Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2015/2016 – Master 2 Mathématiques appliquées
Introduction aux EDP non linéaires

Exercice 1

On considère l'espace de Banach $F := \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|u\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |u(t)|$ et l'espace de Banach

$$E := \left\{u \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) : \; u(0) = u(1) = 0\right\}$$

muni de la norme $\|u\|_{\mathcal{C}^2} := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \|u''\|_\infty$. On fixe p un élément non nul de F.

(1) Soit $\Phi : E \to F$ définie par $\Phi(u) := u''$. Montrer que Φ est linéaire, continue et bijective. Calculer Φ^{-1} et montrer que Φ^{-1} est continue.

(2) Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \times E \to F$ définie par

$$f(\lambda, u) := u'' + \lambda p e^u$$

est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer sa différentielle au point $(\lambda_0, u_0) \in \mathbb{R} \times E$.

(3) En utilisant le théorème des fonctions implicites, démontrer qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que, pour tout λ dans l'intervalle $]0, \lambda_0[$, il existe une solution non constante $u \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ du problème suivant :

$$\forall t \in [0,1], u''(t) + \lambda p(t) e^{u(t)} = 0, \; u(0) = u(1) = 0.$$