

Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2012/2013 – Licence Mécanique – Semestre 4
Introduction à l'analyse réelle

Interrogation 1

29 Avril 2012 à 14h45. **Durée : 1h.**

Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits.**

Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses.
Barème indicatif : 1+4+5.

QUESTION DE COURS.

Donner les coefficients de Fourier a_n , b_n et c_n des fonctions 2π périodiques suivantes :

$$f(x) = (\cos x)^2 \text{ et } g(x) = \sin x \times \cos x.$$

EXERCICE 1

On pose, pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x^n \sin(nx)}{n}.$$

(1) Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $] -1, 1[$.

(2) Soit $0 < a < 1$. Montrer que $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur $[-a, a]$.

(3) Conclure que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$.

EXERCICE 2

On considère la fonction 2π -périodique qui vérifie, pour tout x dans $[-\pi, \pi[$,

$$f(x) = \sin \frac{x}{2}.$$

(1) Tracer le graphe de f .

(2) Montrer que, pour tout x dans $] -\pi, \pi[$,

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{4n^2 - 1} \sin(nx).$$

(3) Calculer

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{2p+1}{16p^2 + 16p + 3}.$$