisant un nouveau paramètre $R > 1$ et une fonction de troncature $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ qui est égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]$ et à 0 en dehors de $[-1, 1]$. Pour analyser la mesure le long de $\mathcal{T}_{J_0}$, on introduit aussi une nouvelle variable $\eta = \frac{J - J_0}{\hbar}$ et on pose, pour $b(s, \theta, E, J, \eta) \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \times \widehat{\mathbb{R}})$ à support en dehors de $E = 0$ et vérifiant (14),

$$\langle \tilde{w}_{\hbar,R,J_0}(t), b \rangle := \left\langle v_\hbar(t), \mathrm{Op}_\hbar\left(b\left(s, \theta, E, J, \frac{J - J_0}{\hbar}\right)\chi\left(\frac{J - J_0}{R\hbar}\right)\right) v_\hbar(t)\right\rangle$$

et

$$\langle \tilde{w}_{\hbar,R}^{J_0}(t), b \rangle := \left\langle v_\hbar(t), \mathrm{Op}_\hbar\left(b\left(s, \theta, E, J, \frac{J - J_0}{\hbar}\right)(1 - \chi)\left(\frac{J - J_0}{R\hbar}\right)\right) v_\hbar(t)\right\rangle.$$

Remarque 4.5. — Rappelons que nous travaillons avec des fonctions vérifiant une propriété de symétrie au bord du disque. Afin que la composée de b avec le flot du billard soit aussi lisse en tout temps, il faut aussi imposer cette propriété de symétrie pour toutes les dérivées partielles par rapport à s. Rappelons aussi que b est toujours supposée 0-homogène au voisinage de $E = 1$.

Comme dans le cas du tore, le théorème de Calderón-Vaillancourt nous permet d'extraire des sous-suites convergentes de telle sorte qu'on obtient deux objets limites, $\mu_{J_0}(t, s, \theta, J, E, \eta)$ et $\mu^{J_0}(t, s, \theta, E, J, \eta)$, dont nous pouvons lister quelques premières propriétés :

Proposition 4.6. — *Soit J_0 tel que $\alpha_{J_0} \in \pi\mathbb{Q} \cap (-\pi/2, \pi/2)$. Avec les notations précédentes, on a :*

[11] Nous avons perdu une dimension grâce à notre hypothèse de fréquence (12).

1. *Les distributions μ_{J_0} et μ^{J_0} sont absolument continues par rapport à la variable t.*
2. *Pour presque tout t dans $\mathbb{R}$, $\mu^{J_0}(t)$ est une mesure positive supportée dans $\Phi^{-1}(\mathbb{W}_1) \times \{\pm\infty\}$.*
3. *Pour presque tout t dans $\mathbb{R}$, $\mu_{J_0}(t)$ est une distribution concentrée sur $\mathcal{T}_{J_0} \times \mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} \mu_{J_0}(t, d\eta)$ est une mesure positive supportée dans $\mathcal{T}_{J_0}$.*
4. *On a $\partial_s \mu_{J_0}(t) = \partial_s \mu^{J_0}(t) = 0$ pour presque tout dans $\mathbb{R}$ (Invariance par le flot géodésique).*
5. *On a*
$$\mu_t \rceil_{\mathcal{T}_{J_0}} = \int_{\mathbb{R}} \mu_{J_0}(t, d\eta) \rceil_{\mathcal{T}_{J_0}} + \int_{\{\pm\infty\}} \mu^{J_0}(t, d\eta) \rceil_{\mathcal{T}_{J_0}}.$$

Nous ne reprenons pas la démonstration de ce résultat et nous renvoyons à [5, Prop. 4.5] pour plus de détails et des références à la littérature existante. Notons tout de même que l'invariance par le flot géodésique énoncée dans le point 4 revient à reprendre la démonstration de Gérard et Leichtnam dans le cas de symboles oscillant en $\hbar$ et à vérifier que les termes dûs au bord s'annulent encore une fois. Ceci nécessite de se ramener au système de coordonnées polaires qui est plus adapté aux conditions de Dirichlet que les coordonnées « action-angle ».

