M32-Mécanique, Génie Mécanique, Génie Civil. Exercices 2013/2014

CHAPITRE II : Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables.

Exercice 1
Calculer, en chaque point de leur domaine de définition, les dérivées partielles de premier ordre pour les fonctions suivantes.

a. $3^{x/y}$. **b.** $\cos(x^2+y)$. **c.** $\arctan \dfrac{y}{x^2}$.

d. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x+y^2+z^2}}$. **e.** $y\sin(xz)$.

Exercice 2
1. Calculer pour chacune des fonctions suivantes la dérivée directionnelle dans la direction donnée :

a. $\sin x + \cos y$ en $(0,0)$ dans la direction du vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$ avec $\theta = 0$, $\pi/6$ ou $\pi/3$.

b. $z^2 - x^2 - y^2$ en $(1,0,1)$ dans la direction du vecteur $(4,3,0)$.

c. $xyz - xy - yz - zx + x + y + z$ en $(2,2,1)$ dans la direction du vecteur $(2,2,0)$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$f(x,y) = \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}$, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

a. Montrer que f est continue en $(0,0)$.

b. Montrer que pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul de $\mathbb{R}^2$, la dérivée directionnelle de f en $(0,0)$ suivant $\overrightarrow{v}$ existe et la calculer.

Exercice 3
Trouver l'équation du plan tangent à la surface définie par $z = f(x,y)$ au point $A = (x_0, y_0)$ dans chacun des cas suivants.

a. $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$, $A = (0,1)$.

b. $f(x,y) = 2\cos(x-y) + 3\sin x$, $A = (\pi, \pi/2)$.

c. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $A = (1,2)$.

Exercice 4
Soit (S) la surface d'équation : $z = x^2 + y^2 + x + y - xy = f(x,y)$.

a. Déterminer l'équation du plan tangent à (S) en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

B. Déterminer le point où le plan tangent à (S) est parallèle au plan $z = 0$. Etudier en ce point, la position de (S) par rapport à son plan tangent.

Exercice 5
Calculs d'incertitude

a. Donner une valeur approximative à la variation de $(x+y)/(x-y)$ lorsque x varie de $x = 2$ à $x = 2,5$ et y de 4 à $4,5$.

b. Donner une valeur approchée de $\ln((1,02)^{1/4} + (0,96)^{1/6} - 1)$ et de $e^{0,2}/0,9$.

c. Les longueurs x et y des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont connues avec une précision inférieure ou égale respectivement à h et k. Encadrer l'erreur avec laquelle sera calculée l'aire du triangle.

Exercice 6

La période T d'un pendule, exprimée en secondes, est donnée par la formule $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ où ℓ est sa longueur exprimée en mètres et g l'accélération de la pesanteur en mètres pas seconde au carré.

a. Calculer T pour $\ell = 2m$, $g = 9,81 m/s^2$ et $\pi = 3,14$.

b. Estimer l'incertitude sur T sachant que $\Delta\ell = 10^{-3}m$ et $\Delta g = 10^{-2}m/s^2$.

Pour être plus précis, il faudrait aussi prendre en compte l'incertitude $\Delta\pi = 10^{-2}$. *Que feriez-vous pour prendre en compte cette incertitude supplémentaire ?*

Exercice 7

Deux résistances R_1 et R_2, respectivement de 30Ω et 40Ω sont connues à $0,5\%$.

a. Le montage en séries des résistances R_1 et R_2 fournit une résistance équivalente $R = R_1 + R_2$. Calculer R et estimer la précision du résultat.

b. Reprendre la question précédente, lorsque les résistances sont montées en parallèle, sachant qu'alors $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$.

Exercice 8

Calculer, en chaque point de leur domaine de définition, les dérivées partielles de second ordre des fonctions suivantes.

a. $\dfrac{x-y}{x+y}$. **b.** $y \ln x$. **c.** $e^{-\frac{x^2+y^2}{4z}}$.

Exercice 9

Soit $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

a. Écrire la formule de Taylor au point $(0, 0)$ à l'ordre 2 de f.

b.. Déterminer les points critiques de f et leurs natures.

Exercice 10

1. Pour chacune des fonctions suivantes étudier la nature du point critique donné :

a. $x^2 + y^2 - xy$ en $(0, 0)$.

b. $x^2 + 2xy + y^2 + 6$ en $(0, 0)$.

c. $x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ en $(0, 0)$.

2*. Trouver les points critiques de la fonction f suivante et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle :

$$f(x, y) = \sin(xy) + y^2 - 2y + 1.$$

Exercice 11

a. Reprendre la question a. de l'exercice 3 et discuter la position du plan tangent par rapport au graphe de f au point considéré.

b. Retrouver à l'exercice 4 la position de la surface (S) par rapport à son plan tangent au point considéré.