Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2011/2012 – Licence M, GM, GC, EEA, PEIP – Semestre 3
Éléments de Calcul Différentiel – Math 32

Devoir surveillé
6 Mars 2012. **Durée : 2h.**
Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits**.

Barème indicatif : 4+4+4+4+4=20. *On justifiera ses réponses soigneusement.*

Questions de Cours.

(1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Donner l'équation du plan tangent à f en (a,b).
À quelle condition sur (a,b), le plan tangent à f est-il parallèle au plan $z=0$?

(2) Sans justification, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (0,5 point par bonne réponse, -0,25 par réponse incorrecte)
  (a) Le domaine de définition de $f(x,y)=\sqrt{xy}$ est $\mathbb{R}_+$;
  (b) L'image de $f(x,y)=e^{x+y}$ est un sous ensemble de $\mathbb{R}$;
  (c) Soit f une fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2-(0,0)$. Si $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 1$, alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$;
  (d) Le point $(0,0)$ est un point critique de la fonction $f(x,y)=x^2+y$.

Exercice 1

Étudier l'existence des limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

(1) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;
(2) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$;
(3) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{(x+y)^2+(x-y)^2}$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, dessiner le domaine D, calculer son aire et calculer l'intégrale de f sur D :

(1) $f(x,y) = x\exp(xy)$ et $D = \{(x,y) : 1 \le x \le 1/y \text{ et } 1/4 \le y \le 1\}$.
(2) $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$ et $D = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 2,\ y \ge x \text{ et } y \ge -x\}$.

Exercice 3

Soit a appartenant à $\mathbb{R}$. On considère le champs de vecteurs

$$\vec{V}(x,y) = (x - ay)\vec{\imath} + (3y - 2x)\vec{\jmath}.$$

On note $O = (0,0)$, $A = (2,4)$ et $B = (2,0)$.

(1) Justifier que $\vec{V}$ ne dérive pas d'un potentiel si $a = 3$.

(2) Supposons de nouveau que $a = 3$. Calculer l'intégrale curviligne de $\vec{V}$ le long des chemins suivants

  (a) le segment $[O, A]$;

  (b) le chemin composé des segments $[0, B]$ et $[B, A]$.

(3) Retrouver le résultat de la question (1) à partir de la question (2).

(4) Déterminer a pour que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel. Déterminer alors un potentiel f dont dérive $\vec{V}$.

Exercice 4

On considère la fonction de deux variables.

$$f(x,y) = \cos x + y^2 - 2y + 2.$$

(1) Déterminer l'ensemble des points critiques de f.

(2) Déterminer la nature de chaque point critique.