Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2010/2011 – Licence Parcours SPI – Semestre 3
Éléments de Calcul Différentiel – Math 22 B

Devoir Surveillé 2
10 Janvier 2011 à 14h. **Durée : 2h.**
Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits**.

Le devoir comporte des questions de cours et 4 exercices indépendants (sur **2 pages**).

Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses. On veillera notamment à **bien préciser les théorèmes utilisés**.
Barème indicatif : 4+4+5+5+4.

On rappelle que par définition, on a, pour A borné de frontière négligeable,

$$m(A) := \int_A 1.$$

Questions de Cours.

(1) Donner un exemple d'ensemble négligeable (au sens de Riemann).

(2) Donner la définition du gradient d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(3) Soit $\omega := Pdx + Qdy + Rdz$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. Donner une condition sur les dérivées partielles de P, Q et R pour que ω soit exacte.

Exercice 1

Calculer les intégrales doubles suivantes :

(1) $\int\int_\Delta xy^2dxdy$ pour $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$;

(2) $\int\int_{[0,\frac{\pi}{2}]^2}(\cos x + \sin y)^2dxdy$.

Exercice 2

On définit, sur $\mathbb{R}^2$, la forme différentielle

$$\omega := \left(xy + \frac{y^2}{2}\right) dx + \left(xy + \frac{x^2}{2}\right) dy.$$

(1) Montrer que ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$.

(2) On pose $\Gamma := (\gamma, I)$ où $\gamma(t) = (t, e^t)$ sur $I = [0,1]$. Calculer $\int_\Gamma \omega$ de deux manières distinctes :
(*i*) en utilisant la définition d'une intégrale curviligne ;
(*ii*) en déterminant une primitive de ω.

Exercice 3

On pose, sur $I := \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\gamma_1(t) := (2\cos t, \sin t) \text{ et } \gamma_2(t) := (-\sin 2t, \cos t).$$

Ceci définit deux arcs paramétrés $\Gamma_1 = (I, \gamma_1)$ et $\Gamma_2 = (I, \gamma_2)$.

(1) Calculer $\int_{\Gamma_1}(xdy - ydx)$.

(2) Calculer $\int_{\Gamma_2}(xdy - ydx)$.

(3) En déduire l'aire de l'ensemble borné A dont la frontière ∂A est donnée par

$$\partial A := \{(t,0) : t \in [0,2]\} \cup \left\{\gamma_1(t) : t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\} \cup \left\{\gamma_2(t) : t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Exercice 4

On cherche à calculer

$$I := \int\int_\Delta \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy,$$

où $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(1) Donner une définition de Δ par les coordonnées polaires.

(2) Calculer I.