UFR de Mathématiques

Travaux Dirigés - M35

Complément de mathématiques

PEIP - Semestre 3

Septembre 2015

Calcul Matriciel

Exercice 1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on pose

$$v_1 = (1, 2, -1), \quad v_2 = (-2, -4, 1)$$

et on considère les sous-espaces vectoriels

$$E_1 = \text{Vect}(v_1, v_2) \quad \text{et} \quad E_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - 3z = 0\right\}.$$

1. Déterminer une base de chacun des sous-espaces E_1, E_2, $E_1 \cap E_2$ et $E_1 + E_2$.
2. La somme $E_1 + E_2$ est-elle directe ?

Exercice 2. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits AB, $(AB)C$, BC et $A(BC)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les produits $A \times B$ et $B \times A$.
2. En déduire que la matrice A est inversible. Quelle est son inverse ?

Exercice 4. En résolvant un système, montrer que la matrice M est inversible et calculer son inverse dans les cas suivants :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 - A - 4I_3 = (0)$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A$, et en déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 7. Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On pose $N = T - 2I_3$.

1. Calculer N^2 et N^3. Que dire de N^k pour tout entier naturel $k \geq 3$.
2. Calculer T^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ (ind. utiliser la formule du binôme de Newton).

Exercice 8. Soient $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_2 - e_3, \quad f(e_2) = e_2 - e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_1 - e_2 + 2e_3.$$

On pose $u_1 = e_1 - e_2$, $u_2 = e_1 + e_3$ et $u_3 = e_1 - e_2 + 2e_3$.

1. Donner la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.
2. Exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction de u_1, u_2, u_3. En déduire que $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2 et u_3. Donner la matrice B de f dans la base $\mathscr{B}'$.
4. On considère la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Justifier que P est inversible et donner P^{-1}.
   (b) Rappeler et vérifier la relation entre A, B, P et P^{-1}.

Déterminants

Exercice 1. Sans les développer, montrer que les déterminants suivants sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 13 & 52 & 47 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+1 & a+2 & a+3 \\ a+2 & a+3 & a+4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2. Sachant que 546, 273, 169 sont divisibles par 13, montrer, sans le calculer, que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

est un multiple de 13.

Exercice 3. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 4. En présentant les résultats sous forme factorisée, calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2-x^2 & 4 \\ 2 & 2 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 5.

1. Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.
2. Etudier la liberté de la famille de vecteurs $\{v_1, v_2, v_3\}$ où

$$v_1 = (1,1,1); \quad v_2 = (1,2,3) \quad v_3 = (1,4,a).$$

Exercice 6. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre, en utilisant les formules de Cramer, les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+2y+2z &= 0 \\ 2x+y+3z &= -1. \end{cases} \qquad \begin{cases} ax+y+z &= 1 \\ x+ay+z &= b \\ x+y+az &= 1. \end{cases}$$

Exercice 7. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 2$, on considère la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} a+(n-1) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a+(n-1) & a & 1 & \dots & 1 \\ a+(n-1) & 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ a+(n-1) & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

   puis calculer $\det(A_n)$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de a, la matrice A_n est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse lorsque $n = 3$.
3. On suppose que $a = 1 - n$. Calculer $\det(A_{n-1})$ et en déduire le rang de A_n.
4. En déduire, selon les valeurs de a, le rang de A_n.

Exercice 8. Soit $(a, x) \in \mathbb{R}^3$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on note A_n le déterminant suivant :

$$A_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

1. Calculer A_2 et A_3.
2. Montrer que, pour $n \geq 3$, $A_n = aA_{n-1} - xa^{n-2}$. En déduire une expression de A_n en fonction de n, a et x.

Exercice 9. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que $V(a_1, a_2) = a_2 - a_1$ et que, pour $n \geq 3$,

$$V(a_1, \dots, a_n) = V(a_2, \dots, a_n) \prod_{k=2}^{n} (a_k - a_1).$$

2. En déduire que $V(a_1, \dots, a_n) = \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.
3. Pour $i = 0, \dots, n-1$, on note par P_i un polyôme unitaire de degré i. Montrer que

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} P_0(a_1) & P_1(a_1) & \dots & P_{n-1}(a_1) \\ P_0(a_2) & P_1(a_2) & \dots & P_{n-1}(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0(a_n) & P_1(a_n) & \dots & P_{n-1}(a_n) \end{vmatrix}.$$

Diagonalisation

Exercice 1. Diagonaliser la matrice carrée A et en déduire le calcul de A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 6 & 4 & -12 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Pour quelles valeurs des réels a, b et c les matrices A et B suivantes sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Déterminer le réel a pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$ admette 2 comme valeur propre et la diagonaliser alors.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

Exercice 5. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Rien qu'en examinant la matrice A, déterminer des vecteurs v_1, v_2 et v_3 tels que

$$Av_1 = v_1, \quad Av_2 = (1+a)v_2 \quad \text{et} \quad Av_3 = (1-a)v_3.$$

2. En déduire que A est diagonalisable, et diagonaliser A.
3. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle inversible ?

