Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2010/2011 – Licence Profil Mécanique – Semestre 4
Compléments d'analyse réelle – M 203'

Exercices de révision sur les suites et les fonctions

Exercice 1

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles et soit $l \in \mathbb{R}$. Dire si les énoncés suivants sont vrais et sinon donner un contre exemple :

(1) Si (u_n) converge, alors elle est monotone.
(2) Si (u_n) est décroissante minorée par 0, alors (u_n) converge vers 0.
(3) Si (u_n) diverge, alors elle est monotone.
(4) Si (u_n) diverge, alors elle est non bornée.
(5) Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors elle tend vers $-\infty$.
(6) Si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.
(7) Si $(|u_n|)$ converge vers l, alors (u_n) converge vers l ou $-l$.
(8) Si (u_n) converge vers l, alors $(|u_n|)$ converge vers $|l|$.
(9) Si (u_n) est à termes strictement positifs et $\lim u_n = l$, alors l est strictement positif.
(10) Si (v_n) converge vers 0, alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.
(11) Si (u_n) est telle que (u_n^2) converge, alors (u_n) converge.
(12) Si (u_n) est telle que (u_n^2) converge, alors (u_n) a une valeur d'adhérence.

Exercice 2

Soit (u_n) une suite de nombres complexes convergeant vers l. On pose

$$S_n = \sum_{p=0}^{n-1} u_p.$$

(1) On suppose $l = 0$. Montrer que S_n/n tend vers 0.
(2) Montrer que dans le cas général S_n/n converge vers l.

Exercice 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels vérifiant $0 < v_0 \leq u_0$ et pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

(1) Montrer que les deux suites sont à termes positifs.
(2) Montrer que $v_n \leq u_n$ pour tout $n \geq 0$.

(3) En déduire que u_n est décroissante et v_n croissante.

(4) Conclure que les deux suites convergent vers la même limite.

Exercice 4*

Soit u_n une suite réelle et positive vérifiant

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ u_{p+q} \leq u_p + u_q.$$

(1) Soient p, q et r trois entiers. Montrer que $u_{pq+r} \leq q u_p + u_r$.

(2) Soit p appartenant à $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_p}{p}.$$

On pourra utiliser la division euclidienne de n par p.

(3) En déduire que

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \leq \underline{\lim}_{p\to+\infty} \frac{u_p}{p}.$$

(4) En déduire que (u_n/n) converge.

Exercice 5**

Soit (u_n) une suite réelle et bornée.

(1) Montrer que la suite $v_p = \sup_{n\geq p} u_n$ est décroissante.

(2) Soit a une valeur d'adhérence de la suite (u_n). Montrer que $a \leq \lim_{p\to+\infty} v_p$.

(3) Montrer que $l = \lim_{p\to+\infty} v_p$ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n).

(4) Conclure que

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{p\to+\infty} \sup_{n\geq p} u_n.$$

Exercice 6

On pose, pour $x > 0$,

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

(1) Montrer (par récurrence) que pour tout n, il existe un polynôme P_n tel que

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x).$$

(2) Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(0) = 0$.

(1) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral (à l'ordre 2) en 0.

(2) Montrer que la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n^2})$ converge vers $f'(0)^2/2$.

Exercice 8

Soit a, b et c trois entiers tels que $ae^2 + be + c = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que $a = b = c = 0$ (e n'est pas un nombre algébrique d'ordre 2). On pose

$$f(x) = ae^x + ce^{-x}.$$

(1) Calculer $f^{(k)}(x)$ pour $k \geq 1$.

(2) Soit $n \geq 1$. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral (à l'ordre n).

(3) Montrer que $f(1)$ est entier.

(4) En déduire que $\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$ est un entier.

(5) Montrer que $\left| \int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt \right| \leq \dfrac{|a|e + |c|}{n}$.

(6) Conclure que $a = b = c = 0$.