

Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2011/2012 – Licence Mécanique – Semestre 4
Introduction à l'analyse réelle

Interrogation 1

20 avril 2012 à 9h. **Durée : 1h.**

Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits**.

Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses.
Barème indicatif : 2+4+4.

QUESTION DE COURS.

- (1) Donner un exemple de série de fonctions simplement convergente mais pas normalement convergente sur $[0, 1[$.
- (2) Donner l'expression des coefficients de Fourier exponentiels pour une fonction f continue et 1-périodique.

EXERCICE 1

Dire si les suites de fonctions suivantes sont simplement (resp. uniformément) convergentes sur les intervalles correspondants.

- (1) $f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{1+nx}$, $x \in [0, +\infty[$;
- (2) $f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x^2}$, $x \in [1, +\infty[$.

EXERCICE 2

On pose, pour x dans $]0, +\infty[$ et $n \geq 0$,

$$f_n(x) = e^{-\sqrt{nx^2}}.$$

- (1) Démontrer la convergence simple de la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ sur $]0, +\infty[$.
- (2) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$