

**Université des Sciences et Technologies de Lille 1**  
**2010/2011 – Licence Mécanique – Semestre 4**  
**Compléments d'analyse réelle – Math 203'**

**Interrogation 1**

9 Mars 2011 à 11h15. **Durée : 1h.**

Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits.**

Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses.  
Barème indicatif : 3+6+2.

QUESTIONS DE COURS.

Dire (en justifiant proprement votre réponse) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

- (1) Une suite réelle a toujours au moins une valeur d'adhérence dans  $\mathbb{R}$ .
- (2) Si  $(f_n)_n$  est une suite de fonctions  $\mathcal{C}^1$  convergeant uniformément vers  $f$  sur  $I$ , alors  $(f'_n)_n$  converge uniformément vers  $f'$  sur  $I$ .

EXERCICE 1

Étudier la convergence (simple, uniforme) des suites de fonctions suivantes :

- (1)  $f_n(x) := (\sin x)^n$ ,  $x \in [-\pi/4, \pi/2]$ ;
- (2)  $f_n(x) := \frac{n \sin x}{n \cos x + 1}$ ,  $x \in [0, \pi/4]$ ;
- (3)  $f_n(x) := n^2 x(1 - x^2)^n$ ,  $x \in [0, 1]$ .

EXERCICE 2

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x e^{-nx^2}}{1 + e^x} dx.$$

*On pourra étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions  $x \mapsto x e^{-nx^2}$ .*