Math 32. Exercices 2013/2014

III : Matrice Jacobienne - C^1-difféomorphismes - Equations aux dérivées partielles

Matrice Jacobienne - C^1-difféomorphismes

Exercice 1

Considérons la fonction f définie sur $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ par $f(x, y) = (\dfrac{x^2}{2y}, \dfrac{y^2}{2x})$.

a. Ecrire la matrice jacobienne de f sur E.

b. Montrer que f est une bijection de E sur E.

c. On pose $g = f^{-1}$. Déterminer g et écrire sa matrice jacobienne sur E.

Exercice 2

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(x, y) = (x + y, x + my)$, où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

a. A quelle condition la matrice jacobienne de ϕ est-elle injective ?

b. A quelle condition ϕ est-il un changement de variables ou C^1-difféomorphisme ?

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y, z) = (x + y^2, xy^2z)$.

a. Ecrire la matrice jacobienne de f au point (x, y, z).

b. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $g(u, v) = (u^2 + v, uv, e^v)$. Ecrire la matrice jacobienne de g au point (u, v).

c. Ecrire la matrice jacobienne de $g \circ f$ au point (x, y, z).

Exercice 4

Trouver un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ tel que l'application $\phi : U \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (x - y, xy)$ soit un C^1-difféomorphisme de U sur $\phi(U)$.

Equations aux Dérivées Partielles du premier ordre

Exercice 5

Soit $V = \mathbb{R}\times]0, +\infty[$ et $\phi : \mathbb{R}^2 \to V$ définie par $\phi(x, y) = (xe^y, e^y)$.

1. Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme et déterminer son application réciproque $\phi^{-1}(u, v)$.
2. On cherche les solutions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad x\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = -xe^y.$$

3. On pose $f(x, y) = g(u, v) = g(xe^y, e^y)$ avec $(u, v) = (xe^y, e^y)$.
   (a) Trouver l'équation aux dérivées partielles (2) que vérifie g.
   (b) Résoudre l'équation (2) pour g et en déduire les solutions f de l'équation (1) .

Exercice 6
Soit $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ et $\phi : U \to \mathbb{R}^2$ définie par : $\phi(x,y) = (xy, \frac{y}{x})$.

a. Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme de U sur U.

b. A $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ on associe $g \in C^1(U,\mathbb{R})$ définie par $f(x,y) = g(xy, \frac{y}{x})$ pour tout $(x,y) \in U$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que f soit solution de l'équation :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \quad (E).$$

c. Déduire de **b.** les solutions de (E) sur U.

Exercice 7

1. Soit a un réel fixé. Résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) : $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = a.f$ sur $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, en passant en coordonnées polaires.

2. On considère l'équation aux dérivées partielles (E) : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

a. Résoudre (E) à l'aide du changement de variables $(u = x, v = \frac{y}{x})$.

b. Résoudre (E) en passant en coordonnées polaires.

Exercice 8
Résoudre les équations aux dérivées partielles d'inconnue $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur l'ouvert indiqué U et à l'aide du changement de variables fourni (u,v) :

a. $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2y\,;$ $\qquad U = \mathbb{R}^2 \qquad (u = x, v = x + 2y)$
b. $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1\,;$ $\qquad U = \mathbb{R}^2 \qquad (u = x - y, v = x + y)$
c. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^4 + y^4}\,;$ $\qquad U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \qquad (u = \frac{y}{x}, v = x^2 + y^2)$

Exercice 9*
Soit $U_1 = \{(x,y) \in R^2 : y > x\}$ et $\phi : U_1 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $\phi(x,y) = (xy, x+y)$.

1. a. Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme de U_1 sur $\phi(U_1)$ que l'on déterminera.

b. A $f \in C^1(U_1,\mathbb{R})$ on associe $g \in C^1(U_1,\mathbb{R})$ définie par $f(x,y) = g(xy, x+y)$ pour tout $(x,y) \in U_1$.

Donner une CNS sur g pour que f soit solution de l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3(y-x)f \;\; (E)$.

c. Déduire de **b.** les solutions de (E) sur U.

2. Sans refaire les calculs, donner les solutions de (E) sur $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$.

3. En étudiant les " raccords" sur la droite d'équation $x = y$ d'une solution de (E) sur U_1 et d'une solution de (E) sur U_2, trouver les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^2$.