

Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2010/2011 – Licence Mécanique – Semestre 4
Compléments d'analyse réelle – Math 203'

Interrogation 1

9 Mars 2011 à 11h15. **Durée : 1h.**

Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits.**

Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses.
Barème indicatif : 3+6+2.

QUESTIONS DE COURS.

Dire (en justifiant proprement votre réponse) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

- (1) Si $(u_n)_n$ est une suite réelle vérifiant $|u_{n+1} - u_n| \rightarrow 0$, alors u_n converge dans \mathbb{R} .
- (2) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues sur I convergeant en moyenne quadratique vers f sur I , alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I .

EXERCICE 1

Étudier la convergence (simple, uniforme) des suites de fonctions suivantes :

- (1) $f_n(x) := \sin(x^n)$, $x \in [-1/2, 1]$;
- (2) $f_n(x) := \frac{ne^x}{n(x^2+1)+1}$, $x \in [-1, 1]$;
- (3) $f_n(x) := n^2(\tan x)^n(1 + \tan^2 x)$, $x \in [0, \pi/6]$.

EXERCICE 2

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{xe^{-nx^2}}{1+x^2} dx.$$

On pourra étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $x \mapsto xe^{-nx^2}$.