Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2015/2016 – Master 2 Mathématiques appliquées
Introduction aux EDP non linéaires

Corrigé de l'exercice 1

On considère l'espace de Banach $F := \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|u\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |u(t)|$ et l'espace de Banach

$$E := \left\{u \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) : \ u(0) = u(1) = 0\right\}$$

muni de la norme $\|u\|_{\mathcal{C}^2} := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \|u''\|_\infty$. On fixe p un élément non nul de F.

(1) Cette question a déjà été traitée dans la partie II du chapitre 1.

(2) Soit $f : \mathbb{R} \times E \to F$ définie par

$$f(\lambda, u) := u'' + \lambda p e^u.$$

Pour $(\lambda, t) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, h) \in E^2$, on a

$$f(\lambda + t, u + h) = u'' + h'' + (\lambda + t)pe^{u+h}.$$

On écrit alors la formule de Taylor avec reste intégral

$$e^h = 1 + h + h^2 \int_0^1 (1-s)e^{sh} ds = 1 + h + \mathcal{O}(\|h\|_\infty^2 e^{\|h\|_\infty}).$$

Ainsi, pour $\|h\|_{\mathcal{C}^2}, |t| \leq 1$, on trouve que

$$f(\lambda + t, u + h) = f(\lambda, u) + h'' + \lambda pe^u h + tp(1 + h)e^u + \mathcal{O}(\|h\|_{\mathcal{C}^2}^2),$$

où la constante dans le reste dépend de u. Par ailleurs, on a $|th| \leq \frac{1}{2}(t^2 + \|h\|_{\mathcal{C}^2}^2)$. On conclut donc que

$$f(\lambda + t, u + h) = f(\lambda, u) + h'' + \lambda pe^u h + tpe^u + \mathcal{O}(\|h\|_{\mathcal{C}^2}^2 + t^2).$$

En particulier,

$$d_{\lambda_0,u_0} f.(t, h) = h'' + \lambda_0 pe^{u_0} h + e^{u_0} pt.$$

La différentielle dépend donc de manière continue de (λ_0, u_0) : f est donc bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times E$.

(3) Grâce aux deux questions précedentes, on est bien dans le cadre du théorème des fonctions implicites énoncé dans le cours quand on se place en $(\lambda_0, u_0) = (0, 0)$. On en déduit l'existence de $\lambda_0 > 0$ tel que, pour tout λ dans l'intervalle $]0, \lambda_0[$, il existe une solution $u_\lambda \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ du problème suivant :

$$\forall t \in [0,1], f(\lambda, u_\lambda) = u_\lambda''(t) + \lambda p(t)e^{u_\lambda(t)} = 0, \ u_\lambda(0) = u_\lambda(1) = 0.$$