Exercice 6. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer en fonction de a les valeurs propres de f, leurs multiplicités et les sous-espaces propres associés. Que peut-on en conclure ?
2. Pour quelles valeurs de a, f est-il un automorphisme ?

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$f : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto (2X+1)P - (X^2-1)P'.$$

1. Donner la matrice A de f dans la base $\{1, X, X^2\}$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Sans calculer le polynôme caractéristique de A, montrer que 0 est une valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
2. Que vaut la multiplicité de 0 ? En déduire le spectre de A.
3. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
4. Calculer A^2. Donner un polynôme annulateur de A de degré 2, et retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Sans calculer A^2 et A^3, montrer que $A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = 0$.
2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 10. Donner un polynôme annulateur de A, en déduire que A est inversible et expliciter A^{-1} dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 2A^2 - A + 2I_n = 0$. Montrer que A et diagonalisable, et donner un ensemble fini contenant les valeurs propres de A.

Exercice 12. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et donner un polynôme annulateur de A de degré 3.
2. En déduire que A est diagonalisable.
3. Sans calculer le polynôme caractéristique de A, donner un ensemble fini contenant les valeurs propres de A, puis déterminer les valeurs propres de A ainsi que leurs multiplicités.
4. En déduire le polynôme caractéristique de A.

Trigonalisation et systèmes différentiels

Exercice 1. Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \\ -3 & 3 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont-elles trigonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 2. Trigonaliser les matrices suivantes dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f, et justifier que
$$\mathbb{R}^3 = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(f - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2.$$
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ par rapport à laquelle la matrice de f est
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
3. En déduire le calcul de A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 & -6 \\ -6 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f, et justifier que
$$\mathbb{R}^4 = \ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})^2 \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})^2.$$
2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de f.
3. Donner une base de $\mathbb{R}^4$ par rapport à laquelle la matrice T de f est triangulaire supérieure.
4. Déterminer la décomposition de Dunford de T, et calculer A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ a & 2+a & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A admet-elle trois valeurs propres distinctes ? Que peut-on conclure dans ce cas ?
3. On suppose que $a = -3$. Montrer que A est diagonalisable, on donnera une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
4. On suppose que $a = -1$.
   (a) Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
   (b) Donner une matrice Q inversible de sorte que $B = Q^{-1}AQ$ soit triangulaire supérieure.
   (c) En déduire la décomposition de Dunford de B et le calcul de A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Déterminer les suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n, \text{où } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Résoudre le système différentiel $Y' = AY$ dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre le système différentiel $X' = AX$ avec la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Résoudre le système différentiel $X' = AX + B$ avec $B(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y''' + y'' + y' + y = 0.$$

En déduire la solution particulière y_0 telle que

$$y_0(0) = 1 \quad \text{et} \quad y_0'(0) = y_0''(0) = 0.$$

Intégrales généralisées

Exercice 1. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes et les calculer lorsqu'elles convergent :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \ln x \mathrm{d}x \ , \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} \ , \qquad I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} \ ,$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \ , \qquad I_5 = \int_0^1 \frac{x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x \ , \qquad I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}} \ ,$$

$$I_7 = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x \ , \quad I_8 = \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \ , \quad I_9 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \ ,$$

$$I_{10} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \ , \qquad I_{11} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}} \ , \qquad I_{12} = \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^4} \ .$$

Exercice 2.

1. Soit λ un nombre complexe. Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{d}x$ en précisant sa valeur en cas de convergence.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Etudier la nature des intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\mathrm{d}x$ et les calculer en cas de convergence.

Exercice 3.

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ est convergente.
2. A l'aide d'un changement de variables, exprimer $\displaystyle I_2 = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ en fonction de I_1.
3. En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ est convergente, et donner sa valeur.
4. Soit $a > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi \ln a}{2a}$.

Exercice 4. Sans les calculer, montrer que les intégrales généralisées suivantes sont convergentes, et puis les calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)} \ , \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x+2)} \ , \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+2)} \ .$$

Exercice 5. Par comparaison, étudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}\ , \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin\sqrt{1-x^4}}\ , \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \cos x}\ ,$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\ , \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x\ , \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}\ .$$

Exercice 6. Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\ln(1+\sqrt{x})}\mathrm{d}x\ , \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x-1)}{(x^2-1)^{\frac{4}{3}}}\mathrm{d}x, \quad \int_1^2 \frac{\cos x}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x.$$

Exercice 7.

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ est convergente.
2. Vérifier que $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leq \sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2} \leq |\sin x|$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ est semi-convergente.
4. Soit $\alpha \in]0,1]$. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ est semi-convergente.
5. A l'aide d'un changement de variable convenable, montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\sin(x^2)\mathrm{d}x$$

est semi-convergente.

Exercice 8 (Loi Exponentielle). Une variable aléatoire Z suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité est donnée par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ sur $[0; +\infty[$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que cette densité définit bien une loi de probabilité, à savoir

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = 1.$$

2. Montrer qu'une variable aléatoire Z de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ admet une espérance et un moment d'ordre 2, à savoir les intégrales généralisées

$$\mathbb{E}[Z] := \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \ \text{ et } \ \mathbb{E}[Z^2] := \int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$$

convergent. Puis donner leurs valeurs.