Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2010/2011 – Licence Mécanique – Semestre 4
Compléments d'analyse réelle – Math 203'

Corrigé de l'interrogation 2

Questions de cours

D'après le théorème de Parseval, on sait que

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Ainsi, en utilisant l'hypothèse, on trouve que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = 0$. Comme f est continue, on peut en déduire que $f = 0$.

Exercice 1

(1) On a, pour $x > 0$,

$$0 \leq f_n(x) = e^{-n^2 x} \leq (e^{-x})^n.$$

Pour $x > 0$, ceci définit une série géométrique de raison strictement plus petite que 1. Donc, par comparaison, la série converge pour $x > 0$.

(2) On vérifie qu'on est bien dans le cadre d'application du théorème du cours. Tout d'abord, on peut noter que $\sum_{n\geq 1} f_n(1)$ converge et que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. On fixe maintenant $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Sur cet intervalle, $|f_n'(x)| \leq n^2(e^{-a})^n$ qui est un majorant indépendant de x. Or, on a $n^2 e^{-an} = \mathcal{O}(1/n^2)$. Ceci permet de vérifier qu'on a convergence normale (et donc uniforme) de la série $\sum f_n'$ sur $[a, b]$. On peut donc appliquer le théorème du cours pour conclure.

(3) On procède par récurrence. On va démontrer que pour tout $k \geq 1$, $f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et que $f^{(k)}(x) = \sum_{n\geq 0} f_n^{(k)}(x)$. C'est vrai pour $k = 1$. Supposons que c'est vrai au rang k fixé. On applique alors le théorème de dérivation pour montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n^{(k)}(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (même méthode qu'à la question 2) et que $(\sum_{n\geq 0} f_n^{(k)}(x))' = \sum_{n\geq 0} f_n^{(k+1)}(x)$. Ceci permet de vérifier que l'hypothèse est vraie au rang $k + 1$.

Exercice 2

(1) On peut tracer le graphe de f avant tout calcul. On remarque en particulier que $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ sur $[\pi, 2\pi[$.
Comme f est impaire, $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Il reste donc à calculer les $b_n(f)$. On trouve alors

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin(nx)dx = -\frac{1}{n\pi}\left[\frac{\pi - x}{2}\cos(nx)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nx)dx = \frac{1}{n}.$$

(2) Le premier théorème de Dirichlet s'applique car f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

(3) Si on avait convergence uniforme, on aurait que la somme est continue en 0. Ce n'est pas le cas puisque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\sum_n f_n(0) = 0$.