Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2013/2014 – Licence GC, GM, Mécanique, PEIP – Semestre 3
Éléments de Calcul Différentiel – Math 32
Examen de rattrapage
10 Juin 2014. **Durée : 2h.**

On rappelle que les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits et que le barème n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié.
Barème indicatif : 3+4+4+4+5=20. *On justifiera ses réponses soigneusement.*

Questions de Cours.

A. Sans justification, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses ($+0,5$ par réponse correcte et $-0,25$ par réponse incorrecte).

(1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$ et $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$, alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(2) Le plan tangent au graphe de la fonction $f(x,y) = x^2 - y^2$ en $(0,0)$ est parallèle au plan d'équation $z = 0$.

(3) Le point $(0,0)$ est un minimum local de $f(x,y) = x^2 - y^2$.

(4) On pose $D = [0,1] \times [0,1]$. Alors $\displaystyle\iint_D e^{x+y}dxdy = \left(\int_0^1 e^t dt\right)^2$.

B. Énoncer le théorème de Poincaré.

Exercice 1

Étudier l'existence des limites en $(0,0)$ de la fonction f dans les cas suivants :

(1) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

(2) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+|y|}$.

(3) $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

Exercice 2

Soit $f(x,y) = x^2 - 2x - \cos y$.

(1) Déterminer l'ensemble des points critiques de f.

(2) Déterminer la nature de chaque point critique.

Exercice 3

Calculer les intégrales doubles suivantes (on dessinera les domaines d'intégration D) :

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^3}dxdy$ où $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 1 \text{ et } x+y \leq 3\}$;

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{1+(x^2+y^2)^2}dxdy$ où $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 3 \text{ et } -y \leq x \leq y\}$.

Exercice 4

On considère le domaine D de $\mathbb{R}^2$ suivant

$$D = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,2] \mid y^2 \geq 4x\}.$$

On note $A = (0,2)$ et $B = (1,2)$, et $\Gamma_1 = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,2] \mid y^2 = 4x\}$ la courbe parcourue de B vers l'origine $O = (0,0)$.

Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs défini par $\vec{V}(x,y) = \dfrac{2-y}{1+y^3}\vec{i} - \dfrac{2xy^2(3-y)}{(1+y^3)^2}\vec{j}$.

(1) Représenter le domaine D, et la courbe Γ_1.

(2) Donner une paramétrisation $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^2$ de la courbe Γ_1 et une paramétrisation $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^2$ du segment $[A,B]$.

(3) Calculer l'intégrale curviligne $I_2 = \displaystyle\int_{\Gamma_2} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}_2$, où Γ_2 est l'arc paramétré (I_2, γ_2).

(4) Calculer l'intégrale double $J = \displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+y^3)^2}dxdy$.

(5) En déduire la valeur de l'intégrale curviligne $I_1 = \displaystyle\int_{\Gamma_1} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}_1$.