Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2010/2011 – Licence Mécanique – Semestre 4
Compléments d'analyse réelle – Math 203'

Corrigé de l'interrogation 1

1. Corrigé de la version 1.

Questions de cours.

(1) Faux. On prend $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. La suite vérifie $|u_{n+1} - u_n| \to 0$ et on sait qu'elle diverge (série harmonique). (**1.5pt**)

(2) Faux. On prend $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$. On a $\int_0^1 |x^n|^2 dx \to 0$ mais f_n ne converge pas uniformément vers 0. En effet, si f_n convergeait uniformément, la limite simple de f_n serait continue en $x = 1$. (**1.5pt**)

Exercice 1.

(1) $f_n(x) = \sin(x^n)$ converge vers 0 si $x \in [-1/2, 1[$ et vers $\sin 1$ si $x = 1$ (**0.5pt**). Si f_n convergeait uniformément, la limite serait continue en $x = 1$ (car les f_n sont continues en $x = 1$). Ce n'est pas le cas. On a donc convergence simple mais pas uniforme sur $[-1/2, 1]$ (**1.5pt**).

(2) $f_n(x) = \frac{ne^x}{n(x^2+1)+1}$ converge simplement vers $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ sur $[-1, 1]$ (**0.5pt**). On a $f_n(x)_f(x) = \frac{-e^x}{(n(x^2+1)+1)(x^2+1)}$. Ainsi, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{e}{n}$ pour $x \in [-1, 1]$ et donc f_n converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$ (**1.5pt**).

(3) On a $0 \leq f_n(x) = n^2(\tan x)^n(1+\tan^2 x) \leq \frac{4n^2}{3(\sqrt{3})^n}$ pour $x \in [0, \pi/6]$ (car $0 \leq \tan x \leq 1/\sqrt{3}$). Donc f_n converge uniformément vers 0 sur $[0, \pi/6]$ (**2pt**).

Exercice 2. Commençons par étudier la convergence de la suite de fonctions $f_n(x) = xe^{-nx^2}$ sur $[0, 1]$. On vérifie que f_n converge simplement vers 0. On a $\sup\{|f_n(x) : x \in [0, 1]\} = f_n(\frac{1}{\sqrt{2n}}) = \frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}}$ (par exemple en étudiant les variations de f_n). On en déduit que f_n converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$ (**1pt**).

Les suites f_n et $g_n(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sont uniformément bornées sur $[0, 1]$ et convergent uniformément sur $[0, 1]$. D'après le cours, on en déduit que $h_n(x) = f_n(x)g_n(x)$ converge uniformément vers 0 (**0.5pt**).

Lorsqu'on a convergence uniforme, on peut passer à la limite dans l'intégrale (voir cours) et donc (**0.5pt**)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{xe^{-nx^2}}{1+x^2}dx = 0.$$

2. Corrigé de la version 2.

Questions de cours.

(1) Faux. La suite $u_n = n$ n'a pas de valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$. (**1pt**)

(2) Faux. On prend $f_n(x) = (x^2 + \frac{1}{n^2})^{1/2}$ est une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ convergeant simplement vers $f(x) = |x|$ qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$. On a $0 \leq f_n(x) - f(x) \leq \frac{1}{n}$. Donc f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. (**2pt**)

Exercice 1.

(1) $f_n(x) = (\sin x)^n$ converge vers 0 si $x \in [-\pi/4, \pi/2[$ et vers 1 si $x = \pi/2$ (**0.5pt**). Si f_n convergeait uniformément, la limite serait continue en $x = \pi/2$ (car les f_n sont continues en $x = 1$). Ce n'est pas le cas. On a donc convergence simple mais pas uniforme sur $[-\pi/4, \pi/2]$ (**1.5pt**).

(2) $f_n(x) = \frac{n\sin x}{n\cos x+1}$ converge simplement vers $f(x) = \tan x$ sur $[0, \pi/4]$ (**0.5pt**). On a $f_n(x)_f(x) = \frac{-\sin x}{(n\cos x+1)\cos x}$. Ainsi, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{n}$ pour $x \in [0, \pi/4]$ et donc f_n converge uniformément vers f sur $[0, \pi/4]$ (**1.5pt**).

(3) On a $0 \leq f_n(x) = n^2n^2x(1-x^2)^n$ converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$ (**0.5pt**). Si f_n convergeait uniformément vers 0, alors $\int_0^1 f_n(x)dx$ convergerait vers 0 (cf. cours). Or $\int_0^1 f_n(x)dx = [-\frac{n^2}{2(n+1)}(1-x^2)^{n+1}]_0^1 = \frac{n^2}{2(n+1)}$. On n'a donc pas convergence uniforme (**1.5pt**).

Exercice 2. Commençons par étudier la convergence de la suite de fonctions $f_n(x) = xe^{-nx^2}$ sur $[0, 1]$. On vérifie que f_n converge simplement vers 0. On a $\sup\{|f_n(x) : x \in [0, 1]\} = f_n(\frac{1}{\sqrt{2n}}) = \frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}}$ (par exemple en étudiant les variations de f_n). On en déduit que f_n converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$ (**1pt**).

Les suites f_n et $g_n(x) = \frac{1}{1+e^x}$ sont uniformément bornées sur $[0, 1]$ et convergent uniformément sur $[0, 1]$. D'après le cours, on en déduit que $h_n(x) = f_n(x)g_n(x)$ converge uniformément vers 0 (**0.5pt**).

Lorsqu'on a convergence uniforme, on peut passer à la limite dans l'intégrale (voir cours) et donc (**0.5pt**)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{xe^{-nx^2}}{1+e^x}dx = 0.$$