

Université des Sciences et Technologies de Lille
2012/2013 – Licence EEA, GC, GM, M, P, PC, PEIP – Semestre 3
Éléments de Calcul Différentiel – Math 32

Devoir surveillé

27 Octobre 2012. **Durée : 2h.**

Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits.**

Barème indicatif : $4+4+4+4+4=20$. *On justifiera ses réponses soigneusement.*

QUESTIONS DE COURS.

A. QCM. Recopier sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à ce que vous estimez être la bonne réponse. Bonne réponse : +0,5 point. Mauvaise réponse :-0,5 point.

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- (1) Si $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t)$, alors
 - (a) la limite de f en $(0, 0)$ existe
 - (b) la limite de f en $(0, 0)$ n'existe pas
 - (c) on ne peut rien conclure.
- (2) Une ligne de niveau de f est un sous-ensemble de
 - (a) \mathbb{R}
 - (b) \mathbb{R}^2
 - (c) \mathbb{R}^3 .
- (3) Le domaine de définition de $g(x, y) = \sqrt{x^2 y}$ est
 - (a) \mathbb{R}_+
 - (b) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$
 - (c) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.
- (4) L'image de $g(x, y) = \sqrt{x^2 y}$ est
 - (a) \mathbb{R}_+
 - (b) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$
 - (c) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

B. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Donner la définition d'un point critique de f .

EXERCICE 1

On pose

$$f(x, y) = \sqrt{1 + y + x^3}.$$

- (1) Déterminer le domaine de définition de f puis le dessiner.
- (2) Déterminer et dessiner les lignes de niveau 1 et $\sqrt{3}$ de f .

EXERCICE 2

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0, 0)$?

$$(1) f(x, y) = \ln \left(1 + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right);$$

$$(2) f(x, y) = \exp \left(\frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6} \right);$$

$$(3) f(x, y) = \frac{xy}{|x| + y^2}.$$

EXERCICE 3

On considère la fonction

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}.$$

- (1) Déterminer le domaine de définition de f et le dessiner.
- (2) Déterminer l'équation du plan tangent en (a, b) .
- (3) Existe-t-il un point (a, b) pour lequel le plan tangent est parallèle à $z = 0$? *On justifiera sa réponse.*

EXERCICE 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère

$$f(x, y) = x^n(y + xy + 1).$$

- (1) Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f .
- (2) Pour le(s) point(s) critique(s) vérifiant $x = -1$, déterminer la nature du point critique.