Université des Sciences et Technologies de Lille

U.F.R. de Mathématiques

Licence GC, GM, M, PEIP - Semestre 3

Maths 32 - Éléments de Calcul Différentiel

Devoir Surveillé 2

06 janvier 2014 - Durée : 2H

On rappelle que les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits et que le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié.

Barème indicatif : 4+6+6+4. *On justifiera ses réponses soigneusement.*

Questions de Cours.

1. Énoncer le théorème de Green-Riemann.
2. Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ dont le bord est un arc paramétré Γ de classe $\mathcal{C}^1$ orienté dans le sens direct et soit $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs défini par
$$\overrightarrow{V}(x,y) = -\frac{y}{2}\vec{i} + \frac{x}{2}\vec{j}.$$
   (a) Montrer que l'aire de D est donnée par $\text{Aire}(D) = \displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{V} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\gamma}$.

   (b) Utiliser ce résultat pour calculer l'aire du disque de centre $(0,0)$ et de rayon $R > 0$.

Exercice 1

Soient $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$ et $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\Phi(x,y) = (x+y, yx)$.

1. Montrer que Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur l'ensemble V défini par
$$V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 - 4v > 0\}.$$
   Donner l'application réciproque Φ^{-1}.
2. On considère l'équation aux dérivées partielles suivante :
$$(E) \quad x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2.$$
   À une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U solution de (E) sur U, on associe la fonction g définie sur V par $f(x,y) = g(x+y, yx)$.

   (a) Donner l'équation (E') satisfaite par g.

   (b) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E) sur U.

Exercice 2

Soit $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^2$ par $\overrightarrow{V}(x,y) = xy^2\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{V}$ ne dérive pas d'un potentiel sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{V} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\gamma}$ lorsque
   (a) Γ et le segment de droite $[OA]$ avec $A = (1,1)$ parcouru de O vers A.
   (b) $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \text{ et } 0 \leq x \leq 1\}$ parcouru dans le sens direct.

   Retrouver le résultat de la première question.
3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On pose
$$\overrightarrow{W}(x,y) = \mathrm{e}^{g(x)}\overrightarrow{V}(x,y).$$
   (a) Quelle condition doit vérifier g pour que $\overrightarrow{W}$ dérive d'un potentiel sur $\mathbb{R}^2$?
   (b) Déterminer la fonction g vérifiant la condition précédente avec $g(0) = 0$.
   (c) Calculer alors les potentiels dont dérive $\overrightarrow{W}$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{W} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\gamma}$, où Γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 parcouru dans le sens trigonométrique.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, dessiner le domaine D, calculer son aire et calculer l'intégrale de f sur D :

1. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x \leq y \leq x \text{ et } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\right\}$ et $f(x,y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$.
2. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq \dfrac{2}{x} \text{ et } 1 \leq x\right\}$ et $f(x,y) = y\mathrm{e}^{xy}$.