Rappelons d'après (13) qu'il nous reste seulement à comprendre la structure de μ_t le long des tores d'orbites périodiques $\mathcal{T}_{J_0}$. La proposition précédente décompose ce problème en deux sous-questions : la description de $\mu_{J_0}(t)$ et celle de $\mu^{J_0}(t)$. Même si les objets sont plus complexes, nous sommes dans la même situation que sur le tore lorsque nous avions analysé la partie compacte et celle à l'infini de $\mu_\Lambda(t)$. L'essentiel de l'article [5] consiste à mettre en œuvre la même stratégie avec les difficultés additionnelles que nous avons déjà soulevées. Précisément, Anantharaman, Léautaud et Macià démontrent les propriétés suivantes :

1. **Pour la partie à l'infini**, ils démontrent que $\mu^{J_0}(t)\rceil_{\mathcal{T}_{J_0} \times \{\pm\infty\}}$ est indépendante de θ [5, Th. 4.9]. En d'autres termes, c'est la mesure de Haar le long du tore invariant, *i.e.* $\int_{\pm\infty} \mu^{J_0}(t, d\eta)\rceil_{\mathcal{T}_{J_0}} = c_{J_0}(t)\lambda_{J_0}$ pour presque tout t dans $\mathbb{R}$. On peut de nouveau vérifier [5, p. 553] que $c_{J_0}(t)$ est indépendante du temps. *Cette partie de la mesure est donc complètement déterminée par la donnée initiale* et on peut noter que la projection sur $\mathbb{D}$ est régulière.
2. **Pour la partie « compacte »**, ils réussissent aussi à déterminer $\mu_{J_0}(t)$ complètement en fonction des conditions initiales. De la même manière que dans le cas du tore, $\mu_{J_0}(t)$ *peut être exprimée en fonction de $\mu_{J_0}(0)$ propagée par une équation de transport (quantique)* le long de la variable θ. La caractérisation précise de ces distributions permet alors de vérifier que la projection de ces mesures sur le disque $\mathbb{D}$ vérifie les propriétés de régularité énoncées dans les théorèmes 2.6 et 2.7 – voir [5, §7].

Pour conclure cet exposé, nous allons expliquer formellement les grandes lignes de la démonstration qui permet d'exprimer $\mu_{J_0}(t)$ en fonction des conditions initiales. Afin d'insister sur les idées importantes de la démonstration et afin de mettre en avant le parallèle avec le cas du tore que nous avons traité en détail, nous insistons sur le fait que nous faisons des simplifications parfois un peu « abusives ». Nous invitons le lecteur à consulter [5, p. 540–551, App. C–E] pour la version détaillée de la démonstration.

Remarque 4.7. — Afin de traiter le cas d'un potentiel général V et de faire les choses plus « proprement », il faudrait en fait introduire des fonctions test un peu plus générales, *i.e.* travailler avec des opérateurs pseudo-différentiels à valeurs dans les opérateurs compacts sur $L^2_\theta(\mathbb{S}^1)$. La partie compacte μ_{J_0} serait alors une mesure à valeurs dans les operateurs à trace sur $L^2_\theta(\mathbb{S}^1)$ et elle vérifierait une équation de transport quantique pour une certaine équation de Schrödinger le long de la variable θ. Afin d'exposer les idées en jeu de la manière la plus simple possible, nous passons un peu cet aspect sous silence et nous supposons en particulier que $V \equiv 0$ dans la fin de ce paragraphe. Ce transport quantique sera donc un peu déguisé dans la suite. Nous renvoyons le lecteur aux articles [6, 3, 5] pour plus de détails sur cet aspect.

