

DS, le 17 novembre 2007 à 8h, **Durée : 2h**

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice I. (Question de cours)

- (a) Donner la définition de la différentiabilité en $(0, 0)$ d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.
- (b) Donner un exemple de fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 différentiable sur \mathbb{R}^2 .

Exercice II. Etudier les limites des fonctions suivantes en $(0, 0)$:

- (a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$;
- (b) $g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$;
- (c) $h(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$

Exercice III. Soit n un entier strictement positif. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = y^n \cos(\ln(x^2 + y^2)) \quad \text{pour } (x, y) \neq (0, 0), \quad \text{et } f(0, 0) = 0.$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
2. Etudier l'existence et éventuellement calculer les dérivées partielles de f sur \mathbb{R}^2 .
3. Etudier la différentiabilité de f en $(0, 0)$. (On distinguera le cas où $n = 1$ et $n \geq 2$.)
4. Trouver les valeurs de n pour lesquelles la fonction f est de classe C^1 dans \mathbb{R}^2 . Justifier.
5. On suppose que $n = 3$. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)$.
6. On suppose que $n = 1$. Donner l'équation du plan tangent de la surface $z = f(x, y)$ en $(0, 1)$.

Exercice IV. Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^2 tel que $(u, v) = \phi(x, y) = (x - y, xy)$ soit un C^1 -difféomorphisme (ou changement de variables) de U sur V . Soit $f(x, y) = g(u, v)$ où g est une application de V dans \mathbb{R} de classe C^1 . Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$.