

CHAPITRE I : Fonctions de plusieurs variables.

Exercice 1

Déterminer et représenter les domaines de définition pour chacune des fonctions suivantes.

a. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$. **b.** $f(x, y) = \sqrt{2x + y^2}$. **c.** $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
d. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x + y}}$. **e.** $f(x, y) = \arcsin(x + y)$. **f.** $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$.
g. $f(x, y) = \sqrt{x \sin y} + \ln(x + 5y)$. **h.** $f(x, y) = \ln(1 - xy)$. **i.** $f(x, y) = \ln(x + y^2)$
j. $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$. **k.** $f(x, y, z) = \frac{1}{x + y + |z|}$.

Exercice 2

Dessiner (à l'aide des traces) les graphes des fonctions suivantes :

- $f(x, y) = \cos x$. Décrire précisément les intersections avec les plans d'équation $\{y = k\}$.
- $f(x, y) = 4x^2 + y^2$.
- $f(x, y) = -xy$. Indiquer les courbes de niveau correspondant respectivement à $\{z = 1\}$ et $\{z = -1\}$.
- $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Exercice 3

Déterminer l'ensemble image des fonctions suivantes :

a. $f(x, y) = \cos x$ **b.** $f(x, y) = \ln(2x - y + 1)$. **c.** $f(x, y) = y^2 e^{xy}$. **d.** $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Exercice 4

Représenter graphiquement les champs de vecteurs suivants :

- $\vec{V}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$.
- $\vec{V}(x, y) = (x, y)$.
- $\vec{V}(x, y) = (-y, x)$.
- * $\vec{V}(x, y) = (x^2 + y^2, y)$.
- * $\vec{V}(x, y) = (\sin x, 1)$.

Exercice 5

Déterminer si les fonctions suivantes ont une limite en $(x, y) = (0, 0)$ et donner leurs valeurs si elles existent.

a. $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. **b.** $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$. **c.** $\frac{xy^2 - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
d. $xy \ln(x^2 + y^2)$. **e.** $\frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. **f.** $\frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}$.
g. $\frac{xy^6}{x^6 + y^8}$. **h.** $\frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$. **i.** $\frac{e^{xy}}{\cos^2 x + \sin^2 y}$.
j. $\frac{(x + 2y)^3}{x^2 + y^2}$. **k.** $\frac{xy}{\sinh^2 x + \sinh^2 y}$. **l.** $\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$. **m.** $\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$.