Pour analyser la partie « compacte », nous reprenons l'argument que nous avons utilisé au paragraphe 3.4 dans le cas du tore et nous allons essayer de comprendre les points qui nécessitent une adaptation pour déterminer μ_{J_0}. On fixe $b(s,\theta,J,E,\eta)$ à support compact en η vérifiant les propriétés de symétrie et d'homogénéité discutées plus haut. Pour $R>0$ assez grand, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle \tilde{w}_{\hbar,R,J_0}(t), b\rangle &= \frac{d}{dt}\left\langle v_\hbar(t), \operatorname{Op}_\hbar\left(b\left(s,\theta,E,J,\frac{J-J_0}{\hbar}\right)\right)v_\hbar(t)\right\rangle \\
&= i\left\langle v_\hbar(t), \left[-\frac{\mathcal{U}\Delta\mathcal{U}^*}{2}, \operatorname{Op}_\hbar\left(b\left(s,\theta,E,J,\frac{J-J_0}{\hbar}\right)\right)\right]v_\hbar(t)\right\rangle \\
&- \frac{i}{2}\left\langle \partial_n u_\hbar(t)\otimes\delta_{\partial\mathbb{D}}, \mathcal{U}^*\operatorname{Op}_\hbar\left(b\left(s,\theta,E,J,\frac{J-J_0}{\hbar}\right)\right)\mathcal{U}\tilde{u}_\hbar(t)\right\rangle \\
&+ \frac{i}{2}\left\langle \mathcal{U}\tilde{u}_\hbar(t), \operatorname{Op}_\hbar\left(b\left(s,\theta,E,J,\frac{J-J_0}{\hbar}\right)\right)\mathcal{U}\partial_n u_\hbar(t)\otimes\delta_{\partial\mathbb{D}}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Anantharaman, Léautaud et Macià sont donc confrontés à l'étude de ces termes de bord que nous avons déjà rencontrés lorsque nous avons évoqué la démonstration de l'invariance des mesures semi-classiques par le flot du billard. La symétrie de b au bord permettait de vérifier que ces termes étaient en fait asymptotiquement nuls [28, Th. 2.3]. De la même manière, l'invariance des mesures 2-microlocales par le flot du billard énoncée dans la proposition 4.6 passe par l'étude de ces termes de bord. Dans ce dernier cas, les auteurs de [5] obtenaient de nouveau une simplification due à la symétrie de b par rapport au bord. Dans l'équation précédente, il faut pousser l'étude des termes de reste un cran plus loin et cette fois, le terme de bord ne va plus s'annuler. L'étude des termes de bord à tous les stades de la démonstration est un problème délicat qui occupe une grande partie de l'article [5] et notamment de ses appendices. Comme nous y avons déjà fait allusion, l'une des raisons qui rend les choses compliquées est que le choix de coordonnées action-angle est bien adapté pour comprendre les propriétés d'invariance mais qu'il n'est pas aisé d'y lire les conditions au bord de l'EDP. Nous ne rentrons pas dans les détails mais, après une analyse délicate, on peut vérifier que le terme de bord donne asymptotiquement la contribution [5, p. 551] :

$$i\frac{E}{2\sqrt{1-J_0^2}}\partial_\theta^2 b\left(s,\theta,E,J,\frac{J-J_0}{\hbar}\right).$$

Essayons maintenant de comprendre intuitivement ce que nous donne le terme principal qui est plus simple à analyser. La première chose à observer est que, dans le nouveau systèmes de coordonnées, on a [5, Lemma 3.1(ii)]

$$-\mathcal{U}\Delta\mathcal{U}^* = -\partial_s^2.$$

Les règles du calcul pseudo-différentiel sur $\mathbb{R}^2$ [70, Ch. 4] nous donnent alors

$$i\left[-\frac{\mathcal{U}\Delta\mathcal{U}^*}{2}, \mathrm{Op}_\hbar\left(b\left(s,\theta,E,J,\frac{J-J_0}{\hbar}\right)\right)\right] = \mathrm{Op}_\hbar\left(\left(\frac{E}{\hbar}\partial_s b - i\frac{\partial_s^2 b}{2}\right)\left(s,\theta,E,J,\frac{J-J_0}{\hbar}\right)\right).$$

En utilisant la propriété d'invariance (14) sur b, nous trouvons pour le premier terme

$$\frac{E}{\hbar}\partial_s b\left(s,\theta,E,J,\frac{J-J_0}{\hbar}\right) \simeq -\frac{E}{\sqrt{1-J_0^2}}\frac{J-J_0}{\hbar}\partial_\theta b\left(s,\theta,E,J,\frac{J-J_0}{\hbar}\right).$$

