Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2012/2013 – Licence Profil Mécanique – Semestre 4
Introduction à l'analyse réelle – M 203'

Exercices sur les séries

Exercice 1

Pour chacune des suites suivantes déterminer, quand il est possible, un majorant, un minorant, le plus grand et le plus petit élément, la borne inférieure, la borne supérieure et la limite. (Note : pour la suite (3), observer que $2 < 2/\ln(2) < 3$)

(1) $(\cos(n\pi/6)/n)_{n\geq 1}$;

(2) $(n^2 e^{-n})_{n\geq 1}$;

(3) $(n^2/2^n)_{n\geq 0}$;

(4) $((-1)^n \arctan n)_{n\geq 0}$;

(5) $\left(\tan\frac{\pi}{4}\left(1+(-1)^n\frac{n-1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$;

(6) $\left(n^2 \sin\frac{2\pi n!}{12}\right)_{n\geq 0}$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, donner les premiers six termes de la série de terme général un, c.a.d. écrire les sommes partielles d'ordres $n < 6$ de la série.

Pour chacune des séries, établir la nature de la série, c.a.d. déterminer si la série converge ou diverge ; si la série converge déterminer sa somme et le reste d'ordre $n \in \mathbb{N}$.

(1) $u_n = (-1)^n$;

(2) $u_n = n^2$;

(3) $u_n = \cos(2\pi n/3)$;

(4) $u_n = e^{\frac{\imath\pi n}{3}}$;

(5) $u_n = 10^{-n}$;

(6) $u_n = (n^2-1)/(n^2+1)$.

Exercice 3

Les séries suivantes sont soit banalement divergentes, soit télescopiques, soit des séries géométriques, ou liées à celles-ci. Dans chaque cas, détérminer la nature de la série et, pour le séries convergentes, déterminer la somme de la série.

(1) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)$;

(3) $\displaystyle\sum_{n\geq 3} n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)$;

(4) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+7n+12}$;

(5) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$;

(6) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3^n+5^n}{7^n}$;

(7) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)$;

(8) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sinh n}{3^n}$;

(9) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}$;

(10) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$;

(11) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\cosh n}{2^n}$;

(12) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 4

Pour tout entier $d \geq 1$, déterminer la somme

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+d)}.$$

Exercice 5

(1) Établir la nature des séries

$$\sum_{n\geq 2} \frac{\ln n}{n}, \quad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}, \quad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^3}.$$

(2) Étudier les séries de terme général

$$u_n = e^{-\sqrt{n^2+1}} \text{ et } u_n = \frac{\log_n a}{\log_a n}.$$

Exercice 6

Dans chaque cas, étudier la nature des séries de terme général u_n :

(1) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$;
(2) $u_n = \frac{1}{(n^3+1)^{\frac{1}{3}}}$;
(3) $u_n = \frac{1}{(\ln n)^k}$, $k \in \mathbb{N}^*$;
(4) $u_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$;
(5) $u_n = \sin \frac{n}{n^2+1}$;
(6) $u_n = \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$;
(7) $u_n = \ln \left(1 + \dfrac{2}{n(n+3)}\right)$;
(8) $u_n = e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$;
(9) $u_n = 1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$;
(10) $u_n = n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$.

Exercice 7

Dans chaque cas, étudier la nature des séries de terme général u_n :

(1) $u_n = \frac{n^3}{n!}$;
(2) $u_n = e^{-\sqrt{n^2+1}}$;
(3) $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$;
(4) $u_n = \frac{4^n n!}{n^n}$;
(5) $u_n = \frac{2\times 5\times 8 \ldots \times (3n-1)}{1\times 5\times 9 \ldots \times (4n-3)}$;
(6) $u_n = \left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$;
(7) $u_n = \dfrac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$;
(8) $u_n = \left(\cos \dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$;

(9) $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln n}$;

(10) $u_n = \frac{n^{\ln n}}{n!}$.

Exercice 8

Dans chaque cas, déterminer les valeurs des paramètres r, α, pour lesquels séries de terme général u_n converge ou diverge.

(1) $u_n = n^k r^\alpha$, $r > 0, \alpha \in \mathbb{R}$;

(2) $u_n = \frac{r^n}{n^n}$, $r \geq 0$;

(3) $u_n = \frac{r^n}{n!}$, $r \geq 0$;

(4) $u_n = (n \sin(r/n))^n$, $r \geq 0$.

Exercice 9

Étudier la nature des séries suivantes, en précisant pour les séries convergentes si la convergence est absolue :

(1) $\sum (-1)^n \sqrt{n+144}$;

(2) $\sum (-1)^n \frac{n}{n+144}$;

(3) $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+144}$;

(4) $\sum (-1)^n (\pi/2 - \arctan n)$;

(5) $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+144}$;

(6) $\sum (-1)^n \left(n \ln\left(1 + \dfrac{2}{3n}\right)\right)^n$;

(7) $\sum \dfrac{(-1)^n}{3n + (-1)^n}$;

Exercice 10

Étudier la nature des séries suivantes, en fonction des différentes valeurs des paramètres.

(1) $\sum \frac{\cos(\pi\omega n)}{\omega(\omega-1)n^2+n+1}$, $\omega \in \mathbb{R}$;

(2) $\sum \frac{e^{\imath n\theta}}{\sin\theta n^2+n+2}$, $\theta \in \mathbb{R}$;

(3) $\sum n^n x^n$, $x \in \mathbb{C}$;

(4) $\sum \left(\dfrac{2x+3}{3x+2}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$;

(5) $\sum \frac{e^{2\imath\pi nx}}{n^2}$, $x \in \mathbb{C}$;

(6) $\sum \frac{e^{2\imath\pi nx}}{n}$, $x \in \mathbb{C}$.