Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2015/2016 – Master 2 Mathématiques appliquées
Introduction aux EDP non linéaires

Exercice 2 (a)

On considère l'équation de Burger

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2}\right) = 0,$$

avec condition initiale u_0 dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$u_0(x) = 1 \text{ si } x \leq 0,\ u_0'(x) \leq 0 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } u_0(x) = 0 \text{ si } x \geq 1.$$

(1) Montrer que cette équation a une solution pour t dans un certain intervalle $[0, T^*[$, avec $T^* > 0$ qu'on exprimera en fonction de u_0.

(2) En utilisant la méthode des caractéristiques, montrer que, pour tout $0 \leq t < T^*$, $u(x,t)$ est égale à 1 pour $x \leq t$, décroissante sur $[t, 1]$ et égale à 0 pour $x \geq 1$.

Exercice 2 (b)

On considère l'équation de Burger

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2}\right) = 0,$$

avec une condition initiale u_0 invariante par homothétie de rapport $\lambda > 0$, i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ u_0(\lambda x) = u_0(x).$$

(1) On suppose que u est une solution faible sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ de l'équation de Burger avec condition initiale $u(t=0) = u_0$. Montrer que $v_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda t)$ est encore solution faible du problème sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

(2) Déterminer les fonctions V de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $V(x/t)$ est solution de l'équation de Burger pour $t > 0$ et x dans $\mathbb{R}$.

(3) Expliquer la construction de la solution faible $\mathcal{C}^1$ par morceaux de l'équation de Burger construite dans l'exemple 2 du paragraphe III.2 du cours.