Puisque b est indépendant de s le long de $J = J_0$, on peut aussi vérifier que la contribution de $\frac{\partial_s^2 b}{2}$ est asymptotiquement nulle. Ainsi, pour J_0 tel que $\alpha_{J_0} \in \pi\mathbb{Q} \cap (-\pi/2, \pi/2)$, nous trouvons formellement l'équation de transport suivante après passage à la limite :

$$i\sqrt{1-J_0^2}\partial_t\mu_{J_0} = i\eta\partial_\theta\mu_{J_0} - \frac{1}{2}\partial_\theta^2\mu_{J_0}.$$

En particulier, ce calcul nous montre formellement que *la distribution* $\mu_{J_0}(t)$ *est complètement déterminée par* $\mu_{J_0}(0)$, *i.e.* par la suite de conditions initiales et nous retrouvons bien une formule de transport similaire à celle que nous avions obtenue dans le cas du tore $\mathbb{T}^2$ – voir paragraphe 3.4.

Remarque 4.8. — Nous n'avons pas discuté la partie à l'infini. Dans ce cas, Anantharaman, Léautaud et Macià reprennent la démonstration du paragraphe 3.3 afin de calculer μ^{J_0} [5, p. 538–540, App. C–E]. Une nouvelle fois, ils sont amenés à analyser en détail les contributions des termes de bord afin de montrer qu'en utilisant la symétrie de b, elles s'annulent pour la partie à l'infini tout comme elles s'annulaient dans l'argument de Gérard et Leichtnam.

CONCLUSION

Pour les systèmes complètement intégrables, nous venons de voir à travers le cas du tore et du disque qu'on pouvait obtenir des descriptions précises des solutions de l'équation de Schrödinger, au moins du point de vue de leurs mesures semi-classiques. Rappelons que ce type d'analyse s'étend à d'autres systèmes complètement intégrables [45, 3, 48, 49]. L'histoire semble pour autant loin d'être finie et nous voudrions conclure cet exposé avec quelques questions parmi d'autres :

- Dans le cas du tore, nous avons vu au début de l'exposé qu'on pouvait aussi faire appel à des techniques d'analyse harmonique pour obtenir des résultats de régularité précis. Il serait intéressant de combiner autant que possible ces deux approches qui donnent des résultats en un certain sens complémentaires. Dans cette direction, nous pouvons par exemple mentionner les articles [1, 10, 16].
- Dans le cas du disque, il semble raisonnable de penser que des résultats fins sur les fonctions de Bessel permettraient de dire des choses sur la régularité des mesures semi-classiques comme dans le cas du tore. Dans ce sens, nous renvoyons à l'introduction de [5, §1.3].
- Le cas de l'ellipse devrait pouvoir être traité par des techniques similaires à celles de l'article d'Anantharaman, Léautaud et Macià.
- L'étude du spectre des systèmes complètement intégrables est un sujet classique en analyse microlocale et il serait naturel d'utiliser les techniques développées dans ce contexte pour décrire les mesures semi-classiques. Par exemple, les outils développés par Hitrik, Sjöstrand et Vũ Ngọc pour l'analyse de problèmes non-autoadjoints en dimension 2 [33] devraient avoir des applications dans ce cadre.
- Toujours en dimension 2, il serait intéressant de comprendre la structure des mesures semi-classiques pour les systèmes semi-toriques étudiés par Pelayo et Vũ Ngọc [55].
- Le résultat d'équidistribution pour les billards polygonaux de Marklof et Rudnick [51] soulève la question de la régularité des mesures semi-classiques dans ce cadre. Une question naturelle serait de comprendre si, comme sur le tore, les mesures semi-classiques ne chargent pas les orbites périodiques. Il est raisonnable d'espérer que les techniques développées par Anantharaman, Fermanian-Kammerer, Léautaud et Macià ainsi que celles de Hassell, Hillairet et Marzuola [31] puissent être utiles à l'étude de ce type de questions.
- Dans le cas d'un laplacien sous-riemannien associé à une structure de contact en dimension 3, les mesures semi-classiques se décomposent en une somme de deux mesures mutuellement singulières [19]. L'une μ_∞ est invariante par le champ de Reeb associé et portée par un revêtement à deux feuillets de la variété. L'autre μ_0 est invariante par le flot géodésique sous-riemannien et portée par le fibré unitaire de la structure sous-riemannienne (ici un cylindre au dessus de chaque point de la variété). Colin de Verdière, Hillairet et Trélat démontrent que, le long d'une sous-suite générique de fonctions propres, μ_0 est forcément nulle. Comme c'était le cas pour les résultats d'ergodicité quantique, ceci n'exclut pas *a priori* qu'elle soit non nulle pour une sous-suite quelconque. Il serait intéressant de comprendre si les techniques 2-microlocales présentées dans cet exposé peuvent permettre d'analyser certaines propriétés fines de cette décomposition notamment de la mesure μ_0.

