Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2011/2012 – Licence M, GM, GC, EEA, PEIP – Semestre 3
Éléments de Calcul Différentiel – Math 32

Devoir surveillé
5 Novembre 2011. **Durée : 2h.**
Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits**.

Barème indicatif : 4+4+4+4+4=20. *On justifiera ses réponses soigneusement.*

Questions de Cours.

(1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Donner la définition de $\frac{\partial f}{\partial x}$ au point (a,b).

(2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Donner la définition de la matrice jacobienne au point (a,b).

Exercice 1

On considère la fonction définie par
$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x-y^2}}.$$

(1) Déterminer puis dessiner le domaine de définition de f.

(2) Déterminer puis dessiner les lignes de niveau 1 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de f.

(3) Déterminer le point de la ligne de niveau 1 en lequel le vecteur gradient de f est colinéaire au vecteur $(-1,1)$, puis dessiner le vecteur gradient de f en ce point.

Exercice 2

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

(1) $f(x,y) = (x^2+y)\sin(\dfrac{1}{x^2+y^2})$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

(2) $g(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sin(x^2+y^2)}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

(3) $h(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

Exercice 3

On considère la fonction définie par

$$f(x,y) = xy + 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

(1) Déterminer le domaine de définition de f.

(2) Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f.

(3) Déterminer la nature de ce(s) point(s) critique(s).

Exercice 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = xye^{-x^2y^n}.$$

(1) Pour $n = 1$, donner l'équation du plan tangent à f en $\left(2, \frac{1}{4}\right)$.

(2) Pour $n = 1$, déterminer le(s) point(s) (a,b) où le plan tangent à f est parallèle au plan $z = 0$.

(3) Pour quel(s) entier(s) n, le plan tangent en $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est-il parallèle au plan $z = 0$?