Math 32. Exercices 2013/2014
V : Intégrales doubles

Exercice 1

Calculer

1. $\displaystyle\iint_D x\cos(xy)dxdy$, $D = \{(x,y)|1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$;
2. $\displaystyle\iint_R r^2\cos\theta dr d\theta$, $R = \{(r,\theta)|0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$;
3. le volume délimité par le paraboloïde d'équation $2x^2 + y^2 + z = 9$, les trois plans coordonnées et les plans d'équations $x = 1$ et $y = 1$;
4. le volume qui se trouve sous le plan d'équation $3x+2y+z = 12$ et au dessus du rectangle $R = [0,1]\times[-2,3]$;

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^x dxdy.$
2. $\displaystyle\int_0^\pi\int_0^{\cos\theta} r\sin\theta dr d\theta.$

Exercice 3

Calculer

1. $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dx\,dy$, où D est le triangle de sommets $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(1,1)$;
2. $\displaystyle\iint_D xy^2 dx\,dy$, où D est le losange de sommets $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(0,2)$ et $D(-1,1)$.

Exercice 4

On pose

$$D = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 1 \leq x+y \leq 4\} \quad \text{et} \qquad f(x,y) = \frac{1}{(x+y)(x^2+1)}.$$

1. Dessiner le domaine D.
2. Donner les deux écritures du théorème de Fubini pour $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)dx\,dy$.
3. Calculer I.

Exercice 5

Dessiner puis calculer l'aire de la partie de $\mathbb{R}^2$ délimitée par les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = 2x+3$.

Exercice 6

Calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_D f(x,y)dx\,dy$.

1. $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}$, $D = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.

2. $f(x,y) = e^{y^2}$, $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq y \leq 1\}$.
3. $f(x,y) = x^2$, D est la région du premier quadrant délimitée par l'hyperbole $xy = 16$ et les droites $y = x$, $y = 0$ et $x = 8$.
4. $f(x,y) = x$, D est la région délimitée par $y = x^2$ et la droite $y = x$.
5. $f(x,y) = y$, D est la région délimitée par $y = 0$, $y^2 = 4x$ et $y^2 = 5 - x$.

Exercice 7

1. Calculer le volume du solide contenu dans la boule de centre $(0,0)$ et de rayon 4 et à l'extérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 4$. (*Indication : figure et polaires*).
2. Calculer $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x+y}{x-y}} dx\, dy$, où D est le trapèze de sommets $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ et $(0,-1)$, en utilisant le changement de variables : $(u = x + y, v = x - y)$.
3. Calculer $\displaystyle\iint_D xydx\, dy$, où D est la région du premier quadrant délimitée par les hyperboles $xy = 1$ et $xy = 3$ et les droites $y = x$ et $y = 3x$, en utilisant le changement de variables : $(x = \frac{u}{v}, y = v)$.

Exercice 8

Calculer l'intégrale curviligne suivante en en utilisant Green-Riemann

1. $\int_\Gamma (xy^2\vec{i} - yx^2\vec{j}).d\vec{\gamma}$ où γ est un arc paramétré décrivant $x^2+y^2-2y = 0$ parcouru dans le sens trigonométrique ;
2. $\int_\Gamma ((2xy - x^2)\vec{i} + (x + y^2)\vec{j}).d\vec{\gamma}$ où γ est un arc paramétré décrivant dans le sens trigonométrique le bord du domaine délimité par $y = x^2$ et $x = y^2$.
3. $\int_\Gamma ((x^2 + y^2)\vec{i} + (x + y)^2\vec{j}).d\vec{\gamma}$ où γ est un arc paramétré décrivant dans le sens trigonométrique le triangle de sommets $A = (1,1)$, $B = (2,2)$, $C = (1,3)$.

Exercice 9

Calculer de deux manières différentes

1. $\iint_D xydxdy$ avec $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 1\}$.
2. $\iint_D (x^2 - y^2)dxdy$ avec $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$.

Exercice 10

Calculer les aires suivantes

1. surface délimitée par l'arc paramétré $\gamma(t) = (\sin^3 t, \cos t(1 + \sin^2 t))$;
2. surface délimitée par l'arc paramétré $\gamma(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$;
3. aire intérieure à la courbe $r(\theta) = a(1 + \cos\theta)$;
4. aire intérieure à la courbe $r(\theta) = \sqrt{\cos 2\theta}$.