Remerciements

J'adresse mes sincères remerciements à N. Anantharaman, S. De Bièvre, M. Léautaud, F. Macià et B. Merlet pour leur aide et leurs commentaires lors de la préparation de cet exposé.

RÉFÉRENCES

[1] T. Aissiou, D. Jakobson, and F. Macià. Uniform estimates for the solutions of the Schrödinger equation on the torus and regularity of semiclassical measures. *Math. Res. Lett.*, 19(3) :589–599, 2012.

[2] N. Anantharaman. Entropy and the localization of eigenfunctions. *Ann. of Math. (2)*, 168(2) :435–475, 2008.

[3] N. Anantharaman, C. Fermanian-Kammerer, and F. Macià. Semiclassical completely integrable systems : long-time dynamics and observability via two-microlocal Wigner measures. *Amer. J. Math.*, 137(3) :577–638, 2015.

[4] N. Anantharaman, M. Léautaud, and F. Macià. Delocalization of quasimodes in the disk. *CRAS*, 354(3) :256–263, 2016.

[5] N. Anantharaman, M. Léautaud, and F. Macià. Wigner measures and observability for the Schrödinger equation on the disk. *Invent. Math.*, 206(2) :485–599, 2016.

[6] N. Anantharaman and F. Macià. Semiclassical measures for the Schrödinger equation on the torus. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 16(6) :1253–1288, 2014.

[7] N. Anantharaman and S. Nonnenmacher. Half-delocalization of eigenfunctions for the Laplacian on an Anosov manifold. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 57(7) :2465–2523, 2007. Festival Yves Colin de Verdière.

[8] D. Azagra and F. Macià. Concentration of symmetric eigenfunctions. *Nonlinear Anal.*, 73(3) :683–688, 2010.

[9] J.-M. Bony and N. Lerner. Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur. In *Séminaire sur les équations aux dérivées partielles 1986–1987*, pages Exp. No. II–III, 29. École Polytech., Palaiseau, 1987.

[10] J. Bourgain, N. Burq, and M. Zworski. Control for Schrödinger operators on 2-tori : rough potentials. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 15(5) :1597–1628, 2013.

[11] S. Brooks, E. Le Masson, and E. Lindenstrauss. Quantum ergodicity and averaging operators on the sphere. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (19) :6034–6064, 2016.

[12] N. Burq. Mesures semi-classiques et mesures de défaut. *Astérisque*, (245) :Exp. No. 826, 4, 167–195, 1997. Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97.

[13] N. Burq and M. Zworski. Eigenfunctions for partially rectangular billiards. 2003. Preprint arXiv :math/0312098, non publié.

[14] N. Burq and M. Zworski. Geometric control in the presence of a black box. *J. Amer. Math. Soc.*, 17(2) :443–471, 2004.

[15] N. Burq and M. Zworski. Control for Schrödinger operators on tori. *Math. Res. Lett.*, 19(2) :309–324, 2012.

[16] N. Burq and M. Zworski. Rough controls for Schroedinger operators on 2-tori. 2017. Preprint arXiv :1712.08635.

[17] Y. Colin de Verdière. Ergodicité et fonctions propres du laplacien. *Comm. Math. Phys.*, 102(3) :497–502, 1985.

