Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2010/2011 – Licence Parcours SPI – Semestre 3
Éléments de Calcul Différentiel – Math 202 B

Devoir Surveillé 1
6 Novembre 2010 à 10h30. **Durée : 2h.**
Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits**.

Le devoir comporte des questions de cours et 4 exercices indépendants (sur **2 pages**).
Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses.
Barème indicatif : 4+4+4+4+4=20.

Questions de Cours.

(1) Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et non continue au point $(1,0)$.
(2) Soient $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Donner une expression développée de la dérivée de $f\circ g$ en fonction des dérivées partielles de f.
(3) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$. Donner l'expression de la matrice jacobienne de f au point a.

Exercice 1

En *justifiant* sa réponse, dire si les fonctions suivantes ont une limite en 0 :

(1) $f(x,y):=\frac{xy^2-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$;
(2) $f(x,y):=xy\log(x^2+y^2)$;
(3) $f(x,y):=\frac{\sin x}{x^2+y^2}$?

On pourra utiliser (sans la démontrer) l'inégalité $\frac{2t}{\pi}\leq\sin t$ pour $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$.

Exercice 2

On définit
$$f(x,y):=\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2}.$$

(1) Donner le domaine de définition D de f.
(2) Calculer les dérivées partielles de f sur D.
(3) La fonction f se prolonge-t-elle en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3

On rappelle que $a^b = e^{b \ln a}$ et on définit :

$$f(x,y,z) := x^{yz} = e^{yz \ln x}.$$

(1) Donner le domaine de définition D de f.

(2) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

(3) En déduire la dérivée de $g(t) = t^{t^2}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4

On considère sur $\mathbb{R}^3$ l'EDP suivante :

$$1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} + 3\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0.$$

On se donne f une solution de classe $\mathcal{C}^1$ de cette EDP sur $\mathbb{R}^3$. On pose

$$\varphi(u,v,w) = (u, v+2u, w+3u).$$

(1) On pose $g(u,v,w) = f \circ \varphi(u,v,w)$. Calculer l'EDP satisfaite par g sur $\mathbb{R}^3$.

(2) De quelles formes sont les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ de l'EDP satisfaite par g ?

(3) En déduire la forme de f.