[18] Y. Colin de Verdière. Semi-classical measures and entropy [after Nalini Anantharaman and Stéphane Nonnenmacher]. *Astérisque*, (317) :Exp. No. 978, ix, 393–414, 2008. Séminaire Bourbaki. Vol. 2006/2007.

[19] Y. Colin de Verdière, L. Hillairet, and E. Trélat. Spectral asymptotics for sub-Riemannian Laplacians. I : quantum ergodicity and quantum limits in the 3d contact case. 2015. Preprint arXiv :1504.07112, to appear Duke Math. J.

[20] J.-M. Delort. *F.B.I. transformation*, volume 1522 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Second microlocalization and semilinear caustics.

[21] S. Dyatlov and L. Jin. Semiclassical measures on hyperbolic surfaces have full support. 2017. Preprint arXiv :1705.05019.

[22] F. Faure, S. Nonnenmacher, and S. De Bièvre. Scarred eigenstates for quantum cat maps of minimal periods. *Comm. Math. Phys.*, 239(3) :449–492, 2003.

[23] C. Fermanian-Kammerer. Mesures semi-classiques et équation de la chaleur. 1995. Thèse de l'Université Paris-Sud Orsay.

[24] C. Fermanian-Kammerer. Mesures semi-classiques 2-microlocales. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331(7) :515–518, 2000.

[25] R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 3 : Quantum mechanics.* Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1965.

[26] P. Gérard. Mesures semi-classiques et ondes de Bloch. In *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1990–1991*, pages Exp. No. XVI, 19. École Polytech., Palaiseau, 1991.

[27] P. Gérard. Microlocal defect measures. *Comm. Partial Differential Equations*, 16(11) :1761–1794, 1991.

[28] P. Gérard and É. Leichtnam. Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem. *Duke Math. J.*, 71(2) :559–607, 1993.

[29] E. Grosswald. *Representations of Integers as Sums of Squares.* Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1985.

[30] A. Hassell. Ergodic billiards that are not quantum unique ergodic, with an appendix by the author and luc hillairet. *Ann. of Math. (2)*, 171(1) :605–619, 2010.

[31] A. Hassell, L. Hillairet, and J. Marzuola. Eigenfunction concentration for polygonal billiards. *Comm. Partial Differential Equations*, 34(4-6) :475–485, 2009.

[32] B. Helffer, A. Martinez, and D. Robert. Ergodicité et limite semi-classique. *Comm. Math. Phys.*, 109(2) :313–326, 1987.

[33] M. Hitrik, J. Sjöstrand, and S. Vũ Ngọc. Diophantine tori and spectral asymptotics for nonselfadjoint operators. *Amer. J. Math.*, 129(1) :105–182, 2007.

[34] E. Humbert, Y. Privat, and E. Trélat. Observability properties of the homogeneous wave equation on a closed manifold. 2016. Preprint arXiv :1607.01535.

[35] S. Jaffard. Contrôle interne exact des vibrations d'une plaque rectangulaire. *Portugal. Math.*, 47(4) :423–429, 1990.

[36] D. Jakobson. Quantum limits on flat tori. *Ann. of Math. (2)*, 145(2) :235–266, 1997.

[37] D. Jakobson and S. Zelditch. Classical limits of eigenfunctions for some completely integrable systems. In *Emerging applications of number theory (Minneapolis, MN, 1996)*, volume 109 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 329–354. Springer, New York, 1999.

[38] J.P. Kahane. Pseudo-périodicité et séries de Fourier lacunaires. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 79 :93–150, 1962.

[39] D. Kelmer. Arithmetic quantum unique ergodicity for symplectic linear maps of the multidimensional torus. *Ann. of Math. (2)*, 171(2) :815–879, 2010.

[40] G. Lebeau. Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 35(2) :145–216, 1985.

[41] G. Lebeau. Contrôle de l'équation de Schrödinger. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 71(3) :267–291, 1992.

[42] S. Lester and Z. Rudnick. Small Scale Equidistribution of Eigenfunctions on the Torus. *Comm. Math. Phys.*, 350(1) :279–300, 2017.

[43] E. Lindenstrauss. Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity. *Ann. of Math. (2)*, 163(1) :165–219, 2006.

[44] P.-L. Lions and T. Paul. Sur les mesures de Wigner. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 9(3) :553–618, 1993.

[45] F. Macià. Some remarks on quantum limits on Zoll manifolds. *Comm. Partial Differential Equations*, 33(4-6) :1137–1146, 2008.

[46] F. Macià. Semiclassical measures and the Schrödinger flow on Riemannian manifolds. *Nonlinearity*, 22(5) :1003–1020, 2009.

[47] F. Macià. High-frequency propagation for the Schrödinger equation on the torus. *J. Funct. Anal.*, 258(3) :933–955, 2010.

[48] F. Macià and G. Rivière. Concentration and Non-Concentration for the Schrödinger Evolution on Zoll Manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 345(3) :1019–1054, 2016.

[49] F. Macià and G. Rivière. Observability and quantum limits for the Schrödinger equation on the sphere. 2017. Preprint arXiv :1702.02066.

[50] F. Macià and G. Rivière. Two microlocal regularity of quasimodes on the torus. 2017. Preprint arXiv :1708.08799.

[51] J. Marklof and Z. Rudnick. Almost all eigenfunctions of a rational polygon are uniformly distributed. *J. Spectr. Theory*, 2(1) :107–113, 2012.

[52] R. B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 31(5) :593–617, 1978.

[53] L. Miller. Propagation d'ondes semi-classiques à travers une interface et mesures 2-microlocales. 1996. Thèse de l'École polytechnique.

[54] F. Nier. A semi-classical picture of quantum scattering. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 29(2) :149–183, 1996.

[55] A. Pelayo and S. Vũ Ngọc. Constructing integrable systems of semitoric type. *Acta Math.*, 206(1) :93–125, 2011.

[56] Z. Rudnick and P. Sarnak. The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 161(1) :195–213, 1994.

[57] M. Ruzhansky and V. Turunen. *Pseudo-differential operators and symmetries*, volume 2 of *Pseudo-Differential Operators. Theory and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2010. Background analysis and advanced topics.

[58] J. Sjöstrand. Singularités analytiques microlocales. In *Astérisque, 95*, volume 95 of *Astérisque*, pages 1–166. Soc. Math. France, Paris, 1982.

[59] J. Sjöstrand and M. Zworski. Asymptotic distribution of resonances for convex obstacles. *Acta Math.*, 183(2) :191–253, 1999.

[60] A. I. Šnirel'man. Ergodic properties of eigenfunctions. *Uspehi Mat. Nauk*, 29(6(180)) :181–182, 1974.

[61] L. Tartar. H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 115(3-4) :193–230, 1990.

[62] J.M. VanderKam. L^∞ norms and quantum ergodicity on the sphere. *Internat. Math. Res. Notices*, (7) :329–347, 1997.

[63] A. Vasy and J. Wunsch. Semiclassical second microlocal propagation of regularity and integrable systems. *J. Anal. Math.*, 108 :119–157, 2009.

[64] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, 40 :748–759, 1932.

[65] J. Wunsch. Spreading of Lagrangian regularity on rational invariant tori. *Comm. Math. Phys.*, 279(2) :487–496, 2008.

[66] J. Wunsch. Non-concentration of quasimodes for integrable systems. *Comm. Partial Differential Equations*, 37(8) :1430–1444, 2012.

[67] S. Zelditch. Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces. *Duke Math. J.*, 55(4) :919–941, 1987.

[68] S. Zelditch. Quantum ergodicity on the sphere. *Comm. Math. Phys.*, 146(1) :61–71, 1992.

[69] S. Zelditch and M. Zworski. Ergodicity of eigenfunctions for ergodic billiards. *Comm. Math. Phys.*, 175(3) :673–682, 1996.

[70] M. Zworski. *Semiclassical analysis*, volume 138 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[71] A. Zygmund. On Fourier coefficients and transforms of functions of two variables. *Studia Math.*, 50 :189–201, 1974.

Gabriel RIVIÈRE

Université de Lille
Département de Mathématiques
Laboratoire Paul Painlevé
U.M.R. 8524 du CNRS
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
E-mail :
gabriel.riviere@univ-lille.fr